Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico-Químicas y Naturales de Granada

LA TEORÍA DE CAMPOS ALEATORIOS: ORÍGENES Y CONTRIBUCIONES

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

COMO ACADÉMICA NUMERARIA POR LA

ILMA. SRA. DÑA. M. DOLORES RUIZ MEDINA

GRANADA, 2021

Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico-Químicas y Naturales de Granada

LA TEORÍA DE CAMPOS ALEATORIOS: ORÍGENES Y CONTRIBUCIONES

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

COMO ACADÉMICA NUMERARIA POR LA

ILMA. SRA. DÑA. M. DOLORES RUIZ MEDINA

GRANADA, 2021

LA TEORÍA DE CAMPOS ALEATORIOS: ORÍGENES Y CONTRIBUCIONES

M. DOLORES RUIZ MEDINA

Todo matemático cree,
que está por delante de todos los demás
La razón por la que no lo dicen en público,
es porque son gente inteligente

Excmo. Sr. Presidente

Excmos. e Ilmos. Sras. y Sres. Académicos

Queridos amigos y compañeros:

La Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada ha sido un referente del saber, donde se fomenta la difusión del conocimiento científico y se promueve su intercambio y acercamiento a la sociedad. Es para mí, pues, un gran honor poder ingresar y formar parte de esta emblemática institución. Por tanto, me gustaría expresar, en mis primeras palabras, al comienzo de este acto, mi gratitud hacia los miembros de esta Academia por aceptar, a propuesta de la Sección de Matemáticas, mi ingreso entre sus miembros. Mi agradecimiento especial a los académicos Dres. Mariano J. Valderrama Bonet, Ramón Gutiérrez Jáimez, Andrés

González Carmona, Josefa Linares Pérez, José M. Angulo Ibáñez, Antonio Martín Andrés, y a la Sección de Matemáticas.

En segundo lugar, quiero manifestar mi ilusión y entusiasmo por colaborar en las iniciativas y actividades de esta insigne institución, dimensionadas en diferentes áreas de la Ciencia, con un objetivo común, potenciar, difundir y apoyar el desarrollo científico en nuestra sociedad, y, en particular, incrementar su proximidad a nuestros jóvenes. Este ingreso supone, pues, una nueva etapa en mi vida académica, gracias al gesto de reconocimiento y confianza con el que los miembros de esta Academia me han distinguido. Realmente, este hecho ha marcado y marcará mi actividad científica y académica, y supone un nuevo estímulo para seguir avanzando, creciendo y contribuyendo a la Ciencia, desde diferentes ángulos y perspectivas.

Quiero expresar, en este sentido, de nuevo, mi gratitud a quien va a ser mi padrino de ingreso en la Academia, el Profesor Mariano J. Valderrama Bonet, por su aceptación del encargo de la Academia de realizar el discurso de contestación en este acto. Sin duda, sin su colaboración, este acto de ingreso no hubiera sido posible, ya que gracias a él inicié mi carrera académica y científica en esta universidad, proporcionándome su apoyo, dirección y confianza en dicha etapa. Realmente, desde aquel momento, *la Ciencia ha sido mi compañera de viaje, mi motor, y, por qué no decirlo, el origen de una parte importante de mis satisfacciones y frustaciones.*

Finalmente, quiero agradecer de forma muy especial a Andrés González Carmona, vicepresidente de la Academia, su apoyo y el papel fundamental que ha jugado en mi ingreso. Sobre todo valoro sus cualidades humanas en el trabajo, su generosidad en la dedicación de su tiempo a los demás y, adicionalmente, a otras muchas cualidades científicas, agradezco su gran capacidad para *escuchar*.

Mi discurso de ingreso en la Academia se titula *La Teoría de Campos Aleatorios: Orígenes y Contribuciones*. Su contenido ofrece una panorámica de las principales vertientes, donde la Teoría de Campos Aleatorios se ha desarrollado de forma más significativa desde sus orígenes, impulsada por su interacción con otras disciplinas. Durante este recorrido, que espero no les resulte en absoluto *aleatorio*, intentaré compartir con todos ustedes los aspectos que, desde mi perspectiva, son más fascinantes e interesantes en esta teoría, con especial énfasis, en aquellos problemas a los que, *de una forma muy modesta*, he intentado contribuir a lo largo de mi trayectoria. Algunas de estas contribuciones tienen un *sabor* más probabilístico, mientras que otras poseen un *enfoque* más estadístico, o bien, han surgido claramente motivadas por la resolución de problemas prácticos, en otras áreas más aplicadas. Aprovecharé también este recorrido, para agradecer, de forma más individualizada, a todos aquellos, que han compartido cada una de las etapas de mi evolución científica.

La palabra estocástico se deriva de la palabra griega ($\sigma\tau o\chi\varsigma$, *stokhos*) que significa *acertar o conseguir una marca*. Según el *Oxford English Dictionary*, su aparición más temprana se produce en torno al año 1662. En inglés su significado original se relaciona con la palabra *conjeturar*, o bien, *realizar conjeturas*. De hecho, Jakob Bernoulli, en su trabajo, originalmente publicado en latín en 1713, titulado *Ars Conjectandi*, excribió la frase *Ars Conjectandi sive Stochastice*, que fue traducida más tarde como *the art of conjecturing*, o bien, en español, *el arte de conjeturar*. Posteriormente, en 1917, Ladislaus Bortkiewicz refiere a este primer autor, introduciendo la terminología, en alemán, *stochastik*, que significa *aleatorio*. El término *proceso estocástico* lo introduce por primera vez Joseph Doob, en su artículo publicado en 1934. Fue este autor, quien años más tarde, en la reedición de 1990, de su libro, publicado en 1953, (ver [84], p. 47) motivaría la introducción del concepto de *campo aleatorio*, escribiendo:

Our definition of a stochastic process is historically conditioned and has obvious defects. In the first place there is no mathematical reason for restricting T to be a set of real numbers, and in fact interesting work has already been done in other cases. (Of course, the interpretation of t as time must then be dropped.) In the second place there is no mathematical reason for restricting the value assumed by the X_t's to be numbers.

Dado que un proceso estocástico o aleatorio también puede interpretarse como un elemento aleatorio en un espacio de funciones, el término *función aleatoria* se suele adoptar con frecuencia (ver, por ejemplo, Lamperti [162]). Si bien la terminología *proceso estocástico o aleatorio* también suele ser utilizada en un sentido amplio, la denominación *campo aleatorio* se aplica cuando las variables aleatorias son indexadas en un conjunto del plano, o bien, en algún espacio euclídeo de dimensión superior, así como cuando el espacio de parámetros es una variedad geométrica. Adicionalmente, sus valores pueden ser funciones u otros objetos matemáticos (ver, por ejemplo, Gikhman y Skorokhod [116]). Así, la definición habitual de campo aleatorio es la siguiente:

En su acepción más amplia un campo aleatorio es una colección de variables aleatorias, cuyos índices se encuentran en un espacio topológico y cuyos valores están en un espacio métrico o semi-métrico.

Orígenes de la Teoría de Campos Aleatorios

La Teoría de Campos Aleatorios tiene sus orígenes en la Física, más concretamente, los primeros trabajos surgen con el estudio de la Dinámica de Fluidos. Las conexiones entre la Mecánica Estadística y la Teoría de Campos Aleatorios han jugado un papel fundamental en la difusión de esta última terminología, especialmente, en el contexto de la teoría física de Campos Cuánticos (ver, por ejemplo, S. Albeverio y R. H∅egh-Krohn [5]; A. Einstein [89]; [90] y [91]). El término físico *campo* fue primeramente adoptado por Michael Faraday durante su investigación sobre el magnetismo. Posteriormente, varios trabajos formalizaron matemáticamente la idea de este término. En el contexto clásico, los campos se definen como funciones que varían de forma continua a lo largo del espacio y a través del tiempo. Inicialmente, este concepto fue introducido como un artificio matemático. Más tarde, los campos electromagnético y gravitatorio proporcionaron evidencia de ser entidades físicas reales, susceptibles de ser medidas y detectadas, con una energía asociada, más allá del concepto puramente matemático de los campos de fuerzas. De hecho, en la física cuántica moderna se considera que no existen partículas materiales sino simplemente campos materiales. En este sentido, fue James Clerk Maxwell, en 1859, quien realizó una sólida aportación a la teoría unificada de campos en la Física. Más específicamente, James Clerk Maxwell contribuyó significativamente a la teoría cinética de los gases, asumiendo que las partículas de gas se mueven en direcciones aleatorias a velocidades aleatorias. La teoría cinética de los gases y la Mecánica Estadística continuaron desarrollándose, en la segunda mitad del siglo XIX.

La dinámica caótica, nexo entre la evolución regular y aleatoria de los sistemas físicos

Los primeros trabajos experimentales sobre este tema analizaban los movimientos erráticos de partículas. Destacaron las investigaciones del físico holandés Jan Ingenhousz, en 1785, referentes a partículas de polvo de carbón suspendidas en alcohol, y las investigaciones del botánico escocés Robert Brown, en 1827, sobre el movimiento irregular de pequeños granos de polen, observados a través del microscopio. Al mismo tiempo, en 1822, Joseph Fourier deriva la ecuación de conducción del calor, y A. Fick, en 1855, establece una ecuación de difusión. Todo esto motiva la búsqueda de una base teórica estocástica, desarrollándose la dinámica caótica, que conecta la evolución regular de los sistemas con el comportamiento aleatorio observado. De hecho, fueron los estudios experimentales muy detallados de Gouy los que permitieron demostrar la teoría cinética establecida por C. Weiner en 1863. En este sentido, fue fundamental el trabajo realizado por Rudolf Clausius, Ludwig Boltzmann y Josiah Gibbs, cuya influencia en el modelo matemático de Albert Einstein, para el Movimiento Browniano, se manifestaría más tarde. Específicamente, L. Boltzmann fue el primero en aplicar métodos dinámicos para una descripción cinética de los objetos físicos, comenzando así su versión de la teoría cinética de los gases en 1895. Esta teoría permite la descripción del movimiento de partículas mediante la formulación de ecuaciones probabilísticas, que caracterizan el comportamiento aleatorio del sistema, en conjunción con las ecuaciones que modelizan la dinámica original (o regular) del sistema. En su formulación consideró una ecuación no lineal para la caracterización de las distribuciones de probabilidad subyacentes. (Posteriormente, aparecieron diferentes versiones lineales de ecuaciones cinéticas). Esta teoría permite reducir el número de variables de sistemas complejos, mediante la aplicación de supuestos estadísticos y probabilísticos. Las ecuaciones de difusión se pueden considerar como simples ejemplos de ecuaciones cinéticas, y su aparición está vinculada a los nombres de M. Smoluchowski, A. Einstein, M. Planck y A. Kolmogorov.

Realmente, fue Albert Einstein, quien unificaría, en 1905, los dos enfoques en sus tratados sobre el Movimiento Browniano. Aunque, según los informes, no tenía acceso al trabajo original de Brown, acuñó el nombre *Movimiento Browniano*.

El desarrollo de un marco matemático apropiado. Modelización isotrópica de flujos turbulentos

La Teoría de Campos Aleatorios se ha nutrido del desarrollo de diversas herramientas matemáticas, que provienen de la Probabilidad, el Cálculo Numérico, el Álgebra Lineal, la Teoría de Conjuntos y la Topología, así como de ramas del Análisis Matemático, tales como el Análisis Real, la Teoría de la Medida, el Análisis de Fourier, y el Análisis Funcional. Por tanto, podemos considerar que la Teoría de Campos Aleatorios supone una contribución importante a las Matemáticas. Sin embargo, no se desarrolla una concepción matemática de dicha teoría hasta principios del siglo XX (ver Doob [85]). Más concretamente, el marco matemático apropiado para esta teoría se obtiene gracias al desarrollo de la *Teoría de la Medida*, cuyos fundadores fueron los matemáticos franceses, Henri Lebesgue y Émile Borel. De hecho, estos avances matemáticos marcarán el comienzo de la *Teoría de la Probabilidad Moderna*.

Específicamente, en 1925, el matemático francés Paul Lévy publicó el primer libro de probabilidades que utilizaba ideas de la teoría de la medida. Durante el periodo 1920-1930, los matemáticos Sergei Bernstein, Aleksandr Khinchin y Andrei N. Kolmogorov realizaron contribuciones fundamentales a la teoría de la probabilidad en la Unión Soviética. A. N. Kolmogorov publicó en 1929 su primer intento de presentar una base matemática, basada en la teoría de la medida, para la teoría de la probabilidad. A principios de la década de los 30 (siglo XX), A. Khinchin y A. N. Kolmogorov organizaron seminarios de probabilidad, a los que asistieron distinguidos investigadores, tales como Eugene Slutsky y Nikolai Smirnov. A. Khinchin introduce entonces la primera definición matemática de un proceso estocástico como un conjunto de variables aleatorias indexadas en la recta real. En 1933, Andrei N. Kolmogorov publicó en alemán su libro sobre los fundamentos de la teoría de la probabilidad titulado *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, donde utiliza la teoría de la medida, para desarrollar un marco axiomático para la teoría de la probabilidad. La publicación de este libro supuso el nacimiento de la *Teoría Moderna de la Probabilidad*. Se destaca también la labor de los matemáticos Joseph Doob, William Feller, Maurice Fréchet, Paul Lévy, Wolfgang Doeblin y Harald Cramér, en el desarrollo de la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos (ver, por ejemplo, N. Bingham [44]; H. Cramer [70]).

Según se ha comentado anteriormente, las primeras contribuciones sobre la Teoría de Campos Aleatorios se remotan a los años 1920-1930, donde podemos encontrar sus orígenes en los trabajos sobre *Dinámica de Fluidos* de A. A. Friedman, L. V. Keller, G. I. Taylor, L. Prandl, y T. Von Karman. Se destaca la contribución fundamental de A. N. Kolmogorov junto al matemático y físico ruso A. M. Obukhov, en la teoría estadística sobre turbulencias. Más concretamente, A. N. Kolmogorov y A. M. Obukhov, en 1941, aplican los modelos de campos aleatorios isotrópicos y realizan un postulado: *los movimientos de las turbulencias a pequeña escala son estadísticamente isotrópicos, es decir, no se puede determinar una dirección espacial preferencial*. En general, las grandes escalas de un flujo no son isotrópicas, ya que están determinadas por las características geométricas particulares de los límites. A. N. Kolmogorov pensaba que esta información geométrica y direccional se disipaba a medida que la escala se reduce. Es decir, la modelización estadística de las escalas pequeñas tiene un carácter universal, siendo la misma para todos los flujos turbulentos. Más concretamente, un flujo turbulento se caracteriza por una jerarquía de escalas a través de las cuales tiene lugar la cascada de energía, que procede de la descomposición de las escalas grandes. La información geométrica y direccional desaparece y la energía se disipa, a medida que la escala se reduce, hasta llegar al orden de magnitud determinado por A. N. Kolmogorov. Entre las dos escalas extremas de la cascada hay una gama de escalas intermedias, cada una con su propia longitud característica, cuya formación tiene lugar a partir de la energía de las escalas grandes. Estas escalas son muy grandes en comparación con el orden de magnitud de la escala de Kolmogorov, pero aún son muy pequeās en comparación con la gran escala del flujo. Dado que los remolinos en este rango intermedio son mucho más grandes que los remolinos disipativos que existen en las escalas de Kolmogorov, la energía cinética esencialmente no se disipa en este rango, y simplemente se transfiere a escalas más pequeñas, hasta que los efectos viscosos se vuelven importantes a medida que se acerca el orden de la escala de Kolmogorov. Dentro de este rango intermedio, los efectos inerciales son aún mucho mayores que los efectos viscosos, y es posible suponer que la viscosidad no juega un papel importante en su dinámica interna. Por este motivo este rango se denomina *Rango Inercial*.

Las herramientas fundamentales para el análisis probabilístico y estadístico de los modelos de campos aleatorios isotrópicos y/o homogéneos aparecen en los trabajos pioneros de K. Karhunen [148], A. M. Obukhov [224]; [225]; [226] y A. M. Yaglom [370] y [371].

Paralelamente, durante los años 1964-1968, I. M. Gel'fand y N. Ya Vilenkin [113] y, previamente, en el periodo 1954-1956, K. Ito, en [137] y [138], introducen el concepto de campo aleatorio generalizado, que jugará un papel fundamental en la teoría física de Campos Cuánticos (ver, por ejemplo, E. Nelson, [218]; [219]). Me referiré posteriormente con más detalle a esta familia de campos aleatorios, en la descripción de algunas de las líneas de investigación trabajadas en mi primera etapa postdoctoral.

En los apartados posteriores de este discurso, comentaré brevemente las contribuciones iniciales, dentro de la Teoría de Campos Aleatorios, que originaron el desarrollo de las líneas de investigación, donde se ha conformado mi trayectoria científica, junto a mis colaboradores y miembros de mi equipo. Asimismo, haré referencia a algunas de nuestras contribuciones más destacadas en dichas líneas de investigación.

La Teoría Espectral de Campos Aleatorios Homogéneos e Isotrópicos

Esta teoría está íntimamente relacionada con el análisis funcional y, en particular, con la teoría de núcleos definidos positivos (ver, por ejemplo, E. J. Hannan

[127]; [128] y A. M. Yaglom [372]; [375], quienes establecieron algunas de estas conexiones). El análisis de las propiedades de segundo orden de una familia de campos aleatorios se reduce, pues, al análisis de las propiedades de la clase de núcleos definidos positivos que definen sus funciones de correlación sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. En el caso de campos aleatorios homogéneos e isotrópicos, donde la función de correlación $\rho(x, y)$ depende solo de la distancia entre los puntos x e y, para $x, y \in \mathbb{R}^n$, su representación fue derivada, por primera vez, por J. Shoenberg [306]. Las conexiones de estos resultados con la teoría de campos aleatorios homogéneos e isotrópicos fueron establecidas posteriormente por A. Blanc-Lapierre y P. Faure [45], B. Matern [192] y A. M. Yaglom [371]; [372]. En este sentido, el Teorema de Karhunen (ver K. Karhunen [148]) juega un papel fundamental. Su demostración se recoge también, años más tarde, por ejemplo, en el texto clásico de I. I. Gikhman y V. V. Skorokhod [117], pp. 280-294. La representación de un campo aleatorio homogéneo e isotrópico, en términos de la base de armónicas esféricas, la obtuvo, por primera vez, M. I. Yadrenko en su disertación de máster (ver también A. M. Yaglom [373]). La definición y propiedades de las funciones que intervienen en dicha representación habían sido analizadas en el libro de H. Bateman y A. Erdelyi [30]. La relación entre estas funciones especiales y la teoría de representación de grupos también fueron posteriormente estudiadas en el libro de N. Ya Vilenkin [332], titulado *Special Functions and the Theory of Group Representations*.

En las representaciones espectrales referidas, la homogeneidad e isotropía, o invarianza frente a rotaciones y traslaciones de los núcleos de covarianza involucrados se refleja, por ejemplo, en el carácter unidimensional de las integrales estocásticas que aparecen en dichas descomposiciones ortogonales (ver también H. Ogura [227]; [228], para el caso de espectro absolutamente continuo, en el plano y el espacio tres-dimensional, y Mc. Neil [217], para representaciones de campos aleatorios sobre el plano). Las propiedades de invarianza de la distribución de probabilidad de un campo aleatorio, en particular de sus momentos de orden dos en el caso Gaussiano, en conexión con la teoría de representación de grupos compactos, se aplican paralelamente en la obtención de la representación espectral de campos aleatorios generalizados sobre un espacio de Hilbert separable H, a partir del Teorema de

Peter-Weyl. En este contexto, las propiedades de invarianza se formulan respecto al grupo de transformaciones isométricas sobre H (ver, por ejemplo, N. Kono [155] y A. Orihara, [230]). En estos trabajos el objetivo fundamental es el estudio de las propiedades de las funciones que intervienen en la descomposición espectral, en sustitución de las armónicas esféricas, que aparecen en el caso finito-dimensional. En este contexto matemático, más abstracto, en conexión con la topología algebraica y el análisis funcional, como primeras contribuciones destacadas citaré las reflejadas en los trabajos de A. I. Pomarenko [240]-[244] y A.M. Yaglom [373]; [375].

La descomposición ortogonal de campos aleatorios isotrópicos sobre la esfera es un tema central en la literatura sobre *Teoría Espectral de Campos Aleatorios*, que suscita gran interés en el campo de la Física, Astrofísica y Geofísica (ver, por ejemplo, A. M. Yaglom [374]). Mención especial merecen, entre otros, los trabajos pioneros de A. M. Obukhov [224] y M. I. Yadrenko [352] (ver también K. Itô [138]; R. Jones [146]; A. M. Obukhov [225]; H. Ogura [228]; Yu D. Popov [245]; V. N. Tutubalin [330]; M. I. Yadrenko y S. B. Khatset [368]). En particular, en la monografía de M. I. Yadrenko [367], titulada *Spectral Theory of Random Fields*, se recogen los resultados fundamentales derivados, en este área, hasta la década de los 80 del siglo XX.

Mis primeras contribuciones, en este contexto, se remotan a mis comienzos, a *mis primeros pasos*, cuando realicé mi tesis doctoral, bajo la dirección del Profesor Mariano J. Valderrama, donde se abordó la derivación de descomposiciones ortogonales, tipo Karhunen-Loéve, para campos aleatorios, incluyendo el desarrollo de Karhunen-Loéve transformado y el desarrollo ortogonal, en términos de funciones de Bessel (ver, por ejemplo, R. Gutiérrez, M. D. Ruiz-Medina y M. J. Valderrama [123] y M. D. Ruiz-Medina y M. J. Valderrama [300]; [301]). Se obtuvieron así diferentes aproximaciones, para el problema de extrapolación lineal mínimo-cuadrática para campos aleatorios homogéneos e isotrópicos, como extensión de los resultados previos, derivados, por ejemplo, en la monografía de M. I. Yadrenko [367].

La realización de mi tesis doctoral, bajo la dirección del Profesor Mariano J. Valderrama, marcó el inicio de mi investigación en este área. Aún recuerdo la entrega, por parte del Profesor Mariano J. Valderrama de los textos Spectral Theory of Random Fields *y* Statistical Analysis of Random Fields*, escritos por M. I. Yadrenko, y*

A. V. Ivanov y N. N. Leonenko, respectivamente, que contribuyeron a mi formación en este ámbito. Por supuesto, en aquel momento, no podía evaluar la influencia y la repercusión de dichos textos, así como de sus autores, en mi trayectoria científica posterior. Por todo ello, agradezco de nuevo al Profesor Mariano J. Valderrama, su labor de dirección y su apoyo, en esta primera etapa de mi trayectoria. Particularmente, agradezco su visión y perspectiva en la selección de los contenidos de mi tesis. Por supuesto, mi agradecimiento también al Profesor R. Gutiérrez, quien seleccionó la 'semilla' que originó el desarrollo de esta línea de investigación, siendo director de tesis del Profesor Mariano J. Valderrama, en temas relacionados con el desarrollo de Karhunen-Loéve.

Resultados Límite

Durante la década de los 70 del siglo XX, la literatura sobre teoremas límite para integrales y medias locales de campos aleatorios homogéneos e isotrópicos alcanza un especial protagonismo, dada su relevancia en el desarrollo de la Inferencia Estadística para campos aleatorios. En particular, su aplicación en el problema de regresión suscita gran interés (ver A. V. Bulinskii e I. G. Zhurbenko [59]; N. N. Leonenko [164]; [165]; [166]; [167];[168] y N. N. Leonenko y M. I. Yadrenko [179]; [181]; [182], entre otros). La fórmula del diagrama y los métodos gráficos constituyen una de las herramientas básicas, en la derivación de resultados centrales del límite para campos aleatorios no Gaussianos (ver, por ejemplo, F. Avram, [20]; F. Avram y L. A. Brown [21]; F. Avram y R. Fox [22]; P. Breuer y P. Major [55]; D. Chambers y E. Slud [63]; A. V. Ivanov y N. N. Leonenko [141]). Una formulación vectorial de estos resultados se encuentra en el trabajo de M. A. Arcones [18], quien ofrece un amplio *overview* sobre este tema.

El estudio de condiciones que garantizan la Ley Fuerte de los Grandes Números juega un papel fundamental en la obtención de resultados sobre ergodicidad fuerte, para diferentes familias de campos aleatorios (ver, por ejemplo, B. F. Gaposhkin, [112]; A. A. Tem'pelman [320]; V. V. Yurinskii [380]).

Los Teoremas de reducción, basados en el rango de Hermite, para campos aleatorios subordinados a campos aleatorios Gaussianos, con dependencia de largo rango, fueron formulados por primera vez en el trabajo de M. S. Taqqu [315], sobre resultados límite para el movimiento Browniano fraccionario y el proceso de Rosenblatt. Posteriormente, en las monografías de M. I. Yadrenko [367] y de A. V. Ivanov y N. N. Leonenko [141], se adopta esta metodología, en la determinación de la distribución límite de integrales, ponderadas por una función radial, de funcionales no lineales de campos aleatorios Gaussianos homogéneos e isotrópicos. Otra aplicación interesante de estos resultados permite el cálculo de la distribución límite de medidas aleatorias sobre los conjuntos donde un campo aleatorio Gaussiano homogéneo e isotrópico excede un determinado umbral o superficie móvil. Esta línea de investigación sigue siendo de interés en la década de los 90 del siglo XX, según se refleja, por ejemplo, en la monografía de N. N. Leonenko [169]. Una herramienta fundamental, en la metodología adoptada para la derivación de este tipo de resultados límite, son los Teoremas Tauberianos y Abelianos, cuya aplicación permite, por ejemplo, el cálculo de la distribución límite de la solución de diferentes versiones de la ecuación de Burgers con condiciones iniciales aleatorias (ver N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina [172], entre otros).

Procesos isonormales, *Wiener chaos* y teoremas límite

Mención especial merecen los trabajos de R. L. Dobrushin y P. Major [82], y M. S. Taqqu [315]; [316], donde se obtiene la convergencia a distribuciones Gaussianas y no Gaussianas, bajo modelos de dependencia fuerte, de funcionales no lineales de campos aleatorios Gaussianos. Estos trabajos, pioneros en la aplicación de herramientas del *Wiener Chaos*, vía la isometría que establece la integral estocástica múltiple de Wiener-Itô, derivan nuevos resultados límite, más allá del contexto markoviano. En la etapa más reciente, Nualart y Peccati [222] (ver también Peccati y Tudor [235]) aplican las herramientas del cálculo de Malliavin, en conexión con el *Wiener Chaos*, para la derivación de un Teorema Central del Límite, ampliamente citado en la literatura posterior, y extendido a contextos más generales por estos autores y sus coautores (ver, por ejemplo, la monografía, más reciente, de G. Peccati y M. S. Taqqu [234]). El volumen de P. Doukhan, G. Oppenheim y M.S. Taqqu [86] contiene una revisión bibligráfica sobre los resultados más relevantes en esta área. Ver también la monografía de G. Peccati [233], donde se aplican las herramientas usuales del cálculo de Malliavin, en el contexto infinito-dimensional de los procesos isonormales.

En este campo, nuestras primeras aportaciones estuvieron relacionadas con la determinación de la distribución límite de la solución de ecuaciones pseudodiferenciales lineales y ecuaciones diferenciales no lineales, tales como la ecuación de Burgers, con condiciones iniciales aleatorias (ver, por ejemplo, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina [171]; [172]; [173]; [174]; [13]). Posteriormente, en el trabajo de A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y I N. Savich [142], motivados por el problema de regresión no lineal paramétrica mínimo cuadrática, se obtiene un Teorema Central del Límite para integrales, ponderadas por una función test (la función de regresión), de un funcional no lineal de un campo aleatorio Gaussiano, cuyo espectro presenta múltiples singularidades. Recientemente, adoptando una metodología similar, basada en el *Wiener Chaos* y el desarrollo de Karhunen-Loéve, se obtiene como distribución límite, la distribución de Rosemblatt, en los teoremas no centrales derivados en los trabajos de N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y M. S. Taqqu [177]; [178].

En el desarrollo de esta línea de investigación debo agradecer a los Profesores N. N. Leoneneko (Cardiff University), A. V. Ivanov (Kiev University) y M. S. Taqqu (Boston University) su colaboración, y la oportunidad de iniciar nuevas áreas de investigación junto a ellos. Debo destacar, en este sentido, la perseverancia del Profesor M. S. Taqqu, y su análisis multirresolución*, efectuado sobre todos los contenidos de los trabajos realizados, requiriendo minuciosamente todo tipo de detalles, sobre las fuentes bibliográficas y los pasos de las demostraciones de cualquier tipo de resultado, por triviales que parecieran, incluso de aspectos ya publicados. Del Profesor A. V. Ivanov me sorprendió su excepticismo, ante cualquier propuesta que se realizara o solución que se derivara para resolver un problema. Realmente, ambos colaboradores me influyeron notablemente, modificando mi actitud ante mi trabajo y la Ciencia.*

Distribución límite de campos aleatorios esféricos e isotrópicos

Como he comentado, en la breve reseña histórica realizada sobre la teoría espectral de campos aleatorios homogéneos e isotrópicos, se pueden encontrar interacciones fascinantes entre la Probabilidad, la Estadística Matemática y el Análisis Armónico sobre grupos y espacios homogéneos (ver, por ejemplo, P. Diaconis [79]). D. Marinucci y G. Peccati [191] explotan, en sus trabajos recientes, estas conexiones entre la Probabilidad, la Estadística y los conceptos teóricos grupales, según se refleja, en su monografía, publicada en 2011, titulada *Random Fields on the Sphere. Representation, Limit Theorems and Cosmological Applications*. La representación de Grupos Compactos revela algunas estructuras matemáticas elegantes, explotando, por ejemplo, las propiedades de las matrices entrelazadas *Clebsch-Gordan* y las integrales de Gaunt, que permiten llevar el anáisis de campos aleatorios esféricos e isotrópicos a contextos más abstractos y amplios. Uno de los temas centrales, que motivan los contenidos de la monografía de D. Marinucci y G. Peccati [191], es el análisis de la llamada *Cosmic Microwave Background* (CMB) *radiation*. De hecho, la radiación CMB se puede interpretar como una sola realización de un campo aleatorio isotrópico esférico de varianza finita. Estos autores aplican el siguiente principio: la radiación CMB es una imagen del universo primitivo, donde la isotropía subyacente puede ser vista como una consecuencia del llamado *Principio Cosmológico de Einstein*, afirmando que a gran escala (para distancias suficientemente grandes) el Universo se ve idéntico en todas partes en el espacio, es decir, se observa su *homogeneidad*. Su apariencia es también idéntica en todas las direcciones, dada su *isotropía*.

Las primeras dinámicas del *Big Bang* consideran que las fluctuaciones aleatorias son Gaussianas, o bien, se representan mediantes funciones aleatorias que son funciones polinómicas cuadráticas o cúbicas de un campo aleatorio Gaussiano subyacente (ver, por ejemplo, N. Bartolo, M. Fasiello, S. Matarrese y A. Riotto [26]; N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese y A. Riotto [27]; N. Bartolo, S. Matarrese y A. Riotto [28]). En este sentido, D. Marinucci y G. Peccati justifican, en [191], su selección de los modelos de campos aleatorios Gaussianos esféricos e isotrópicos, o bien, de campos aleatorios esféricos subordinados a dichos campos, para el análisis de la radiación CMB. Uno de los objetivos fundamentales de sus trabajos consiste en proporcionar las herramientas adecuadas que permitan el cálculo de la distribución límite, en altas frecuencias o niveles de resolución, de funcionales no lineales de campos aleatorios esféricos isotrópicos Gaussianos, adoptando un dominio espacial fijo (la esfera). Dichos resultados se aplican a la determinación de la distribución límite de funcionales, tales como los funcionales de Minkowski, de especial interés en este contexto, y a los que me referiré con más detalle seguidamente.

Los *funcionales de Minkowski* se introducen, por ejemplo, en D. Novikov, H. A. Feldman y F. Shandarin [220]. Su interpretación geométrica es sencilla e intuitiva. Más concretammente, dado un umbral, ν, podemos dividir la esfera en dos partes: las *regiones calientes*, donde el campo aleatorio temperatura, T, sobrepasa el umbral ν, y, las *regiones frías*, donde dicho campo aleatorio T permanece por debajo del umbral ν. Las regiones calientes también son referidas como *conjuntos de excursión*, a los que me referiré más tarde, en relación con la Geometría de Campos Aleatorios (ver, por ejemplo, Adler [1]; Leonenko [169], p.164).

En dimensión 3, se consideran tres tipos de funcionales de Minkowski:

1. *Area:* Se denota por $M_0(\nu)$ el área total de las regiones calientes.

2. *Longitud de la Frontera:* Se denota por $M_1(\nu)$ y es proporcional al total de la longitud de la frontera que separa las regiones calientes de las regiones frías.

3. *La característica de Euler:* Se denota por $M_2(\nu)$. Esta cantidad posee una naturaleza topológica, proporcionando el número de regiones calientes menos el número de regiones frías.

Nuestra investigación se ha centrado en el análisis de la distribución límite del primer funcional de Minkowski, cuya definición más formal vendría dada por

$$
\begin{aligned}
&M_0(\nu) = \sigma\left\{(R,\theta,\varphi) \in s(R);\ T(R,\theta,\varphi) > \nu\right\} \\
&= \int_{s(R)} 1_{\left\{(\widetilde{\theta},\widetilde{\varphi});\ T(R,\widetilde{\theta},\widetilde{\varphi})>\nu\right\}}(\theta,\varphi)\sigma_R(d\theta,d\varphi) \\
&= \int_{s(R)} 1_{\left\{\widetilde{\mathbf{x}};\ \widetilde{T}(\widetilde{\mathbf{x}})>\nu\right\}}(\mathbf{x})\widetilde{\sigma}_R(d\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la notación

$$\widetilde{\sigma}_R(d\mathbf{u}) = \sigma_R(d\theta, d\varphi) = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (\theta,\varphi) \in s(1), \quad R = \|\mathbf{x}\| > 0,$$

siendo $T = \{T(R,\theta,\varphi);\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ R > 0\}$ el campo aleatorio de temperatura definido sobre el espacio probabilístico base, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que se supone isotrópico, y $\mathcal{E}_R(\omega) = \{\mathbf{x}(\omega) \in s(R);\ T(\mathbf{x},\omega) > \nu\},\ \omega \in \Omega$, denota el conjunto aleatorio de excursión, asociado al umbral ν. En particular, para cualquier elemento $g \in SO(3)$ del grupo de rotaciones sobre la esfera $s_2(R) = s(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = R\} \subset \mathbb{R}^3$, se tiene la siguiente identidad en ley $\widetilde{T}(g(\mathbf{x})) \underset{L}{=} \widetilde{T}(\mathbf{x})$. En los resultados derivados, se suele considerar el caso $R = 1$, siendo entonces $\widetilde{\sigma}_1(d\mathbf{x}) = \widetilde{\sigma}(d\mathbf{x}) = \sigma(d\vartheta, d\varphi) = \sin(\vartheta)d\vartheta d\varphi,\ (\vartheta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi)$. Adicionalmente, se suele asumir que T está centrado y normalizado en varianza. En el caso Gaussiano, la invarianza frente a rotaciones de los momentos de orden dos equivale a la isotropía en sentido fuerte. Así, para dos puntos $P = (\theta,\varphi)$ y $Q = (\theta',\varphi')$, en la esfera $s(1)$, la función de covarianza $E\left[\widetilde{T}(P)\overline{\widetilde{T}(Q)}\right]$ solo depende de la distancia angular $\theta = arc\ cos\left(P^T Q\right)$, donde se ha denotado mediante *arc cos* la función inversa del coseno. El campo aleatorio de temperatura T admite entonces la siguiente expansión ortogonal (ver Teorema 5.13 en [191]):

$$T(\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{T}_l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in s(1),$$

para $\varphi \in [0,2\pi)$, y $\vartheta \in [0,\pi]$. La secuencia de variables aleatorias independientes Gaussianas y complejo-valuadas $\{a_{lm},\ -l \leq m \leq l,\ l \geq 0\}$ satisface

$$\begin{aligned} a_{lm} &= (-1)^m a_{l-m}, \quad E[a_{lm}] = 0, \quad P[a_{l0} \in \mathbb{R}] = 1,\ l \geq 0 \\ E a_{lm}\overline{a_{l'm'}} &= \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\boldsymbol{\mathcal{C}}_l\ , -l \leq m \leq l\ ,\ -l' \leq m' \leq l',\ l,l' \geq 0 \\ & \quad E[(\mathrm{Re}(a_{lm}))^2] = E[(\mathrm{Im}(a_{lm}))^2] = \frac{E[a_{l0}^2]}{2} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{C}}_l}{2}, \end{aligned}$$

donde $\{\boldsymbol{\mathcal{C}}_1, \boldsymbol{\mathcal{C}}_2, ..., \boldsymbol{\mathcal{C}}_l, ...\}$ denota el espectro angular de T.

El desarrollo ortogonal de T se obtiene, pues, en términos de la base ortonormal de $L^2_{\mathbb{C}}(s(1))$ de armónicas esféricas $\{Y_{lm},\ -l \leq m \leq l,\ l \geq 0\}$, dadas por, para

$\vartheta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$,

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= c_{lm} \exp(im\varphi) P_{lm}(\cos\vartheta) \quad -l \leq m \leq l, \; m \geq 0 \\
Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= (-1)^m \overline{Y}_{l-m}(\vartheta, \varphi), \quad m < 0,
\end{aligned}
$$

donde

$$
c_{lm} = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \quad -l \leq m \leq l,
$$

y $\{P_{lm}\}$ son las funciones de Legendre $\{P_{lm}(\cos\vartheta)\}$, definidas en términos de los polinomios de Legendre $\{P_l, \; l = 0, 1, 2 \ldots\}$ como sigue (ver, por ejemplo, pp. 315-316 en [191]):

$$
\begin{aligned}
P_{lm}(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \; x \in [-1, 1], \\
& \qquad m = 0, \ldots, l, \; l = 0, 1, 2 \ldots, \\
P_{l-m}(x) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}, \quad x \in [-1, 1], \quad m \geq 0, \\
P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l, \quad x \in [-1, 1], \; l = 0, 1, 2 \ldots.
\end{aligned}
$$

satisfaciendo

$$
\int_{-1}^{1} P_{lm}(x) P_{l'm}(x) dx = \delta_{l,l'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!},
$$

siendo $\delta_{l,l'}$ la función delta de Kronecker. Por tanto, la función de covarianza C_T de T satisface, para $\vartheta, \vartheta' \in [0, \pi]$, y $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$,

$$
C_T(\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi') = E\left[T(\vartheta, \varphi) \overline{T(\vartheta', \varphi')} \right] = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \boldsymbol{\mathcal{C}}_l \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \overline{Y_l^m(\vartheta', \varphi')}.
$$

En particular, el operador integral $\mathcal{C}_T$, con núcleo C_T, es un operador traza, cuyo espectro puntual, el espectro angular de T, satisface

$$
\sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \boldsymbol{\mathcal{C}}_l = \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l < \infty.
$$

En este contexto, se han derivado resultados no centrales del límite, bajo dominio fijo (*fixed domain asymptotics*), cuando el comportamiento asintótico del espectro angular del campo aleatorio esférico, Gaussiano e isotrópico, subyacente obedece una ley potencial. La introducción de distribuciones de probabilidad límite alternativas, diferentes a la Gaussiana, tales como la distribución de *Rosemblatt esférica*, se obtiene bajo reescalamientos apropiados, dependientes del parámetro que caracteriza la caída potencial del espectro angular. Nótese que la velocidad de caída del espectro angular de la familia de campos aleatorios analizada en Marinucci y Peccati [191] es superior a la desplegada por la ley potencial negativa, asegurando la convergencia a la distribución Gaussiana, bajo condiciones apropiadas.

Resultados similares se obtienen, bajo ambas aproximaciones (adoptadas en la derivación de teoremas centrales y no centrales de límite), para campos aleatorios isotrópicos sobre $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, $V = \{V(\theta);\ \theta \in [0, 2\pi)\}$, satisfaciendo $V(\theta) = V(x\theta)$, $x \in \mathbb{T}$, y siendo $E[|V(\theta)|^2] = 1$. De nuevo, la herramienta de trabajo fundamental es la expansión ortogonal, tipo Karhunen-Loéve, en términos de exponenciales complejas del campo aleatorio V (ver Ejemplo 5.8 en [191]):

$$
\begin{aligned}
&V(\theta) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \exp(il\theta) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l p_l(\theta) \\
&a_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} V(\theta) \exp(-il\theta)\, d\theta, \quad E[a_l] = 0, \quad l \geq 0. \\
&\Gamma_l^V = E|a_l|^2 = E\left[\mathrm{Re}(a_l)\right]^2 + E\left[\mathrm{Im}(a_l)\right]^2 = \frac{\Gamma_l^V}{2} + \frac{\Gamma_l^V}{2} \\
&E[|V(\theta)|^2] = 1 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Gamma_l^V, \quad \Gamma_l^V = \Gamma_{-l}^V, \quad l \geq 0.
\end{aligned}
$$

Es bien conocido que el sistema $\{p_l;\ l \in \mathbb{Z}\}$, siendo $p_l(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(il\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $l \in \mathbb{Z}$, constituye una base ortonormal de $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi))$ (ver, por ejemplo, D. L. Russell [303], o bien, más recientemente, los contenidos de la Sección 2.2 en [191]). Al igual que en la esfera, en el caso Gaussiano, la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $\{a_l;\ l \in \mathbb{Z}\}$ está determinada por las componentes del espectro angular $\left\{\Gamma_l^V,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como resultados previos, se destacarán los obtenidos en el trabajo de N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina [175], donde adoptando una aproximación *increasing domain asymptotics*, se obtienen resultados límite para el primer funcional de Minkowski $M_0(\nu)$ de un campo aleatorio Gaussiano homogéneo e isotrópico sobre $\mathbb{R}^n$, restringido a la esfera $n-1-$dimensional. Se extienden así los resultados reflejados en [252] y [367]. (Ver también M. D. Ruiz-Medina y R. M. Crujeiras [291], donde se derivan resultados límites, bajo *fixed domain asymptotics*, en el dominio *wavelet*).

Las metodologías adoptadas, en ambas aproximaciones, *increasing domain asymptotics* y *fixed domain asymptotics*, son diferentes. Específicamente, en el primer caso (*increasing domain asymptotics*), se analiza el comportamiento asintótico, en las frecuencias bajas, del espectro continuo asociado al núcleo de covarianza, homogéneo e isotrópico, definido mediante una función radial sobre $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, en el segundo caso (*fixed domain asymptotics*), se explotan las propiedades asintóticas (velocidad de caída) del espectro angular (o espectro puntual) del operador compacto, definido mediante el operador integral de covarianza. En ambos casos, la distribución de probabilidad, y, en particular, los momentos y cumulantes de la integral estocástica múltiple de Wiener-Itô, introducidos a través del *Wiener Chaos*, juegan un papel fundamental (ver [170]).

Las líneas de trabajo anteriormente descritas forman parte de mi investigación actual, desarrollada en colaboración con el Profesor N. N. Leonenko (Cardiff University). La complejidad de esta línea de investigación, en particular, su doble vertiente teórica y aplicada, la posiciona en un lugar destacado dentro de mi trayectoria, ofreciendo diversos problemas abiertos y retos por cubrir. Esperemos poder contribuir más ampliamente en un futuro no muy lejano a este fascinante campo de investigación.

Campos Aleatorios Generalizados

Esta clase de campos aleatorios constituye una herramienta clave en el desarrollo de la Física de Campos Cuánticos. La teoría de campos aleatorios generalizados ha sido ampliamente aplicada en el estudio de propiedades de regularidad local y en el análisis probabilístico y estadístico infinito-dimensional. Según comentaré con más detalle posteriormente, en el contexto Gaussiano, esta teoría nos ha permitido la introducción de modelos más flexibles, que extienden los modelos clásicos, incluyendo, entre otros, los modelos autosimilares y los campos aleatorios Gaussianos, que satisfacen ecuaciones pseudodiferenciales fraccionarias estocásticas. Por otra parte, es bien conocido el interés que despierta el estudio de ecuaciones cinéticas fraccionarias, permitiendo la modelización de procesos de transporte anómalo, subdifusiones o superdifusiones, que incluyen modelos más generales, tales como como el Movimiento Browniano Fractal y los procesos de Lévy.

Breve reseña histórica

Los orígenes de esta teoría se encuentran en los trabajos de A. M. Yaglom [372] y I. M. Gel'fand y N. Ya Vilenkin [113], quienes establecen un contexto matemático apropiado para el desarrollo de la teoría de funciones aleatorias generalizadas (ver también R.L Dobrushin y R. A. Minlos [83]; K. Ito [137]; [138]; E. Nelson [218]; [219]; A.M. Yaglom [373]).

La integral estocástica múltiple juega un papel fundamental en la construcción de este tipo de campos, cuya introducción data de principios del siglo XX, destacando los trabajos de K. Itô [136] y N. Wiener [341]. Más tarde, los resultados de A. Plikusas [239] contribuyen a la caracterización de la distribución de probabilidad de integrales estocásticas múltiples, mediante la derivación de cotas para sus cumulantes. Un análisis más detallado de las propiedades de dichas integrales se derivó posteriormente, en los trabajos de D. D. Engel [92] y P. Major [189]. Ver también la revisión bibliográfica sobre procesos autosimilares y dependencia de largo rango, en el volumen de M. S. Taqqu [317] y, más recientemente, la monografía de G. Peccati y M. S. Taqqu [234], sobre momentos y cumulantes de la integral estocástica múltiple de Wiener-Itô, en conexión con la construcción isométrica del *Wiener Chaos*. Especial interés despertó el estudio de las propiedades de la integral estocástica múltiple respecto a medidas de Poisson (ver, por ejemplo, D. Surgailis [312]; [313]). La aplicación de las herramientas proporcionadas por la teoría de campos aleatorios generalizados al análisis infinito-dimensional de propiedades muestrales y propiedades de segundo orden se observa, en los primeros trabajos de S. Berman [36]; [37], P. Lévy [184], A. V. Skorokhod [308], P. Strait [311] y M. I. Yadrenko [353]; [362]), entre otros.

Campos aleatorios generalizados gaussianos fraccionarios

Según he comentado anteriormente, las principales contribuciones de mi primera etapa postdoctoral se ubican en este contexto. La teoría de funciones aleatorias generalizadas, introducida en Gelfand y Vilenkin [113], así como las propiedades de campos aleatorios Gaussiano elípticos, descritas en el libro de Y. A. Rozanov [267], y en el trabajo de A. Benassi, S. Jaffard y D. Roux [35], constituyeron herramientas básicas, en la obtención de los resultados abordados en esta etapa. Nuestro primer paso consistió en la derivación de la factorización del operador de covarianza, bajo la existencia de un campo aleatorio dual generalizado, cuyo espacio del núcleo reproductor (RKHS) es isomorfo a un espacio de Sobolev de orden entero (ver V. V. Anh, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo [16]). Posteriormente, en M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y J. M. Angulo [283], se inicia el análisis de segundo orden de una familia de campos aleatorios generalizados fraccionarios, cuya familia de RKHSs asociada está constituida por elementos isomorfos a los espacios que definen la escala de espacios de Sobolev fraccionarios. En particular, la condición de dualidad garantiza la representación pseudodifferencial fraccionaria de dichos campos, en el espacio

$$\mathcal{L}^2_{H_2^s(D)}(\Omega,\mathcal{A},P)=\left\{\mathcal{X}:(\Omega,\mathcal{A},P)\longrightarrow H_2^s(D);\ E\|\mathcal{X}\|^2_{H_2^s(D)}<\infty\right\}.$$

Un enfoque apropiado se basa en la caracterización de la distribución de dichos campos mediante medidas Gaussianas infinito-dimensionales en el espacio de Sobolev $H_2^s(D)$ de orden $s\in\mathbb{R}$, sobre $\mathbb{R}^n$. Para D un dominio abierto acotado (con frontera regular) en $\mathbb{R}^n$, $\overline{H_2^s(D)}$ denota el espacio de funciones de $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ con soporte contenido en D, y $H_2^s(D)$ contiene las restricciones débiles a D de las funciones en $H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Asimismo, se ha denotado por $\|\mathcal{X}\|_{H_2^s(D)}$ la norma en el espacio $H_2^s(D)$ y por $E[\cdot]$ la esperanza matemática. Los resultados sobre Teoremas *Embeddings* entre espacios de Besov (ver H. Triebel [325]; [326]) nos permitieron, más tarde, obtener la versión fuerte de estas representaciones y su extensión al caso de dominios fractales (ver M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y J. M. Angulo [281]), o bien, con frontera fractal (ver M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y J. M. Angulo [286]).

Los resultados anteriores se aplicaron asimismo al análisis de las propiedades de variación cuadrática media local de la solución de diferentes versiones fraccionarias de la ecuación del calor, con innovaciones aleatorias, y ecuación de Burgers, con condiciones iniciales aleatorias (ver, por ejemplo, J. M. Angulo, V. V. Anh, R. McVinish y M. D. Ruiz-Medina [11]; J. M. Angulo, M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y W. Grecksch [12]; M. Kelbert, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina [150]; M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh [280]; N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y M. Taqqu [176], entre otras contribuciones). Hay que destacar el papel fundamental que jugó, en la metodología adoptada para la derivación de estos resultados, la teoría de espacios de Hölder-Zygmund y los Teoremas de *Embedding*, permitiendo, en particular, la inclusión continua de los RKHSs involucrados, en los referidos espacios de Hölder-Zygmund, proporcionando la formulación fuerte de las propiedades de regularidad local, en el contexto de campos aleatorios fraccionarios Gaussianos elípticos (ver M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V Anh [284]). La extensión de estos resultados al contexto multifraccionario se obtiene en el trabajo de M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh [289].

Recientemente, se ha desarrollado una extensa literatura sobre modelos espacialmente heterogéneos, en el contexto de procesos de transporte anómalo. Una versión estocática de la ecuación pseudodiferencial multifraccionaria, en el espacio, y fraccionaria, en el tiempo, que rige la evolución de estos procesos se introduce en V. V. Anh, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina [14], donde se derivan las propiedades de variación cuadrática media local del campo aleatorio que satisface dicha ecuación, cuando las innovaciones aleatorias siguen una distribución Gaussiana (ver también V. V. Anh, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina [15], donde previamente se estudiaron dichas propiedades para el caso especial de ecuaciones de evolución fraccionarias en el tiempo y en el espacio, con innovaciones aleatorias).

Recuerdo, con especial cariño el inicio de esta etapa, cuando viajé, por primera vez, con el Profesor J. M. Angulo a Brisbane (Australia), para colaborar con el Profesor V. V. Anh de la Queensland University of Technology. *Tampoco, en aquel momento, era consciente de la repercusión, en mi vida profesional y* personal, *de aquel primer viaje, así como de las subsiguientes estancias que llegaron posteriormente. Esta nueva* dimensión de la Ciencia *permitió el inicio, y desarrollo, de diferentes líneas de investigación, junto a mis dos nuevos colaboradores. En esta* *etapa, debo, pues, agradecer, especialmente, a los Profesores J. M. Angulo y V. V. Anh su apoyo y las valiosas cualidades que me transmitieron. Más concretamente, guardo un especial recuerdo del optimismo y entusiasmo del Profesor V. V. Anh ante cualquier problema abierto. Compartiendo este entusiasmo, el Profesor J. M. Angulo ofrecía un* tremendo *espíritu crítico, que dirigía una exhaustiva revisión de cualquier aspecto desarrollado. Claramente, estas cualidades permitieron impulsar la investigación, en esta etapa de mi trayectoria científica. De nuevo, en la etapa más reciente, el Profesor N. N. Leonenko y sus colaboradores cercanos, han contribuido también a los nuevos resultados derivados en el seno de esta línea.*

Campos Aleatorios de Markov. Orígenes

A. Ya Boyarskii [54] describe por primera vez la clase de campos aleatorios Gaussianos homogéneos e isotrópicos satisfaciendo la propiedad de Markov. Algunos ejemplos de campos aleatorios de Markov sobre rejillas espaciales fueron analizados, posteriormente, en el trabajo *On the Theory of Solid Solutions*, publicado en 1949, por I. M. Lifshits [188]. Ejemplos alternativos de campos aleatorios markovianos fueron también examinados en J. Ottaviani [231] y, más tarde, por diversos autores, tales como P. Moran [214]; [214], en el caso biparamétrico. Sin embargo, en la construcción de las bases iniciales de esta teoría, alguno de los postulados realizados no estaban justificados matemáticamente. Asimismo, algunas de las hipótesis asumidas era excesivamente restrictivas, tales como la suposición siempre implícita del carácter analítico de la función de correlación de un campo aleatorio markoviano. Todos estos aspectos ponían de manifiesto la dificultades presentes en la resolución del problema de existencia, y subsiguiente descripción de la clase de campos aleatorios homogéneos e isotrópicos de tipo markoviano. Desde su inicios, la investigación sobre modelos de campos aleatorios markovianos iba acompañada de un especial interés por la detección de los casos degenerados. Así, P. Lévy, en sus trabajos [184]; [185]; [186]; [187], estudia la propiedad de Markov para campos aleatorios con parámetro discreto y continuo, estableciendo el carácter degenerado de los campos aleatorios markovianos con parámetro continuo. M. I. Yadrenko [367], en el Teorema 2 de la

Sección 3 del Capítulo 1 de su libro, establece la descripción exacta de esta singularidad, para campos aleatorios homogéneos e isotrópicos markovianos sobre espacios Euclídeos. Específicamente, se prueba que la clase de campos aleatorios homogéneos e isotrópicos Gaussianos, satisfaciendo la propiedad de Markov, respecto a la familia de todas las esferas concéntricas en cero, es degenerada. Este carácter singular fue previamente establecido por este autor para campos aleatorios isotrópicos sobre la esfera (ver M. I. Yadrenko [352]), y para campos aleatorios homogéneos e isotrópicos sobre espacios finito-dimensionales e infinito-dimensionales de Lobachevsky (ver M. I. Yadrenko, [354]; [354]). Simultáneamente, en el análisis y procesamiento de imágenes, aparecen las primeras contribuciones aplicadas, sobre campos aleatorios markovianos (ver, por ejemplo, E. Wong [344]; [345], quien restringe su atención a la clase de campos aleatorios homogéneos e isotrópicos sobre espacios Euclídeos).

Según he comentado anteriormente, las contribuciones iniciales presentaban limitaciones importantes, referentes a la caracterización de la propiedad de Markov para campos aleatorios sobre parámetro continuo, en relación con la introducción de clases no triviales de campos aleatorios de este tipo. Fueron los trabajos posteriores de G. M. Molchan [211], L. Pitt [238] y Yu A. Rozanov [265], los que proporcionaron una correcta caracterización de la propiedad de Markov, para campos aleatorios Gaussianos homogéneos, a partir de la reformulación del 'presente', en términos de entornos arbitrariamente pequeños de dicha variedad. Paralelamente, aparecen nuevas herramientas, junto a la adaptación adecuada de conceptos clásicos, tales como, las σ-álgebras de separación introducidas en H. P. McKean [195]. Fue precisamente este autor, quien proporciona una versión multiparamétrica del movimiento Browniano. R. L. Dobrushin [81] establece posteriormente la formulación de *strong mixing conditions*, en la caracterización de campos aleatorios markovianos, mediante sus probabilidades condicionadas y propiedades de regularidad local.

Posteriormente, Yu A. Rozanov [267], en su libro publicado en 1982 (ver también su monografía posterior [268]), aborda la formulación débil de la propiedad de Markov en el contexto de campos aleatorios o funciones aleatorias generalizadas. Hasta este momento, solo existían extensiones de casos aislados o ejemplos concretos, sobre la definición de la propiedad de Markov para funciones aleatorias multiparamétricas. Si bien la formulación de la propiedad de Markov, para procesos en el tiempo, establecía una definición precisa del 'presente' puntual, así como del 'pasado' y 'futuro', y por tanto, de la independencia de los comportamientos pasados y futuros, dada la información sobre el comportamiento presente, su extensión al contexto de campos aleatorios no era inmediata. Específicamente, era necesario dar respuesta a una serie de preguntas no triviales sobre la definición del 'presente', 'pasado' y 'futuro', en la caracterización de esta propiedad sobre parámetro multidimensional. En particular, cuando dicho parámetro es continuo, el 'pasado' y el 'futuro' se definen como regiones complementarias arbitrarias, en un dominio apropiado, separadas por una frontera regular. Su extensión al contexto infinito-dimensional se obtiene en términos de funciones aleatorias generalizadas, a partir del concepto de ortogonalidad entre espacios de funciones, que conlleva una división en componentes regulares y singulares del campo aleatorio, que satisface esta propiedad. Su caracterización, en la monografía de Yu A. Rozanov, se formula en términos de la existencia y ortogonalidad del campo aleatorio conjugado. Nótese que estos conceptos así como la introducción de esta propiedad se verifican, en sentido fuerte, solo cuando el campo es Gaussiano, bajo ciertas condiciones de regularidad del núcleo de covarianza, asociado al operador integral de covarianza.

En el presente, la teoría de campos aleatorios de Markov ha experimentado un crecimiento exponencial, constituyéndose en una de las ramas fundamentales, en el desarrollo de la *Teoría Moderna de Campos Aleatorios*. De hecho, sus avances se deben, en parte, a su papel esencial en otras áreas tales como la Física, Biología, Geoestadística y Ciencias de la Computación, entre otras. Por ejemplo, desde sus inicios, ha permitido generar las herramientas necesarias para el desarrollo de la Teoría Física de Campos Cuánticos (ver, por ejemplo, E. Nelson [218]; [219]).

Según he comentado anteriormente, la terminología *campo aleatorio* se adoptó inicialmente en el ámbito de la Física y la Probabilidad, asociada al adjetivo de *Markov*, para hacer referencia a un conjunto de variables aleatorias que poseen la propiedad de Markov descrita por un modelo gráfico no dirigido. Este conjunto es similar a una red bayesiana en su representación de dependencias entre variables aleatorias. Cuando la distribución conjunta de las variables aleatorias es estríctamente positiva se llama también *Campo Aleatorio de Gibbs* porque, según el Teorema de Hammersley-Clifford, puede ser representado por una medida de Gibbs. Como modelo inicial se adopta el modelo de *Ising*, que fue introducido en 1925. De hecho, la modelización mediante campos aleatorios de Gibbs fue desarrollada para obtener un contexto general, donde derivar el modelo de *Ising*. Dada la gran cantidad de fenómenos de interacción espacial que pueden ser estadísticamente descritos por los campos aleatorios de Gibbs, dichos campos han suscitado un gran interés, dentro de la literatura desarrollada sobre campos aleatorios de Markov. El modelo de *Ising* ha sido aplicado en diversas áreas, tales como la Ecología, Mecánica Estadística, Análisis y Procesamiento de Imágenes y Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, entre otras. Mención especial merece la contribución de M. B. Averintsev, en 1972, donde se deriva la caracterización de campos alaetorios markovianos mediante probabilidades condicionadas Gibbsianas. En 1991, V.A. Malyshev y R.A. Minlos [190], en su monografía *Gibbs Random Fields*, introducen las nociones básicas y los diferentes aspectos que intervienen en la estimación de Campos Aleatorios de Gibbs. En particular, describen el esquema general de las expansiones clúster, que proporcionan una nueva y poderosa herramienta de la Física-Matemática, para la descripción de las características locales de campos aleatorios, en términos de un número finito de variables aleatorias del campo o *clustors*.

Aunque los campos aleatorios de Gibbs surgen originalmente como modelos de la Física (ver, por ejemplo, O. Lanford y D. Ruelle [163]; Ch. Preston [253]), no se puede decir que sea menor el interés que suscitan en otras áreas aplicadas. Ejemplos notables son el modelo autologístico (J. Besag [40] [41]) y su extensión al modelo de Potts, a partir del desarrollo de S. Geman y D. Geman [115] y J. Besag [39], con gran repercusión en diversas áreas. Destacaré las aplicaciones relacionadas con el análisis estadístico bayesiano de imágenes, incluyendo la restauración, reconstrucción y detección (ver R. Chellapa y A. Jain [64]; D. Geman [114]), el mapeo de enfermedades (ver, por ejemplo, J. Besag, J. York y A. Mollie. [42]) y el análisis de secuencias biológicas (ver F. L. Bookstein [46]; I. L. Dryden y K. V. Mardia [87]; U. Grenander, Y. Chow y D. Keenan [122], entre otros). También juega un papel destacado el modelo gráfico aleatorio exponencial (ver O. Frank y D. Strauss [103];

S. Wasserman y P. Pattison [339]). Posiblemente, sea el modelo estadístico más popular para el análisis de redes sociales (ver, por ejemplo, G. Robins, P. Pattison, Y. Kalish y D. Lusher [263]). El interés de estos modelos no reside tanto sobre las leyes de Markov que pueden gobernar los datos, sino más bien, sobre su flexibilidad y estabilidad en la modelización. A pesar de su popularidad, los campos aleatorios de Gibbs sufren una grave limitación computacional, ya que requieren una constante normalización de las densidades, lo que conlleva una gran complejidad combinatoria, que generalmente no puede evaluarse y analizarse mediante métodos numéricos estándar. Esto se traduce en un problema central, en el análisis estadístico, derivado de los mismos que involucra la inferencia sobre parámetros, así como la resolución de problemas de selección de modelos. Nótese que este problema se resuelve solo en el caso de mallas o rejillas de baja dimensión, donde se pueden aplicar algoritmos recursivos, tales como el algoritmo recursivo propuesto por R. Reeves y A. N. Pettitt [261] y N. Friel y H. Rue [111], quienes derivan el cálculo exacto de la constante de normalización. El crecimiento exponencial de la complejidad de estos algoritmos, en el tiempo, hace inviable su implementación en rejillas de elevada dimensión. De hecho, se han propuesto en la literatura diversas aproximaciones determinísticas y estocásticas, que pretenden solventar estas dificultades y desarrollar métodos que sean computacionalmente eficientes y precisos. Estos problemas y aspectos relacionados constituyen, en la actualidad, una de las áreas más activas sobre investigación de modelos markovianos.

Martingalas biparamétricas, integración estocástica y ecuaciones diferenciales estocásticas

El estudio de este tipo de campos aleatorios o procesos multiparamétricos data de los años anteriores a la década de los 70 del siglo XX (ver, por ejemplo, la monografía reciente de D. Khoshnevisan [151], donde podemos encontrar una breve reseña bibliográfica sobre este tema). Más concretamente, en los trabajos de R. Cairoli y J. B. Walsh [61] y J. B. Walsh [335]; [336] se formula, en un contexto biparamétrico, el concepto de martingala, integral estocástica, así como las herramientas fundamentales que intervienen en el cálculo estocástico. En la última etapa de mi periodo predoctoral, particularmente, en el trabajo de M. D. Ruiz-Medina y M. J. Valderrama [302], se aplica la definición de martingala biparamétrica en la caracterización de procesos de difusión Gaussianos biparamétricos, a partir de la representación integral estocástica de Wiener-Itô, derivada por D. Nualart y M. Sanz [223].

Entre las primeras formalizaciones de la propiedad de Markov en el plano, se destacan las referidas como *Sharp-Markov property* (ver P. Lévy [183], y R. C. Dalang y J. B. Walsh [73]), *Germ-Markov property* (ver H. P. McKean [195]; L. D. Pitt [238]; H. Kunsch [160]) y $\star$-*Markov* (ver R. Cairoli [60]; H. Korezlioglu, P. Lefort y G. Mazziotto [156]; D. Nualart y M. Sanz [223]). G. Mazziotto [194] establece, más tarde, la inclusión de esta última clase de procesos de Markov en la intersección de las dos clases anteriores. Es decir, los procesos $\star$-*Markov* son también *Sharp-Markov* y *Germ-Markov* (ver también el trabajo reciente de P. Balança [25], donde se puede encontrar una introducción detallada de diferentes extensiones de la propiedad de Markov en campos aleatorios, incluyendo el caso de campos aleatorios cuyos índices se asocian a una familia de conjuntos). Esta área de investigación sigue siendo muy activa. En particular, existen diversas extensiones de estas familias de campos aleatorios, entre las que se destacan: el Movimiento Browniano Multifraccionario (A. Ayache, N. R. Shieh y Y. Xiao [23]); la Hoja Browniana, que extiende el proceso de Wiener al contexto multiparamétrico (R. C. Dalang, E. Nualart, D. Wu, y Y. Xiao [72]); los procesos de Lévy (ver, por ejemplo, D. Khoshnevisan y Y. Xiao [152]); el proceso Browniano bifraccionario (ver C. A. Tudor y Y. Xiao [329], quienes analizan sus propiedades muestrales) y algunas familias especiales de campos aleatorios Gaussianos anisotrópicos (ver Y. Xiao [351], quien deriva las propiedades de regularidad local de las trayectorias).

Las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas constituyen un tema central, de particular relevancia en el análisis estocástico, proporcionando la descripción de la evolución espacio-temporal de los sistemas físicos, sujetos a diferentes fuentes de aleatoriedad. La dinámica caótica de dichos sistemas queda caracterizada, bajo ciertas condiciones, por ecuaciones diferenciales probabilísticas que caracterizan la distribución de probabilidad de la solución aleatoria, compatible con la dinámica del sistema. Más emocionantes aún son las diversas interacciones del cálculo estocástico con la Estadística Matemática (R. Pyke [255]), la Mecánica Estadística (K. Kuroda y H. Manaka [161]) y el análisis y procesamiento de datos sobre el cerebro, neuroimágenes (J. Cao y K. Worsley [62]). En particular, es notable el avance experimentado en la modelización de sistemas de partículas, la dinámica de fluidos y la dinámica de poblaciones, gracias a la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Otra variante del análisis estocástico (muy activa) enfoca sus trabajos a la caracterización probabilística de las soluciones de ecuaciones diferenciales clásicas, tales como las ecuaciones de Navier-Stokes o Boltzman. La modelización de fenómenos que presentan una alta variabilidad da paso a una tercera subárea del cálculo estocástico, los procesos estables, donde se puede encontrar una amplia literatura (ver, por ejemplo, T. Komatsu [154]; G. Samorodnitsky y M. S. Taqqu [304]). El cálculo de Malliavin y el análisis infinito-dimensional (ver D. Nualart [221]) han contribuido, de forma decisiva, al estudio de las propiedades estructurales y el comportamiento de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. Sin embargo, no podemos restringir el interés de esta subárea solo al campo de las aplicaciones físicas, dado que es bien conocido su interés, por ejemplo, en el área de la Ingeniería, donde la teoría del control estocástico ha sido ampliamente aplicada en las telecomunicaciones y en los sistemas de producción. La visión por computadora y las técnicas de búsqueda, a menudo, se basan en métodos de análisis estocástico. Finalmente, muchos algoritmos estocásticos, usados en la práctica, solo pueden estudiarse y analizar su convergencia a partir de las técnicas de análisis estocástico. La modelización estocástica financiera se ha convertido en una herramienta de importancia primordial para los bancos, los seguros y, de hecho, para la mayoría de las grandes corporaciones. Esto ha ocurrido, por un lado, porque los operadores ahora intercambian una amplia variedad de nuevos instrumentos financieros, y porque los nuevos desarrollos teóricos, y las nuevas tecnologías en computación, han hecho posible la implementación de los cálculos matemáticos necesarios para analizar estos instrumentos, mediante los modelos estocásticos.

Dualidad y propiedad de Markov de orden n

La literatura desarrollada en este contexto está especialmente motivada por el problema de filtrado y predicción lineal mínimo-cuadrática, que juega un papel fundamental en la Teoría de Campos Aleatorios, dadas sus múltiples aplicaciones. Nuestra contribución, en esta rama de los procesos multiparamétricos de Markov de orden finito, consiste en su caracterización débil, a partir del concepto de campo aleatorio dual. El parámetro n que interviene en su definición determina el orden del operador diferencial, que define el filtro lineal, mediante el cual se transforma un elemento de la familia caracterizada, en un campo aleatorio de ruido blanco. Por tanto, dicho campo satisface, en media cuadrática y en sentido débil, una ecuación en derivadas parciales estocástica con innovaciones Gaussianas de ruido blanco (ver, por ejemplo, Yu A. Rozanov [267]). Más concretamente, Yu A. Rozanov [267] caracteriza esta propiedad en términos de la ortogonalidad, en el espacio $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, del campo aleatorio conjugado, respecto a un sistema de dominios abiertos acotados (satisfaciendo la propiedad de n-extensión). Más tarde, V. V. Anh, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo [17] derivan una caracterización alternativa, en términos de la ortogonalidad del campo dual, cuando el espacio del núcleo reproductor asociado es isomorfo a un espacio de Sobolev de orden n. Posteriormente, V. V. Anh, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo [288] extienden los resultados anteriores al contexto no Gaussiano y multifraccionario, a partir de los avances de K. Kikuchi y A. Negoro [153], sobre procesos de Markov generados mediante operadores pseudodiferenciales de orden variable (ver N. Jacob y H.-G. Leopold [144]). Más concretamente, se consideran las condiciones de regularidad local y acotación polinomial, sobre el símbolo de un operador pseudodiferencial de orden variable, fuertemente elíptico, que permiten su extensión cerrada sobre el espacio $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dicha extensión es el generador infinitesimal de un semigrupo de Feller, y, por tanto, define las probabilidades de transición de un proceso de Markov.

Realmente, dada su riqueza, la teoría de campos aleatorios markovianos ha cubierto diferentes vertientes de mi investigación, en diferentes etapas, desde mi etapa predoctoral, pasando por los comienzos de mi etapa postdoctoral, hasta la segunda década del siglo XXI. Agradezco de nuevo al Profesor Mariano J. Valderrama, en *mi etapa predoctoral, y a los Profesores J. M. Angulo y V. V. Anh, en mi etapa postdoctoral, su colaboración en estas líneas de investigación.*

Primeros Resultados en el Análisis de las Trayectorias de Campos Aleatorios

Un tema central en la Teoría de Campos Aleatorios, desde sus inicios, es el estudio de las propiedades analíticas de las trayectorias de campos aleatorios. Los primeros resultados en este área fueron derivados en N. N. Chentsov [66], W. Winkler [342] y M. I. Yadrenko [356]. En particular, las propiedades de regularidad local de las trayectorias de campos aleatorios fueron analizadas en G. Hunt [130], quien propone la idea de investigar dichas propiedades, bajo las condiciones de convergencia uniforme de las descomposiciones espectrales (ver también Yu K. Belyaev [31]; [32]; [33]). Posteriormente, V. V. Buldygin y Yu V. Kozachenko [58] y Yu V. Kozachenko y M. I. Yadrenko [157]; [158] explotan estas ideas, que resultan ser extremadamente fructíferas en la investigación del comportamiento local de las trayectorias de campos aleatorios (ver también L. Delporte [78]; N. Jain y M. Markus [145]). En un contexto más abstracto, se derivaron resultados paralelos sobre convergencia uniforme de series de elementos aleatorios en espacios de Banach. Los principales resultados obtenidos en este ámbito, durante las décadas de los 60 y 70 del siglo XX, se resumen en el libro de V. V. Buldygin [57], publicado en 1980, titulado *The Convergence of Random Elements in Topological Spaces* (ver también K. Ito y M. Nisio, [139]).

R. M. Dudley [88] sugiere un interesante método para la construcción del conjunto de separabilidad de un campo aleatorio, que posteriormente se aplica al estudio de las propiedades de regularidad local de sus trayectorias. Más tarde, en 1973, este autor escribiría un *survey*, recogiendo la amplia literatura existente en este área, sobre el análisis local muestral. M. I. Yadrenko [367] aplica el método propuesto por Dudley, en la obtención de una condición suficiente, para la continuidad muestral del campo aleatorio, a partir del orden de variación cuadrática media local de dicho campo. Enfoques, tales como el propuesto por I. A. Ibragimov [133], basado en teoremas *Embedding*, aparecerían posteriormente, contribuyendo al desarrollo del análisis estocástico y funcional de las trayectorias de campos aleatorios (ver E. I. Ottrovskii [232]; Yu V. S. Berman [36]; R. Bernard [38]; H. Watanabe [340]; W. Winkler y O. Frölich [343]; T. Kawada [149]; P. Strair [311]; V. V. Yurinskii [379] y M. I. Yadrenko [357], entre otros).

La geometría de campos aleatorios

Los funcionales no lineales de campos aleatorios Gaussianos de carácter geométrico han jugado un papel fundamental en el desarrollo de otras disciplinas, relacionadas, por ejemplo, con el análisis de rugosidad de superficies (ver A. P. Husu, Yu R. Viterberg y V. A. Palmov [131]), así como con la microgeometría de superficies, para el análisis de interacciones, donde destacan las monografías de Ya A. Rudzit [269] y E. Vanmarcke [331].

Entre las diferentes perspectivas que podrían ser adoptadas en el estudio de la complejidad topológica muestral de los campos aleatorios, todas ellas deben compartir un análisis probabilístico y topológico de las funciones aleatorias que generan sus trayectorias. En este sentido, dos textos claves, en el estudio de la geometría de campos aleatorios, son los libros de R. J. Adler [1] y M. Wschebor [350]. En el primero, titulado *The Geometry of Random Fields*, se recogen los resultados fundamentales derivados por R. J. Adler y sus coautores durante la década de los 70 (siglo XX). La Geometría Diferencial y la Teoría de Morse, en el caso de variedades suaves y sin fronteras, y la Geometría Integral, en el caso variedades estratificadas de Whitney, localmente regulares (que permiten la presencia de bordes y esquinas), constituyen las herramientas fundamentales de este libro, así como de las subsiguientes monografías sobre este tema, escritas por R. J. Adler y J. E. Taylor [2]; R. J. Adler y J. E. Taylor [3]; R. J. Adler, J. E. Taylor y K. J. Worsley [4]. Resultados fundamentales, en el desarrollo de esta teoría, son, por ejemplo, la extensión al contexto de funciones aleatorias multiparamétricas de la fórmula de S. O. Rice [262], sobre el número medio de cruces de un nivel dado 'u' por una función aleatoria uniparamétrica. Dicha extensión suele ser referida como *Gaussian Kinematic Formula*. De hecho, la versión más elegante de esta fórmula, desde un punto de vista geométrico, aparece, por primera vez, en la tesis defendida por E. Taylor [318] en

2001 (ver también [319]), donde se puede decir que comienza la versión más moderna de la geometría de campos aleatorios (ver K. J. Worsley [346]; [347]; [348]; [349]). Herramientas básicas de la Geometría de Campos Aleatorios son, por ejemplo, los conjuntos de excursión (i.e., subconjuntos de variedades suaves, donde los campos aleatorios analizados presentan un determinado comportamiento), el estudio de las llamadas *tube formulae* y la Característica de Euler. En particular, la expansión de la media de la Característica de Euler, en términos de cuantificadores geométricos, tales como los funcionales de Minkowski y las curvaturas de Lipschitz-Killing (con respecto a una métrica de Riemann inducida por un campo aleatorio) son parte de los contenidos abordados en las mencionadas monografías. Paralelamente, J. M. Azäis y M. Wchebor [24] tratan en su libro aspectos complementarios. La etapa metodológica más reciente está marcada por las monografías de R. J. Adler y J. E. Taylor [3], y R. J. Adler, J. E. Taylor y K. J. Worsley [4]. En esta etapa, la topología algebraica juega un papel fundamental en la resolución de problemas más complejos, fuera del contexto Gaussiano, motivados por diversas aplicaciones en diferentes áreas, tales como el Análisis de Neuroimágenes, la Astrofísica y la Oceanografía, entre otras.

Adoptando el enfoque proporcionado en I. A. Ibragimov [133], nuestra investigación, en este ámbito, se ha dirigido al análisis del comportamiento local de las trayectorias de campos aleatorios Gaussianos fraccionarios, derivándose el modulo de continuidad de las trayectorias de dichos campos, bajo las condiciones establecidas en el Teorema 3.3.3 de Adler [1] (ver p. 57), considerando la inclusión continua del espacio del núcleo reproductor en un espacio de Hölder-Zygmund. Estos resultados se recogen, entre otros, en los trabajos J. M. Angulo, M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y W. Grecksch [12], M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh [284] y M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y J. M. Angulo [287], sobre campos aleatorios Gaussianos definidos mediante ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, y M. D. Ruiz-Medina, E. Porcu y R. Fernandez-Pascual [299], sobre familias de campos aleatorios Gaussianos, cuyos núcleos de covarianza presentan un comportamiento local fractal y colas pesadas.

De nuevo agradecer a mis colaboradores el recorrido realizado por esta rama de *la Teoría de Campos Aleatorios Gaussianos, que conecta, en particular, con otras ramas de las Matemáticas, tales como la Geometría y el Análisis Funcional, lo que le confiere un atractivo especial, desde mi perspectiva.*

El Problema de Regresión en Campos Aleatorios

Esta rama de la Teoría de Campos Aleatorios ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de técnicas estadísticas, para la aproximación y el análisis de los valores de campos aleatorios, desde diferentes enfoques, tales como el enfoque paramétrico clásico y bayesiano, enfoque no paramétrico, etc. Una parte importante de dichas técnicas se ha desarrollado en el seno de la Estadística Espacial y Espacio-Temporal. Su interacción con otras disciplinas, tales como la Geofísica, Geoestadística, Medioambiente y Ecología, entre otras, ha permitido la derivación de contribuciones muy transversales, con un importante impacto social.

Estimación, filtrado y predicción lineal

En el ámbito de la Estadística Espacial, originalmente de la Geoestadística, el *kriging*, o la regresión de un campo aleatorio Gaussiano, es un método de interpolación donde se asume que los valores interpolados corresponden a un campo aleatorio Gaussiano, cuyas covarianzas vienen previamente determinadas, o, en su defecto, se estiman mediante un método apropiado. Bajo condiciones adecuadas, el interpolador *kriging* proporciona la 'mejor' aproximación lineal insesgada (de mínima varianza) de los valores intermedios. La base teórica para este método de interpolación fue desarrollada por el matemático francés Georges Matheron en 1960, basada en la tesis de maestría de Danie G. Krige. Krige buscó estimar la distribución más probable del oro, a partir de las muestras recogidas en algunos pozos. (El verbo en inglés es *krige* y el sustantivo más común es *kriging*). Esta técnica también se conoce como *Predicción de Wiener-Kolmogorov*, en memoria de Norbert Wiener y Andrey Kolmogorov. Otras técnicas de interpolación posteriormente utilizadas en la literatura, tales como las técnicas basadas en suavizamiento mediante *spline*, no proporcionan los valores intermedios más probables.

La literatura sobre los problemas de extrapolación y filtrado lineal se desarrolló inicialmente, bajo las condiciones de homogeneidad e isotropía de los campos aleatorios analizados. Destacaré, como trabajos pioneros en esta temática, las contribuciones de Yu D. Popov [245]; [246]; [247]; [248]; [249]; [250]; [251], M. I. Yadrenko [358]; [359]; [360]; [361]; [367], y M. I. Yadrenko y M. G. Al-Mandani [369]. Los principios generales para la construcción de estimadores óptimos de los coeficientes de regresión, así como de los predictores *plug-in* asociados, en la aproximación de los valores de campos aleatorios Gaussianos, se analizan en la extensa literatura desarrollada durante la década de los 70 del siglo XX (ver M. I. Fortus [101]; I. A. Ibragimov y Yu A. Rozanov [134]; M. A. Mirzakhmedov [200]; M. P. Moklyachuk [201]; [202]; [203]; [204]; [205]; [206]; [207]; [208]); M. P. Moklyachuk y M. I. Yadrenko [209]; [210]; M. S. Pinsker [236]; A. G. Ramm [256]; [102]; Ch. Tse-Pei [327]; [328], entre otros).

Nuestros resultados, sobre extrapolación, filtrado e interpolación lineal de campos aleatorios, continúan la línea de trabajo establecida en la monografía de A. G. Ramm [257], bajo el enfoque de *problemas inversos*. Inicialmente, el principal objetivo de nuestra investigación fue la formulación de métodos de regularización, que proporcionaran una estimación lineal mínimo cuadrática estable de un campo aleatorio intrínseco (latente), usualmente dicontinuo, cuya observación se realiza a través de su suavizamiento, mediante un filtro lineal, normalmente definido mediante un operador integral, que generalmente se supone conocido (o bien, podría ser estimado, mediante la aplicación de técnicas espectrales). Dado que dichas observaciones están afectadas por ruido aditivo, se consideran, adicionalmente, técnicas de filtrado, basadas en la teoría de perturbación de operadores lineales, que, en nuestro caso, involucran al operador de covarianza del proceso suavizado u observable y al operador de covarianza del ruido aditivo de observación, que se suele suponer generado por el dispositivo de medición. Los principales enfoques desarrollados se basan en la inversión del filtro lineal mediante aproximaciones *wavelets* truncadas, aplicación de técnicas de proyección numérica basadas en la descomposición *wavelet-vaguelette*, o bien, regularización del problema mediante proyección en bases del RKHS del campo aleatorio observable o suavizado. La teoría de campos aleatorios generalizados juega, en la metodología adoptada, un papel fundamental (ver M. D. Ruiz-Medina [270]; M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo [279]; M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh [282]; M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo, R. Fernández-Pascual [99]; M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo, R. Fernández-Pascual [285]; M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh, R. M. Espejo, J. M. Angulo y M. P. Frías [290], entre otros)

Las líneas de investigación descritas en este apartado se ubican en áreas más aplicadas, que demandan nuevos aspectos metodológicos, más cercanos a la Estadística y la Matemática Aplicada. Paralelamente, se desarrolla la codirección y dirección de mis primeras tesis. Comenzaba así una nueva vertiente, en mi carrera científica, que me acercaba a problemas de impacto más inmediato en el mundo real. Debo, pues, agradecer a mis colaboradores, en particular a mis doctorandos en esta etapa, esta oportunidad de visitar, juntos a ellos, estos nuevos ámbitos de la Ciencia.

Regresión paramétrica no lineal

El concepto de medida espectral de la función de regresión, involucrado en el problema de regresión paramétrica no lineal para campos aleatorios isotrópicos u homogéneos, fue ampliamente utilizado desde los orígenes de esta teoría (ver, por ejemplo, A. V. Ivanov y N. N. Leonenko [141]; N. N. Leonenko y M. I. Yadrenko [180]; [181]). Las propiedades asintóticas de los estimadores paramétricos mínimo-cuadráticos en la regresión no lineal fueron extensivamente estudiadas, bajo observaciones independientes y estacionarias. Uno de los autores más representativos en el desarrollo de este enfoque es el Profesor A. V. Ivanov, quien en su monografía [140], titulada *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*, publicada en 1997, recoge los principales avances en este campo, desde la década de los 70 (siglo XX), en relación con la teoría asintótica y las propiedades estadísticas de este tipo de estimadores paramétricos y predictores *plug-in* asociados.

Los resultados anteriores se extienden al contexto de funciones de regresión cuya medida espectral asociada presenta múltiples singularidades, que no coinciden con las singularidades del espectro del término de error. Dicho término de error se modeliza mediante un funcional no lineal de un campo aleatorio Gaussiano, usualmente homogéneo e isotrópico. En A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y B. M. Zhurakovsky [143] se deriva, bajo condiciones apropiadas, la consistencia y normalidad asintótica del estimador mínimo cuadrático paramétrico de la función de regresión, mediante la aplicación de los resultados límite, previamente obtenidos en A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y I. N. Savich [142]. Posteriormente, M. P. Frías, A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, F. Martínez y M. D. Ruiz-Medina [105] prueban, mediante simulación estocástica, que dichas propiedades se siguen manteniendo, bajo un escenario más amplio, para el espacio de parámetros, que caracteriza la estructura de dependencia fuerte del término de error.

Entre los colaboradores en esta etapa, destaco al Profesor Alexander Ivanov (Kiev University), quien aportó su gran experiencia en este campo, reflejada en su relevante y amplia trayectoria en el ámbito de la regresión paramétrica no lineal.

Estimación Paramétrica de Estructuras de Dependencia Temporal y/o Espacial

Un tema crucial en la estimación paramétrica de campos aleatorios Gaussianos es la caracterización de la singularidad y continuidad absoluta de las medidas de probabilidad infinito-dimensionales inducidas por los mismos. Condiciones generales sobre continuidad absoluta y singularidad u ortogonalidad de medidas Gaussianas, sobre espacios de funciones, fueron inicialmente obtenidas en los trabajos de I. Feldman [95]; [96]; I. I. Gikhman y A. V. Skorokhod [117]; J. Hájek [126]; Yu A. Rozanov [266]; A. V. Skorokhod [307]. Especial atención se concedió a la caracterización de dichas propiedades, en términos de los momentos de segundo orden que definen la distribución de probabilidad infinito-dimensional subyacente. Bajo homogeneidad del campo aleatorio Gaussiano analizado, dicha caracterización se obtiene en términos de la medida espectral que define la transformada de Fourier de la función de correlación (ver, por ejemplo, S. M. Krasnitskii [159]; A. V. Skorokhod y M. I. Yadrenko [309]; M. I. Yadrenko [364]; Z. S. Zekaridze, [381]). En un contexto más general, destacan los trabajos de S. M. Kalandarashvili [147] y M. I. Yadrenko [363], sobre continuidad absoluta de medidas de probabilidad, no necesariamente inducidas por campos aleatorios Gaussianos. No obstante, en el siglo XX, durante las décadas de los 60 y 70, la literatura sobre este tema aún era bastante escasa.

Nuestra contribución en este campo se refleja en el trabajo de M. D. Ruiz-Medina, E. Porcu y R. Fernandez-Pascual [298], donde se extienden los resultados anteriores al contexto de campos aleatorios Gaussianos multivariantes, cuyas componentes se evalúan en un espacio de Hilbert separable. Más concretamente, se establecen las condiciones sobre el espectro continuo matricial infinito-dimensional, que garantizan la equivalencia de las medidas Gaussianas multivariantes infinito-dimensionales asociadas. La aplicación de estos resultados al contexto de la estimación paramétrica, incluyendo las técnicas de estimación basadas en el método de máxima verosimilitud, y, en particular, la estimación por mínimo contraste, suscita gran interés en diferentes áreas, tal es el caso de la Geoestadística Multivariante.

Entre los colaboradores en esta etapa, destaco al Profesor Emilio Porcu (Khalifa University Abu Dhabi), quien nos transmitió su interés por esta línea de investigación, impulsando nuestra colaboración en dicha línea.

Primeros pasos en el contexto de la Estadística Espacio-Temporal

El estudio de propiedades asintóticas de estadísticos para la estimación de campos aleatorios y formulación de contrastes de hipótesis se aborda inicialmente en los trabajos de N. Ya Vilenkin y T. I. Dubenko [333], y M. I. Yadrenko [365]; [366]. Un papel fundamental juegan los resultados obtenidos en relación con la distribución asintótica del máximo, que fue originalmente analizada en los trabajos de Yu K. Belyaev [33], V. I. Piterbarg [237] y P. I. Yuditskaya [377]; [378]. En los capítulos 3 y 4 de la monografía de A. V. Ivanov y N. N. Leonenko [141], se derivan, bajo homogeneidad e isotropía, resultados fundamentales sobre propiedades asintóticas de estimadores de la función media y la función de correlación. Estos últimos, basados en estadísticos más complejos que el correlograma empírico.

Los estadísticos muestrales definidos por las versiones empíricas del correlograma, junto al variogramma (respecto semivariograma), han jugado un papel fundamental en la Estadística Espacial y Espacio-Temporal desde sus orígenes, en particular, en la

Geoestadística (ver B. Matern [192]; G. Matheron [193]). De hecho, con frecuencia, se trabaja con interpoladores y extrapoladores *plug-in*, basados en la estimación previa de la estructuras de dependencia espacial y espacio-temporal subyacentes (ver J. P. Chiles y P. Delfiner [67]; G. Christakos [68]; N. Cressie [71]; H. Wackernagel [334], entre otros).

La Estadística Espacial y la Espacio-Temporal permiten el análisis de datos correlados en el espacio, o bien, en el tiempo y espacio. En este contexto, con frecuencia se debe abordar el análisis de estructuras complejas, de elevada dimensión, que dificultan la aplicación de los enfoques multivariantes clásicos. Gran parte de la literatura, en este ámbito, se centra en la estimación de covarianzas espaciales y espacio-temporales, que modelizan la estructura de dependencia de los datos. En el caso isotrópico y homogéneo, la función de covarianza se caracteriza mediante una función radial. En este contexto, nuestra investigación se ha centrado en la estimación de modelos de covarianza con colas pesadas. Por tanto, la dependencia persiste para grandes distancias en el espacio, o bien, en el espacio y tiempo. En nuestro caso, hemos adoptado un enfoque semiparamétrico, donde dicha velocidad de caída, que obedece una ley potencial, se halla caracterizada por un parámetro, usualmente referido como *parámetro de memoria o parámetro de dependencia de largo rango*. Hemos propuesto diferentes métodos de estimación de dicho parámetro, basados en el periodograma integrado, periodograma *tapered*, aproximaciones *wavelets*, entre otras, según se refleja en los contenidos de los trabajos desarrollados en este contexto (ver, por ejemplo, M. P. Frías, F. Alonso, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo [104]; M. P. Frías y M. D. Ruiz-Medina [106]; [107]; M. P. Frías, M. D. Ruiz-Medina y V. V. Anh [109]; M. D. Ruiz-Medina y M. P. Frías [296]; M. D. Ruiz-Medina y M. P. Frías [108]).

En esta línea de investigación, agradezco de nuevo a mis colaboradores su esfuerzo y compromiso por impulsar este aspecto de la estimación semiparamétrica de estructuras de dependencia de largo rango, cuyo desarrollo relativamente reciente, ha permitido obtener resultados sobre la modelización no markoviana. Su proyección transversal es clara. Aprovecho para agradecer aquí la colaboración con el Profesor F. J. Alonso, junto al Profesor J. M. Angulo en la codirección de la tesis de la

Profesora M. P. Frías.

Campos Aleatorios con Parámetro Discreto y Series Multiparamétricas

Al igual que he reflejado en la literatura inicialmente desarrollada, sobre estimación de campos aleatorios con espacio de parámetros continuo, una de las hipótesis básicas, bajo la cual se deriva un importante volumen de resultados sobre estimación para campos aleatorios con parámetro discreto, es la estacionariedad. Particularmente, he abordado extensivamente la modelización lineal, que incluye las series espaciales autorregresivas y de medias móviles, introducidas, por ejemplo, en S. Basu y G. C. Reinsel [29]. Se ha realizado, en este sentido, un largo recorrido, desde la contribución inicial de R. L. Dobrushin y P. Major [82], donde se encuentran algunos resultados asintóticos sobre la estimación por el método de máxima verosimilitud de esquemas autorregresivos, a partir de resultados límite basados en entropía, hasta los métodos de mínimo contraste, basados en métodos espectrales, descritos, por ejemplo, en la monografía de X. Guyon [125], donde se concede especial atención a la estimación de Whittle (ver X. Guyon [124]; M. Taniguchi [314]). En el caso Gaussiano, el estudio de propiedades asintóticas de predictores óptimos ha sido ampliamente investigado. La especificación de un campo aleatorio lineal no Gaussiano exige la derivación de condiciones de identificabilidad de los coeficientes del filtro que lo caracteriza (ver, por ejemplo, el elegante resultado derivado, en este sentido, por Cheng en su artículo [65] sobre unicidad en la representación de procesos y campos aleatorios lineales no Gaussianos, publicado en el año 1992). La mayor flexibilidad del caso no Gaussiano incrementa su complejidad que desemboca, en la mayor parte de los casos, en predictores óptimos no lineales. En este sentido, destacaremos la monografía [264] de M. Rosenblatt, publicada en el año 2000, donde se realiza una excelente comparativa entre los modelos clásicos lineales de series temporales y los modelos no lineales, respectivamente reflejados en los tratados de P. J. Brockwell y R. A. Davis [56] y H. Tong [321].

Nuestro equipo, adoptando la metodología de estimación de mínimo contraste, basada en el funcional de Ibragimov (ver I. A. Ibragimov [132]), se ha centrado en el problema de estimación paramétrica de *Series Espaciales de Gegenbauer*. Esta familia de modelos se caracteriza por presentar múltiples singularidades en su espectro, extendiendo los modelos espaciales con dependencia de largo rango. El trabajo de A. Olenko [229] ofrece una revisión bibliográfica sobre resultados límite en este contexto, de interés por su aplicación en la modelización y estimación de dependencia de largo alcance en la regresión trigonométrica.

R. M. Espejo, N. N. Leonenko, A. Olenko y M. D. Ruiz-Medina [94] estiman los parámetros de dependencia fuerte, que caracterizan la estructura de segundo orden de series espaciales de Gegenbauer, adoptando la técnica de mínimo contraste, basada en el funcional de Ibragimov. Se prueba la consistencia y la normalidad asintótica de dichos estimadores bajo condiciones apropiadas. Esta metodología de estimación se aplica asimismo, a partir del periodograma *tapered*, en un contexto más general, en el trabajo de H. M. Alomari, M. P. Frias, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, L. Sakhno y A. Torres [6], probando nuevamente la consistencia y normalidad asintótica de los estimadores paramétricos formulados. Un aspecto a resaltar en este trabajo, que le confiere especial interés en sus aplicaciones, versa sobre las condiciones explícitas establecidas sobre los *tapers*, para asegurar las 'buenas' propiedades asintóticas de los estimadores paramétricos formulados. En el caso Gaussiano, se establece un Teorema Central del Límite para funcionales espectrales basados en datos *tapered*, de interés general por su amplio abanico de aplicaciones.

Series y regresión funcional

Según se ha reflejado anteriormente, se desarrolla una amplia literatura sobre campos aleatorios en espacios de funciones, durante las décadas de los 60-80 del siglo XX. Sin embargo, es en la década de los 80 donde se encuentran las primeras contribuciones sólidas sobre técnicas estadísticas y computacionales para el procesamiento de datos de elevada dimensión de naturaleza continua. Dichas contribuciones surgen gracias al desarrollo de las nuevas tecnologías, que permiten una alta densidad de los registros y el acceso a grandes bases de datos. Este hecho motiva el desarrollo de metodologías estadísticas derivadas en el seno de la Inferencia Abstracta, donde los datos y los parámetros desconocidos presentan una elevada dimensión, o bien, poseen dimensión infinita. Una de las primeras contribuciones, en este sentido, es el libro de U. Grenander [121] donde se aborda, en un contexto abstracto, la estimación basada en el método de máxima verosimilitud. En particular, la metodología estadística descrita se implementa cuando los datos son curvas, posiblemente interpoladas a partir de observaciones discretas, o bien, secuencias asociadas con un gran número de ítems. Asimismo, los parámetros suelen ser funciones (p. ej., funciones de distribución, funciones de regresión, funciones de densidad, densidades espectrales, etc.) u operadores (p. ej., operadores de covarianza, correlación, etc.). Posteriormente, J. O. Ramsay [258] acuña el término *Dato Funcional*, y años más tarde, en la monografía J. O. Ramsay and B. W. Silverman [259], se recoge una amplia bibliografía sobre técnicas de análisis de la *Estadística Funcional* para datos curvas, o bien, funciones en general. Los aspectos básicos del análisis de datos funcionales (incluyendo las técnicas usuales de interpolación y suavizamiento), y las técnicas estadísticas inicialmente desarrolladas (incluyendo el modelo lineal funcional), se introducen asimismo en esta monografía. De hecho, entre las ventajas de este tipo de técnicas estadísticas para el análisis de datos curvas, se destaca la incorporación de la información relativa a la regularidad/singularidad local de los datos. Por otra parte, se evitan los problemas de mal condicionamiento, que suelen aparecer en la aplicación de las técnicas de análisis estadístico multivariante a datos de elevada dimensión. Más tarde, aparecen otros enfoques, tales como, el enfoque no paramétrico recogido en la monografía de F. Ferraty y P. View [100], o bien, en la monografía de D. Bosq y D. Blanke [52], para datos correlados en el tiempo, y predicción estadística funcional. El análisis de datos correlados en el tiempo también se aborda desde enfoques más flexibles, sin restricciones estructurales, bajo esquemas de dependencia débil, según se refleja en libro de L. Horváth y P. Kokoszka [129] (ver también A. Goia y P. Vieu [118]).

Centraré el recorrido realizado mediante este discurso, en el contexto de las series infinito-dimensionales, que constituyen una extensión natural de las series multivariantes o vectoriales. Más concretamente, me referiré a la amplia literatura sobre series temporales funcionales lineales, que adoptando la terminología introducida al comienzo de este discurso, definen *campos aleatorios, o equivalentemente, elementos aleatorios dinámicos en espacios de funciones.* En este contexto, destacaré los trabajos pioneros de P. C. Besse y H. Cardot [43], D. Bosq [47]; [48]; [49]; [50]; [51]; F. Merlevéde [196]; [197]; [198]; [198]; [199] y B. Pumo [254], entre otros. En particular, la monografía de D. Bosq [51] recoge los principales resultados en este campo hasta la fecha de su publicación, abordando el tema de invertibilidad de procesos autorregresivos Hilbertianos, estimación paramétrica consistente, basada en los momentos empíricos funcionales y tests de independencia. En esta monografía se recogen asimismo los resultados límite necesarios, sobre elementos aleatorios, para determinar las condiciones que garantizan la consistencia fuerte y la normalidad asintótica de los estimadores derivados. El trabajo paralelamente desarrollado en esta área, así como importantes aspectos de las contribuciones posteriores, se deben, en gran parte, a los colaboradores o miembros del equipo del Profesor D. Bosq, entre los que destacaré a los Profesores S. Guillas, J. M. Marion, A. Mas, F. Mourid, y B. Pumo. Los avances recientes sobre modelización, mediantes series lineales funcionales, permiten, en particular, la inclusión de variables exógenas (ver, por ejemplo, J. Damon y S. Guillas [77]; [77]), así como la consideración de coeficientes aleatorios (ver T. Mourid [216]), en la ecuación de estados que los caracteriza, permitiendo la introducción de modelos de predicción más flexibles.

La extensión de estos modelos al contexto espacial aparece en el artículo de M. D. Ruiz-Medina [271], donde se introducen los modelos espaciales autorregresivos Hilbertianos (SARH), y se derivan las condiciones que aseguran su invertibilidad. La estimación paramétrica, basada en el método de momentos, se aborda posteriormente en M. D. Ruiz-Medina [273]. Actualmente, en este área de trabajo existen diversos problemas abiertos, donde se incluyen, entre otros, la derivación de nuevas técnicas de estimación y predicción, basadas en los modelos SARH, la formulaciones de modelos espaciales infinito-dimensionales más flexibles, el estudio de propiedades asintóticas de los estimadores formulados, etc. (ver, por ejemplo, M. D. Ruiz-Medina [273]). Hasta el momento, los estudios de simulación desarrollados y las aplicaciones con datos reales trabajadas revelan buenas propiedades asintóticas de los estimadores propuestos en M. D. Ruiz-Medina [272], y de sus variantes, diseñadas a partir de la consideración de diferentes bases ortonormales (determinísticas o aleatorias), que permiten el cálculo de estimadores de proyección (ver, por ejemplo, M. D. Ruiz-Medina y R. M. Espejo [292]; [293]; R. M. Fernandez-Pascual, R. M. Espejo y M. D. Ruiz-Medina [97]; R. M. Espejo, R. M. Fernandez-Pascual y M. D. Ruiz-Medina [93], enfocados al análisis de los efectos del cambio climático y el calentamiento global).

Nuestro equipo, recientemente, también ha desarrollado otras aportaciones, junto a diferentes colaboradores, entre los que se encuentra D. Bosq (Universidad Pierre et Marie Curie - Paris VI, Francia), sobre propiedades asintóticas de estimadores y predictores autorregresivos Hilbertianos y Banach-valuados temporales, así como sobre predictores funcionales, basados en extensiones multivariantes y espaciales, del modelo funcional lineal general (ver J. Álvarez-Liébana y M. D. Ruiz-Medina [9];[10]; J. Álvarez-Liébana, D. Bosq y M. D. Ruiz-Medina [7]; [8]; D. Bosq y M. D. Ruiz-Medina [53]; M. D. Ruiz-Medina [274]; M. D. Ruiz-Medina y J. Álvarez-Liébana [276]; [277]; [278]; M. D. Ruiz-Medina y R. M. Espejo [294]; M. D. Ruiz-Medina, R. M. Espejo y E. Romano [295]; M. D. Ruiz-Medina, D. Miranda y R. M. Espejo [297], entre otros).

En M. D. Ruiz-Medina [275] se inicia una nueva línea de investigación, sobre análisis espectral de series funcionales estacionarias con dependencia de largo rango, para el análisis de curvas fuertemente correladas en el tiempo. El enfoque adoptado se aplica en ausencia de restricciones estructurales, y se basa en el análisis espectral funcional, mediante operadores de densidad espectral. Particularmente, se han derivado estimadores paramétricos del operador de memoria larga, débilmente consistentes, a partir de la aplicación de técnicas de estimación funcional, mediante mínimo contraste, basadas en el operador periodograma.

Se destaca la colaboración del Profesor D. Bosq (Universidad Pierre et Marie Curie - Paris VI, Francia). Agradezco la colaboración de mis doctorandos Rosa M. Espejo, Javier Álvarez-Liébana y Doris F. Miranda en las líneas de investigación anteriormente descritas.

Análisis Estadístico Infinito-Dimensional de Patrones Puntuales

Los procesos de Poisson doblemente estocásticos, también llamados procesos de Cox, fueron introducidos por D. R. Cox en [69]. La teoría básica sobre los mismos se puede encontrar en los textos de J. Grandell [120] y D. Stoyan, W. S. Kendall y J. Mecke [310]. Es bien conocido que el campo aleatorio puntual espacial, definido mediante un proceso de Cox log-Gaussiano, proporciona un marco flexible para el análisis de patrones puntuales. En particular, J. Møller, A. R. Syversveen y R. Waagepetersen [212] derivan resultados básicos sobre la estructura probabilística y las propiedades de esta clase de campos. Su análisis estadístico espacial y espacio-temporal ha constituido la temática de diversos trabajos y monografías (ver P. J. Diggle [80]; J. A. González, F. J. Rodríguez-Cortés, O. Cronie y J. Mateu [119], entre otros). Una de las grandes ventajas de este modelo, cuando se supone estacionariedad, es su caracterización mediante los momentos de orden dos del campo aleatorio Gaussiano que define la log-intensidad. Este hecho facilita su tratamiento estadístico, en particular, su uso en diversas áreas aplicadas, como se ilustra, por ejemplo, en los trabajos de S. L. Rathbun y N. Cressie [260] sobre análisis de supervivencia de especies de pinos, y L. Serra *et al.* [305] sobre ocurrencias de incendios forestales. De hecho, en las últimas décadas, se ha desarrollado una amplia literatura, en el seno de la Geoestadística y la Estadística Espacio-Temporal, sobre esta rama de la teoría de campos aleatorios, dado su marcado carácter transversal, que ha permitido importantes avances en diferentes disciplinas (ver, por ejemplo, las monografías de D. Daley y D. Vere-Jones [74]; P. J. Diggle [80]; J. Illian , A. Penttinen , H. Stoyan y D. Stoyan [135]; J. Møller y R. P. Waagepetersen [213]).

Actualmente, nuestra investigación, en este campo, se centra en la construcción y el estudio de propiedades de versiones infinito-dimensionales de la familia referida de campos aleatorios puntuales espaciales. Su análisis estadístico se aborda aplicando técnicas de la Estadística Funcional, o bien, mediante la formulación infinito-dimensional de técnicas usualmente aplicadas en el contexto de patrones aleatorios puntuales vectoriales. Dado, que, en la práctica, las familias de modelos introducidas pueden ser interpretadas como campos aleatorios puntuales vectoriales de dimensión aleatoria, se abre una nueva vía de modelización, más flexible, en la representación simultánea de diferentes tipos ('incluso infinitos tipos') de sucesos, cuya ocurrencia se produce de forma aleatoria en el tiempo o espacio.

Esta línea de trabajo se ha desarrollado a partir de los contenidos de la tesis del Profesor Antoni Torrres, de la Universidad de Málaga, codirigida con la Profesora M. P. Frías, de la Universidad de Jaén. Dicha línea de investigación tiene su origen en una sección del trabajo de D. Bosq y M. D. Ruiz-Medina [53], donde se introducen los procesos de Poisson infinito-dimensionales o evaluados en ℓ^2, y se deriva su estimación y predicción *plug-in* clásica y bayesiana. En nuestros primeros pasos en esta línea de trabajo, más concretamente, en A. Torres, M. P. Frías y M. D. Ruiz-Medina [322], se introducen los procesos de Cox log-Gaussianos en el tiempo, con valores en ℓ^2, cuya intensidad aleatoria se define mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck Hilbert-valuado, aproximado mediante un proceso autorregresivo Hilbertiano de orden uno (ARH(1)). Desde esta aproximación se deriva la estimación paramétrica de la log-intensidad y se resuelve el problema de predicción funcional asociado. Más recientemente, en M. P. Frías, A. Torres, M. D. Ruiz-Medina y J. Mateu [110] se introduce una nueva clase de procesos de Cox, dirigidos mediante una log-intensidad aleatoria espacial Hilbert-valuada. Se aborda el problema de estimación paramétrica fuertemente consistente de la intensidad aleatoria, mediante la aplicación de técnicas espectrales funcionales, más allá del contexto log-Gaussiano. Posteriormente, A. Torres, M. P. Frías, J. Mateu y M. D. Ruiz-Medina [323] analizan, en términos de la transformada *wavelet* discreta, las heterogeneidades temporales de esta clase de procesos introducida, restringiendo su atención al caso de procesos de Cox log-Gaussianos. Finalmente, A. Torres, M. P. Frías y M. D. Ruiz-Medina [324] derivan técnicas de predicción funcional para patrones puntuales, caracterizados mediante medidas aleatorias de recuento, basadas en la familia de procesos de Cox, dirigidos mediante log-intensidades aleatorias temporales Hilbert-valuadas. Las técnicas de predicción propuestas se basan en la regresión paramétrica no lineal y las series temporales multivariantes, incorporando información muestral blanda. Su comparativa con las técnicas de *Machine Learning* ponen de manifiesto su capacidad predictiva en el análisis de datos de mortalidad por COVID-19.

Agradezco en esta última etapa la colaboración del Profesor Jorge Mateu de la Universidad Jaume I *en Castellón. Destaco la labor de mi doctorando más reciente, el Profesor Antoni Torres-Signes de la Universidad de Málaga, cuya tesis doctoral ha sido recientemente finalizada. Realmente, agradezco a Antoni Torres-Signes su disponibilidad, su perseverancia y, aunque en momentos ha resultado una dura experiencia, no ha dejado de ser por ello menos gratificante.*

Después de este breve recorrido por algunas de las ramas más frecuentadas, en la literatura sobre la Teoría de Campos Aleatorios, y, para finalizar, me gustaría hacer una breve y sincera reflexión, en relación con la frase de Andrey Nikolaevich Kolmogorov, con la que se inicia este discurso, cuya contribución, según hemos visto, ha sido fundamental en esta teoría:

Todo matemático cree que está por delante de todos los demás. La razón por la que no lo dicen en público, es porque son gente inteligente.

Tras leer esta frase, siguiendo la afirmación de Andrey Nikolaevich Kolmogorov, muy probablemente yo no sea *una auténtica Matemática*. Sí puedo afirmar que las Matemáticas han ocupado gran parte de mi vida, dada mi dedicación *continua* y *diaria*. También confieso que mi renuncia a otros aspectos de la vida solo me ha permitido acceder a la *escala intermedia*, y no sé cuánto tiempo me queda, y cuándo llegaré a la escala de Kolmogorov, donde la energía se disipa y esta *inercia* por el trabajo, junto al afán de superación desaparecen. Solo espero que el apoyo y ayuda de la familia y amigos no desaparezca en todas mis *escalas* o *etapas* futuras. Su respeto y sacrificio, ha hecho posible el desarrollo de mi actividad, en muchas ocasiones renunciando a muchos momentos, que podríamos haber compartido, o simplemente, prolongado. Por todo ello, mi mayor gratitud a mis padres, hermanas y, como no, a mis hijas, M. Esther y Alba, y a José Miguel, quienes me han sufrido, y han compartido el difícil *Rango Inercial* de estas escalas.

Con la premisa de mantener mi dedicación e inquietud por la Ciencia, así como fomentar su desarrollo e interés en las nuevas generaciones, intentaré responder a la confianza que la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales ha depositado en mí con este nombramiento.

Muchas gracias.

Referencias

[1] R. J. Adler (1981). *The Geometry of Random Fields.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, Chichester, UK.

[2] R. J. Adler y J. E. Taylor (2007). *Random Fields and Geometry. Springer Monographs in Mathematics.* Springer, New York.

[3] R. J. Adler y J. E. Taylor (2011). *Topological Complexity of Smooth Random Functions.* Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg.

[4] R. J. Adler, J. E. Taylor y K. J. Worsley (2011). *Applications of Random Fields and Geometry: Foundations and Case Studies.* Springer-Verlag, New York.

[5] S. Albeverio y R. H∅egh-Krohn (1975). Homogeneous random fields and statistical mechanics. *Journal of Functional Analysis* **19**, 242-272.

[6] H. M. Alomari, M. P. Frías, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, L. Sakhno y A. Torres (2017). Asymptotic properties of parameter estimates for random fields with tapered data. *Electronic Journal of Statistics* **11**, 3332-3367.

[7] J. Álvarez-Liébana, D. Bosq y M. D. Ruiz-Medina (2016). Consistency of the plug-in functional predictor of the Ornstein-Uhlenbeck in Hilbert and Banach spaces. *Statistics & Probability Letters* **117**, 12-22.

[8] J. Álvarez-Liébana, D. Bosq y M. D. Ruiz-Medina (2017). Asymptotic properties of a componentwise ARH(1) plug-in predictor *Journal of Multivariate Analysis* **155**, 12-34.

[9] J. Álvarez-Liébana y M. D. Ruiz-Medina (2017). The effect of the spatial domain in FANOVA models with ARH(1) error term. *Statistics and Its Interface* **10**, 607-628.

[10] J. Álvarez-Liébana y M. D. Ruiz-Medina (2019). Prediction of air pollutants PM10 by ARBX(1) processes. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **33**, 1721-1736.

[11] J. M. Angulo, V. V. Anh, R. McVinish y M. D. Ruiz-Medina (2005). Fractional Kinetic equation driven by gaussian or infinitely divisible noise. *Advances in Applied Probability* **37**, 366-392.

[12] J. M. Angulo, M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y W. Grecksch (2000). Fractional diffusion and fractional heat equation. *Advances in Applied Probability* **32**, 1077-1099.

[13] V. V. Anh, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2013). Macroscaling limit theorems for filtered spatiotemporal random fields. *Stochastic Analysis and Applications* **31**, 460-508.

[14] V. V. Anh, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2016). Space-time fractional stochastic equations on regular bounded open domains. *Fractional Calculus and Applied Analysis* **19**, 1161-1199.

[15] V. V. Anh, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2016). Fractional-in-time and multifractional-in-space stochastic partial differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis* **19**, 1434-1459.

[16] V. V. Anh, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo (2000). Covariance factorisation and abstract representation of generalised random fields. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **62**, 319-334.

[17] V. V. Anh, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo (2001). Differential representation and Markov property of generalized random fields. *Stochastic Analysis and Applications* **19**, 481-498.

[18] M. A. Arcones (1994). Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary sequence of vectors. *Ann. Probab.* **22**, 2242-2274.

[19] M. B. Averintsev (1972). Description of markovian random fields by Gibbsian conditional probabilities. *Theory Prob. Applications* **1**, 20-33.

[20] F. Avram (1992). Generalized Szegö theorems and asymptotics of cumulants by graphical methods. *Trans Am Math Soc.* **330**, 637-649.

[21] F. Avram y L. A. Brown (1989). Generalized Hölder inequality and a generalized Szegö Theorem. *Proc. Am. Math. Soc.* **107**, 687-695.

[22] F. Avram y R. Fox (1992). Central limit theorems for sums of Wick products of stationary sequences. *Trans Am Math Soc.* **330**, 651-663.

[23] A. Ayache, N. R. Shieh y Y. Xiao (2011). Multiparameter multifractional Brownian motion: Local nondeterminism and joint continuity of the local times. *Annales de l Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques* **47**, 1029-1054.

[24] J. M. Azäis y M. Wchebor (2009). *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields.* John Wiley & Sons Inc., Hoboken.

[25] P. Balança (2012). A increment type set-indexed Markov property. arXiv:1207.6568.

[26] N. Bartolo, M. Fasiello, S. Matarrese y A. Riotto (2010). Large non-Gaussianities in the effective field theory approach to single-field inflation: the bispectrum. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1008:08, arXiv: 1004.0893.

[27] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese y A. Riotto (2004). Non-Gaussianity from inflation: theory and observations. *Physical Reports* **402**, 103-266.

[28] N. Bartolo, S. Matarrese y A. Riotto (2010). Non-Gaussianity and the cosmic microwave background anisotropies. arXiv:1001.3957.

[29] S. Basu y G. C. Reinsel (1993). Properties of the spatial unilateral first-order ARMA model. *Adv. Appl. Probab.* **25**, 631-648.

[30] H. Bateman y A. Erdelyi (1953). *Higher Trascendental Functions.* McGraw-Hill, Estados Unidos.

[31] Yu K. Belyaev (1958). On the unboundedness of the sample functions of Gaussian processes. *Theory Prob. Applications* **3**, 327-329.

[32] Yu K. Belyaev (1959). Analytic random processes. *Theory Prob. Applications* **4**, 402-409.

[33] Yu K. Belyaev (1960). Local properties of the sample functions of stationary Gaussian processes. *Theory Prob. Applications* **1**, 117-120.

[34] Yu K. Belyaev (1970). Distribution of the maximum of a random field and its application to reliability problems. *Izv. AN SSSR, Tekhn. Kibernetika* **2**, 77-84.

[35] A. Benassi, S. Jaffard y D. Roux (1997). Elliptic Gaussian random processes. *Revista Matemática Iberoamericana* **13**, 19–90.

[36] S. Berman (1968). Some continuity properties of Brownian motion with the time parameter in a Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **131**, 182-198.

[37] S. Berman (1969). Second order random fields on ℓ^p. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **12**, 107-126.

[38] R. Bernard (1970). Quelques proprétés des trajectories des fonctions aléatoires stable sur R^k. *Ann. Institut Henri Poincaré, Sec. B* **6**, 131–151.

[39] J. Besag (1986). On the statistical analysis of dirty pictures (with discussion). *J. Royal Statist. Soc.* Series B **48**, 259–302.

[40] J. Besag (1972). Nearest–neighbourhood systems and the auto–logistic model for binary data. *J. of the Royal Statist. Soc. Series B* **34**, 75–83.

[41] J. Besag (1974). Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **36**, 192–236.

[42] J. Besag, J. York y A. Mollie (1991). Bayesian image restoration with two applications in spatial statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.* **43**, 1–59.

[43] P. C. Besse y H. Cardot (1996). Approximation spline de la prévision d'un processu fonctionnel autoregréssif d'ordre 1. *Canad. J. Statist.* **24**, 467–487.

[44] N. Bingham (2000). Studies in the history of probability and statistics XLVI. Measure into probability: from Lebesgue to Kolmogorov. *Biometrika* **87**, 145-156.

[45] A. Blanc–Lapierre y P. Faure (1965). Stationary and isotropic random functions. En el volumen especial de *Bernoulli*, en el aniversario Bayes y Laplace. Springer-Berlín, Heidelberg.

[46] F.L. Bookstein (1991). *Morphometric Tools for Landmark Data: Geometry and Biology.* Cambridge University Press, New York.

[47] D. Bosq (1991). Modelization, non–parametric estimation and prediction for continuous time processes. *Nonparametric Functional Estimation and Related Topics, NATO, ASI Series* **335**, 509–529.

[48] D. Bosq (1996). Limit theorems for Banach-valued autoregressive processes. Applications to real continuous time processes. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **3**, 537–555.

[49] D. Bosq (1999a). Autoregressive representation for the empirical covariance operator of an ARH(1). *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329**, 531–534.

[50] D. Bosq (1999b). Autoregressive Hilbertian processes. *Ann. I. S. U. P.* **43**, 25–55.

[51] D. Bosq (2000). *Linear Processes in Function Spaces.* Springer, New York.

[52] D. Bosq y D. Blanke (2007). *Inference and Prediction in Large Dimensions.* Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Queensland, Australia.

[53] D. Bosq y M. D.Ruiz–Medina (2014). Bayesian estimation in a high dimensional parameter framework. *Electronic Journal of Statistics* **8** 1604–1640.

[54] A.Ya Boyarskii (1941). On geometric correlation. *Izvestia Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser Matem.* **5**, No.2.

[55] R. Breuer y P. Major (1983). Central limit theorems for nonlinear functionals Gaussian fields. *J. Multivariate Anal.* **13**, 425–441.

[56] P. J. Brockwell y R. A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods. Springer Series in Statistics.* Springer, New York.

[57] V. V. Buldygin (1980). *The Convergence of Random Elements in Topological Spaces*. Kiev, Naukova Dumka, Rusia.

[58] V. V. Buldygin y Yu V. Kozachenko (1974). On local properties of realizations of some random processes and fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **10**.

[59] A. V. Bulinskii e I. G. Zhurbenko (1976). A central limit theorem for additive random functions. *Theory Prob. Applications* **4**, 687–697.

[60] R. Cairoli (1971). Une classe de processus de Markov. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **273**, A1071–A1074.

[61] R. Cairoli y J. B. Walsh (1975). Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.* **134**, 111–183.

[62] J. Cao y K. Worsley (1999). The geometry of correlation fields with an application to functional connectivity of the brain. *Ann. Appl. Probab.* **9**, 1021–1057.

[63] D. Chambers y E. Slud (1989). Central limit theorems for nonlinear functionals of stationary Gaussian processes. *Probab. Theory Related Fields* **80** 323–346.

[64] R. Chellapa y A. Jain (1993). *Markov Random Fields: Theory And Application*. Academic Press, Boston.

[65] Q. Cheng (1992). On the unique representation of non–Gaussian linear processes. *The Annals of Statistics* **20**, 1143–1145

[66] N. N. Chentsov (1957). Lévy Brownian motion for several parameters and generalized white noise. *Theory Prob. Applications* **2**, 265–266.

[67] J. P. Chiles y P. Delfiner (1999). *Geostatistics, Modelling Spatial Uncertainty*. Wiley–Interscience.

[68] G. Christakos (1992). *Random Field Models in Earth Sciences*. Dover Publications, New York.

[69] D. R. Cox (1955). Some statistical methods connected with series of events. *J. R. Statist Soc B* **17**, 129–164.

[70] H. Cramer (1976). Half a century with probability theory: some personal recollections. *The Annals of Probability* **4** 509–546.

[71] N. Cressie (1993). *Statistics for Spatial Data*. Wiley. Interscience

[72] R. C. Dalang, E. Nualart, D. Wu, y Y. Xiao (2011). Critical Brownian sheet does not have double points. *Ann. Probab.* **40**, 1829–1859.

[73] R. C. Dalang y J. B. Walsh (1992). The sharp Markov property of the Brownian sheet and related processes. *Acta Math* **168**, 153–218.

[74] D. Daley y D. Vere-Jones (2008). *An Introduction to the Theory of Point Processes Vol II: General Theory and Structure 2nd Edition*. Springer-Verlag, New York.

[75] J. Damon y S. Guillas (2002). The inclusion of exogenous variables in functional autoregressive ozone forecasting. *Environmetrics* **13**, 759–774.

[76] J. Damon y S. Guillas (2005). Estimation and simulation of autoregressie Hilbertian processes with exogenous variables. *Stat. Inference Stoch. Process.* **8**, 185–204.

[77] J. Damon y S. Guillas (2005). Estimation and simulation of autoregressie Hilbertian processes with exogenous variables. *Stat. Inference Stoch. Process.* **8**, 185–204

[78] L. Delporte (1966). Fonstions aléatoires des deux variables. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **6**.

[79] P. Diaconis (1988). *Group Representations in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes-Monograph Series, 11, Hayward.

[80] P. J. Diggle (2013). *Statistical Analysis of Spatial and Spatio–Temporal Point Patterns*. Taylor & Francis, Boca Raton.

[81] R. L Dobrushin (1968). The description of random fields by their conditional probabilities and regularity conditions. *Theory Prob. Applications***13**, 197–224.

[82] R. L. Dobrushin y P. Major (1979). Non–central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **50**, 27–52.

[83] R. L Dobrushin y R. A. Minlos (1976). *The Investigation of Properties of Generalized Gaussian Random Fields*. En *Zadachi Mekhaniki i Matem. Fiziki*. Nauka, Moscow.

[84] J. L. Doob (1990). *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons Inc, New York.

[85] J. L. Doob (1996). The Development of Rigor in Mathematical Probability (1900-1950). *The American Mathematical Monthly* **103**, 586–595.

[86] P. Doukhan, G. Oppenheim y M. S. Taqqu (2003). *Theory and Applications of Long Range Dependence*. Birkháüser, Boston.

[87] I. L. Dryden y K. V. Mardia (1998). *Statistical Shape Analysis. Wiley Series in Probability and Statistics*. John Wiley & Sons, Cichester, New York.

[88] R. M. Dudley (1965). Gaussian processes on several parameters. *Ann. Math. Statist.* **36**, No. 4.

[89] A. Einstein (1910). On the theory of light quanta and the question of localization of electromagnetic energy. *Archives des Sceiences Physiques et Naturelles* **29**, 525-528

[90] A. Einstein y L. Infeld (1961). *Evolution of Physics: The Growth of Ideas from Early Concepts to Relativity and Quanta*. Simon and Schuster, New-York.

[91] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Phys. Rev.* **47**, 777-780.

[92] D. D. Engel (1982). The multiple stochastic integral. *Mem. Amer. Math. Soc.* **38**, 1-82.

[93] R. M. Espejo, R. Fernández-Pascual y M. D. Ruiz-Medina (2017). Spatial-depth functional estimation of ocean temperature from non-separable covariance models. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **31**, 39-51.

[94] R. M. Espejo, N. N. Leonenko, A. Olenko y M. D. Ruiz-Medina (2015). On a class of minimum contrast estimators for Gegenbauer random fields. *Test* **24**, 657-680.

[95] I. Feldman (1958). Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes. *Pacific J. of Math.* **8**.

[96] I. Feldman (1960). Some classes of equivalent Gaussian processes on an interval. *Pacific J. of Math* **10**.

[97] R. M. Fernández-Pascual, R. M. Espejo-Montes y M. D. Ruiz-Medina (2016). Moment-based and Bayesian wavelet regresión estimation of spatially correlated depth ocean temperature curves with spatial functional covariates. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **30**, 523-557.

[98] R. Fernández-Pascual, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo (2004). Wavelet-based functional reconstruction and extrapolation of fractional random fields. *Test* **13**, 417-444.

[99] R. Fernández-Pascual, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo (2006). Estimation of intrinsic processes affected by additive fractal noise. *Journal of Multivariate Analysis* **97**, 1361-1381.

[100] F. Ferraty y P. Vieu (2006). *Nonparametric Functional Data Analysis: Theory and Practice.* Springer, New York.

[101] M. I. Fortus (1962a). Formulas for extrapolation of random fields. *Theory Prob. Applications* **1**, 101-108.

[102] M. I. Fortus (1962b). On the engineering problem of statistical extrapolation of meteorological fields. *Izvestia Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser.Geofiz* **6**.

[103] O. Frank y D. Strauss (1986). Markov graphs. *Journal of the American Statistical Association* **81**, 832-842.

[104] M. P. Frías, F. J. Alonso, M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo (2008). Semiparametric estimation of spatial long-range dependence. *Journal of Statistical Planning and Inference* **138**, 1479-1495.

[105] M. P. Frías, A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, F. Martínez y M. D. Ruiz-Medina (2017). Detecting hidden periodicities for models with cyclical errors *Statistics and Its Interface* **10**, 107-118.

[106] M. P. Frías y M. D. Ruiz-Medina (2011). Computing functional estimators of spatiotemporal long-range dependence parameters in the spectral-wavelet domain *Journal of Statistical Planning and Inference* **141**, 2417-2427.

[107] M. P. Frías y M. D. Ruiz-Medina (2012). Filtering and functional parameter estimation of spatiotemporal strong-dependence models *Journal of Environmental Statistics* 3 (Issue 2).

[108] M.P. Frías y M.D. Ruiz-Medina (2016). Wavelet nonparametric estimation from strong spatial correlated high dimensional data *Spatial Statistics* **18**, 363-385.

[109] M. P. Frías, M. D. Ruiz-Medina y V. V. Anh (2013). Wavelet-based estimation of anisotropic spatiotemporal long-range dependence. *Stochastic Analysis and Applications* **31**, 359-380.

[110] M.P. Frías, A. Torres-Signes, J. Mateu y M.D. Ruiz-Medina (2021). Spatial Cox processes in an infinite-dimensional framework. *Test* DOI:10.1007/s11749-021-00773-z.

[111] N. Friel y H. Rue (2007). Recursive computing and simulation-free inference for general factorizable models. *Biometrika* **94**, 661-672.

[112] B. F. Gaposhkin (1977). Criteria for the strong law of large numbers for some classes of second-order stationary processes and homogeneous random fields. *Theory Prob. Applications* **2**.

[113] I. M. Gel'fand y N. Y. Vilenkin (1964). *Generalized Functions.* Academic Press, New York, Volumen 4.

[114] D. Geman (1990). *Random Fields and Inverse Problems in Imaging.* En P.L. Hennequin, editor, Ecole d'Ete de Probabilite de Saint-Flour XVII-1988. Vol. 1427 *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 113-119. Springer Verlag, New York.

[115] S. Geman y D. Geman (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. PAMI* **6**, 721-741.

[116] I. I. Gikhman y A. V. Skorokhod (1969). *Introduction to the Theory of Random Processes*. Courier Corporation.

[117] I. I. Gikhman y A. V. Skorokhod (1974-1979).*The Theory of Stochastic Processes*. Springer-Verlag, New York.

[118] A. Goia y P. Vieu (2016). An introduction to recent advances in high/infinite dimensional statistics. *Journal of Multivariate Analysis* **146**, 1-6.

[119] J. A. González, F. J. Rodríguez-Cortés, O. Cronie y J. Mateu (2016). Spatio-temporal point process statistics: A review. *Spat Stat* **18**, 505-544.

[120] J. Grandell (1976). *Doubly Stochastic Process*. Springer-Verlag, New York.

[121] U. Grenander (1981). *Abstract Inference. Probability & Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons Inc, U. S. A.

[122] U. Grenander, Y. Chow y D. Keenan (1991). *Hands. A Pattern Theoretic Study of Biological Shapes. Research Notes in Neural Computing.* Volume 2. Springer Verlag, New York.

[123] R. Gutiérrez-Jáimez, M. D. Ruiz-Medina y M. J. Valderramna Bonet (1993). Problemas de representación y predicción sobre el proceso de Ornstein-Uhlenbeck multiparamétrico. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **87**, 285-297.

[124] X. Guyon (1982). Parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice. *Biometrika* **69**, 95-105.

[125] X. Guyon (1995). *Random Fields on a Network*. Springer-Verlag, New York.

[126] J. Hájek (1958). On a property of normal distribution of any stochastic process. *Czechoslovak Math. J.* **8**, 610-618.

[127] E. J. Hannan (1970a). *Group Representation and Applied Theory of Probability*. Moscow, Mir.

[128] E. J. Hannan (1970b). *Multiple Time Series. Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics*. John Wiley, New York.

[129] L. Horváth y P. Kokoszka (2012). *Inference for Functional Data with Applications*. Springer, New York.

[130] G. Hunt (1951). Random Fourier transforms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **71**.

[131] A. P. Husu, Yu R. Viterberg y V. A. Palmov (1975). *The Roughness of Surfaces*. Nauka, Moscow.

[132] I. A. Ibragimov (1967). On maximum likelihood estimation of parameters of the spectral density of stationary time series. *Theory Probab. Appl.* **12**, 115-119

[133] I. A. Ibragimov (1973). Properties of sample functions for stochastic processes and embedding theorems. *Theory Prob. Applications* **3**, 442-453.

[134] I. A. Ibragimov y Yu. A. Rozanov (1978). *Gaussian Random Processes*. Springer-Verlag, New York.

[135] J. Illian , A. Penttinen , H. Stoyan y D. Stoyan (2008). *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*. John Wiley & Sons, New York.

[136] K. Itô (1951). Multiple Wiener integrals. *J. Math. Soc. Japan* **13**, 157-169.

[137] K. Itô (1954). Stationary random distributions. *Memoirs Coll. Sci. Kyoto Univ.* **A28**, No. 3.

[138] K. Itô (1956). Isotropic random current. *Proc. of the III Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab.* Vol. 2.

[139] K. Itô y M. Nisio (1968). On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. *Osaka J. Math.* **5**.

[140] A.V. Ivanov (1997).*Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*. Springer, Dordrecht, Netherlands.

[141] A. V. Ivanov y N. N. Leonenko (1989). *Statistical Analysis of Random Fields. Mathematics and Its Applications* (Soviet Series) **28**. Kluwer Academic, Dordrecht.

[142] A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y I. N. Savich (2013). Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra. *Annals of Probability* **41**, 1088-1114.

[143] A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz Medina y B. M. Zhurakovsky (2015). Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors. *Stastics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics* **49**, 156-186.

[144] N. Jacob y H.-G. Leopold (1993). Pseudodifferential operators with variable order of differentiation generating Feller semigroup. *Integral Equation Operator Theory* **17**, 544-553.

[145] N. Jain y M. Markus (1974). Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random series of functions. *Ann. Inst. Fourier* **24**, No. 2.

[146] R. H. Jones (1963). Stochastic processes on the sphere. *Ann. Math. Statist.* **34**, No. 1.

[147] S. G. Kalandarashvili (1975). On absolute continuity of probability measures. *Soobshchenia Akad. Nauk. Gruzinsk. S.S.R.* **86**, No. 1.

[148] K. Karhunen (1947). Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys.* **37**, 1-79.

[149] T. Kawada (1970). Continuity of stochastic processes on metric spaces. *Proc. Japan Acad.* **46**, No. 7.

[150] M. Kelbert, N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2005). Fractional random fields associated with stochastic fractional heat equations. *Advances in Applied Probability* **37**, 108-133.

[151] D. Khoshnevisan (2002). *Multiparameter Processes: An Introduction to Random Fields.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York.

[152] D. Khoshnevisan y Y. Xiao (2005). Lévy processes: capacity and Hausdorff dimension. *Ann. Probab.* **33**, 841-878.

[153] K. Kikuchi y A. Negoro (1997). On Markov processes generated by pseudodifferential operators of variable order. *Osaka Journal of Mathematics* **34**, 319-335.

[154] T. Komatsu (1996). On stable-like processes. En *Probability Theory and Mathematical Statistics. Proc. of the 7th Japan-Russia Symposium*, pp. 210-219. World Scientific, Singapore.

[155] N. Kono (1966). Special functions connected with the representation of the infinite-dimensional motion group. *J. Math. Kyoto Univ.* No. 6.

[156] H. Korezlioglu, P. Lefort y G. Mazziotto (1981). Une propriété markovienne et diffusions associées. En *Two-Index Random Processes* Volumen 863 *Lecture Notes in Math.*, pp. 245-274. Springer, Berlin.

[157] Yu V. Kozachenko y M. I. Yadrenko (1976a). Local properties of sample functions of random fields I. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **14**.

[158] Yu V. Kozachenko y M. I. Yadrenko (1976b). Local properties of sample functions of random fields II. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **15**.

[159] S. M. Krasnitskii (1973). On conditions of equivalence and perpendicularity of measures corresponding to homogeneous Gaussian fields. *Theory Prob. Applications* **3**, 588-592.

[160] H. Künsch (1979). Gaussian Markov random fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **26**, 53-73.

[161] K. Kuroda, y H. Manaka (1998). Limit theorem related to an interface of three-dimensional Ising model. *Kobe J. Math.* **15**, 17-39.

[162] J. Lamperti (1977). *Stochastic Processes: a Survey of the Mathematical Theory*. Springer-Verlag, New York.

[163] O. Lanford y D. Ruelle (1969). Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.* **13**, 174-215.

[164] N. N. Leonenko (1974). The central limi theorem for homogeneous random fields and asymptotic normality of estimates of regression coefficients. *Dpovidi Akad. Nauk. Uk. R.S.R.* Ser A **8**.

[165] N. N. Leonenko (1975a). Estimation of the convergence rate in the central limit theory for m-dependent random fields. *Math. Notes* **17**, 76-78.

[166] N. N. Leonenko (1975b). The central limit theorem for linear random fields. *Vychisl. i Prikl. Matem.* **25**.

[167] N. N. Leonenko (1975c). Limit theorems for additive random functions. En: *Issledovania po teorii sluchainykh protsessov (Investigations of the theory of random processes)*. Izd-vo Instit. Matem. Akad. Nauk. Ukrain. S.S.R.

[168] N. N. Leonenko (1975d). The central limit theorem for random fields with a weight function. *Kibernetika* **5**.

[169] N. N. Leonenko (1999). *Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[170] N. N. Leonenko, A. Olenko y M. D. Ruiz-Medina (2020). High-frequency commutative and non-commutative Hermite-type distributions for spherical random fields (preprint).

[171] N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2006). Strongly dependent Gaussian scenarios for the Burger turbulence problem with quadratic external potentials. *Random Operators and Stochastic Equations* **14**, 259-274.

[172] N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2006). Scaling laws for the multidimensional Burgers equation with quadratic external potentials. *Journal of Statistical Physics* **124**, 191-205.

[173] N. N. Leonenko. y M. D. Ruiz-Medina (2008). Gaussian scenario for the Heat equation with quadratic potential and weakly dependent data with applications. *Methodology and Computing in Applied Probability* **10**, 595-620.

[174] N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2010). Spatial scaling for randomly initialized Heat and Burgers equation with quadratic potentials. *Stochastic Analysis and Applications* **28**, 303-321.

[175] N. N. Leonenko y M. D. Ruiz-Medina (2017). Increasing domain asymptotics for the first Minkowski functional of spherical random fields. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* **97**, 120-141.

[176] N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y M. Taqqu (2011). Fractional elliptic, hyperbolic and parabolic random fields. *Electronic Journal of Probability* **16**, 1134-1172.

[177] N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y M. S. Taqqu (2017a). Rosenblatt distribution subordinated to Gaussian random fields with long-range dependence. *Stochastic Analysis and Applications* **35**, 144-177.

[178] N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina y M. Taqqu (2017b). Non-central limit theorems for random fields subordinated to Gamma-correlated random fields. *Bernoulli* **23**, 3469-3507.

[179] N. N. Leonenko y M. I. Yadrenko (1975). A central limit theorem for homogeneous and isotropic random fields. *Dopovidi Akad. Nauk. Uk. R.S.R. Ser. A* **4**, 314-316.

[180] N. N. Leonenko y M. I. Yadrenko (1977). On estimation of regression coefficients of homogeneous isotropic random fields. *Kibernetika* **2**.

[181] N. N. Leonenko y M. I. Yadrenko (1978). On the asymptotic distribution of functionals of homogeneous random fields. *Teoria Sluchainykh Protsessov* **5**.

[182] N. N. Leonenko y M. I. Yadrenko (1979). Limit theorems for homogeneous and isotropic random fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **21**.

[183] P. Lévy (1945). Sur le mouvement brownien dépendant de plusieurs paramètres. *C. R. Acad. Sci. Paris* **220**, 420-422.

[184] P. Lévy (1948a). *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien.* París.

[185] P. Lévy (1948b). Chaines doubles de Markoff et fonctions aléatoires de deux variables. *C. R. Acad. Sci.* **226**.

[186] P. Lévy (1948c). Exemples de processus doubles de Markoff. *C. R. Acad. Sci.* **226**.

[187] P. Lévy (1949). Processus doubles de Markoff. *Coll. Intern. Centre Nat. Res. Sci.* No. 13.

[188] I. M. Lifshits (1949). On the theory of solid solutions, I, II. *Zh. Eksperiment. i Theoretich Fiziki* **9**, No. 4.

[189] P. Major (1981). *Multiple Wiener-Itô Integrals. Lecture Notes in Math.* **849**. Springer, New York.

[190] V. A. Malyshev y R. A. Minlos (1991). *Gibbs Random Fields. Cluster Expansions.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[191] D. Marinucci y G. Peccati (2011). *Random Fields on the Sphere Representation, Limit Theorems and Cosmological Applications.* London Mathematical Society Lecture Note Series **389**. Cambridge University Press, Cambridge.

[192] B. Matern (1960). Stochastic models and their application to some problems in forest surveys and other sampling investigations. *Meddelander fran statens Skogsforskningsinstitut* **49**, No. 5.

[193] G. Matheron (1963). Principles of geostatistics. *Economic Geology.* **58**, 1246-1266.

[194] G. Mazziotto (1988). Two-parameter Hunt processes and a potential theory. *Ann. Probab.* **16**, 600-619.

[195] H. P. McKean (1963). Brownian motion with a several-dimensional time. *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **8**, 357-378.

[196] F. Merlevéde (1995). Sur l'inversibilité des processus linéaires á valeurs dans un espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **321**, 477-480.

[197] F. Merlevéde (1996a). Central limit theorem for linear processes with values in a Hilbert space. *Stochastic Process. Appl.* **65**, 103-114.

[198] F. Merlevéde (1996b). Lois des grands nombres et loi du logarithme itéré compacte pour des processus linéaires á valeurs dans un espace de Banach de type 2. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323**, 521-524.

[199] F. Merlevéde (1997). Résultats de convergence presque sûre pour l'estimation et la prévision des processus linéaires Hilbertiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **324**, 573-576.

[200] M. A. Mirzakhmedov (1967). On extrapolation of homogeneous generalized random fields. *Izvestia Akad. Nauk. Uzbek. S.S.R.* **2**.

[201] M. P. Moklyachuk (1974a). Some problems of linear extrapolation of homogeneous random fields on the Cylinder I. *Issledovanie Operatsii i A.S.U.* **3**.

[202] M. P. Moklyachuk (1974b). Some problems of linear extrapolation of homogeneous random fields on the Cylinder II. *Issledovanie Operatsii i A.S.U.* **4**.

[203] M. P. Moklyachuk (1974c). On linear extrapolation of homogeneous random fields with rational spectral density. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **11**.

[204] M. P. Moklyachuk (1974d). Some problems of linear prediction for homogeneous vector random fields. *Vychisl. i Prikladn. Matem.* **23**.

[205] M. P. Moklyachuk (1974e). On the problem of linear extrapolation for a class of homogeneous random fields. *Dopovidi. Akad. Nauk. Uk. R.S.R., Ser A* **6**.

[206] M. P. Moklyachuk (1974f). On the problem of linear extrapolation for a class of m-dimensional homogeneous random fields. *Visnik. Kievsk. Univers. Ser. Matem. ta Mekh.* **16**.

[207] M. P. Moklyachuk (1975a). On linear extrapolation of homogeneous vector random fields on the cylinder. *Visik. Kievsk. Univers. Ser. Matem. ta Mekh.* **17**.

[208] M. P. Moklyachuk (1975b). Some problem of linear extrapolation of homogeneous random fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **12**.

[209] M. P. Moklyachuk y M. I. Yadrenko (1978a). Linear statistical problem for time-homogeneous isotropic random fields on the sphere I. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **18**.

[210] M. P. Moklyachuk y M. I. Yadrenko (1978b). Linear statistical problem for time-homogeneous isotropic random fields on the sphere II. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **19**.

[211] G. M. Molchan (1971). Characterization of gaussian fields with markovian property. *Soviet. Math. Dokl.* **12**, 563-567.

[212] J. Møller, A. R. Syversveen y R. Waagepetersen (1998). Log Gaussian Cox processes. *Scand J Stat* **25**, 451-482.

[213] J. Møller y R. P. Waagepetersen (2004). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes London.* Chapman & Hall, Boca Raton.

[214] P. Moran (1973a). A gaussian markovian process on a square lattice. *J. Appl. Probab.* **10**, No.1.

[215] P. Moran (1973b). Necessary conditions for markovian processes on lattice. *J. Appl. Probab.* **10**, No.5.

[216] T. Mourid (2004). Processus autorégressifs Hilbertiens á coefficients aléatoires. *Ann. I. S. U. P.* **48**, 79-85.

[217] Mc. Neil (1972). Representations for homogeneous processes. *Zeit-Schrift für Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw. Gebiete.* **22**.

[218] E. Nelson (1973a). Construction of quantum fields from Markoff fields. *Journal of Functional Analysis* **12**, No. 1.

[219] E. Nelson (1973b). The free Markoff field. *Journal of Functional Analysis* **12**, No. 2.

[220] D. Novikov, H. A. Feldman y F. Shandarin (1999). Minkowski functionals and cluster analysis for CMB maps *Int.J. Mod.Phys.* D8: 291-306.

[221] D. Nualart (2006). *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Second edition. Springer-Verlag, New York.

[222] D. Nualart y G. Peccati (2005). Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann. Probab.* **33**, 177-193.

[223] D. Nualart y M. Sanz (1979). A Markov property for two-parameter Gaussian processes. *Stochastica* **3**, 1-16.

[224] A. M. Obukhov (1947). Statistically homogeneous fields on the sphere. *Uspekhi Matem. Nauk.*, **2**, No. 2.

[225] A. M. Obukhov (1954a). Statistical description of continuous fields. *Trudy Geofizich. Instit. Acad. Nauk. S.S.S.R.* **24**.

[226] A. M. Obukhov (1954b). Probabilistic description of random fields. *Ukrain Matem. Zh* **6**, No. 1.

[227] H. Ogura (1966). Polar spectral representation of homogeneous and isotropic random fields. *J. Phy. Soc. Japan.* **21**, No. 4.

[228] H. Ogura (1968). Spectral representation of vector random fields. *J. Phy. Soc. Japan.* **24**, No. 6.

[229] A. Olenko (2013). Limit theorems for weighted functionals of cyclical long-range dependent random fields. *Stoch Anal. Appl.* **31**, 199-213.

[230] A. Orihara (1966). Hermite polynomials and infinite-dimensional motion groups. *J. Math. Kyoto Univ.* **6**, No.1.

[231] J. Ottaviani (1951). Sulle catene doppie di Markoff. *Giorn. Ital. Attuari.* **14**, No.1.

[232] E. I. Ottrovskii (1970). On the local structure of gaussian fields. *Soviet Math. Dokl.* **11**, 1425-1427.

[233] G. Peccati (2009). Stein's method, Malliavin calculus and infinite-dimensional Gaussian analysis. *Lecture Notes.* Available at www.glocities.com/giovannipeccati

[234] G. Peccati y M. S. Taqqu (2011). *Wiener Chaos: Moments, Cumulants and Diagrams.* Springer, New York.

[235] G. Peccati y C. A. Tudor (2005). Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals. En *Séminaire de Probabilités XXXVIII. Lecture Notes in Math.* **1857**, 247-262.

[236] M. S. Pinsker (1957). The extrapolation of homogeneous random fields and the quantity of information about a gaussian random field contained in another gaussian random field. *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.* **112**, 815–818.

[237] V. I. Piterbarg (1972). Asymptotic Poissonianness of the number of explosions and the distribution of the maximum of a gaussian homogeneous field. En: *Vybrosy Sluchhainykh Protsessov i Polei.* Izd-vo M.G.U.

[238] L. D. Pitt (1971). A Markov property for gaussian processes with a multidimensional parameter. *Arch. Rational Mech. Anal.* **43**, 367-391.

[239] A. Plikusas (1980). The estimations of the cumulants of some nonlinear transformations of stationary gaussian process. *Lithuanian Math. J.* **20**, 119-128.

[240] A. I. Pomarenko (1969). On the spectral theory of infinite-dimensional wide-sense random fields on groups. *Visnik Kievsk. Univers. Ser. matem. ta Mekh.* N**11**, 121-144.

[241] A. I. Pomarenko (1970a). On the mean of a positive definite operator function on the group. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **1**.

[242] A. I. Pomarenko (1970b). Harmonic analysis of generalized homogeneous wide-sense random fields on a commutative locally compact group. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **1**.

[243] A. I. Pomarenko (1971). Pseudo-homogeneous random fields on groups and homogeneous spaces. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **4**.

[244] A. I. Pomarenko (1972). Homogeneous random fields on semi-groups and homogeneous spaces with range in a Banach space. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **7**.

[245] Yu D. Popov (1968a). On the linear extrapolation of a homogeneous isotropic random field on a sphere. *Dopovidi Akad.Nauk.Uk R.S.R. Ser A.* **5**.

[246] Yu D. Popov (1968b). On a problem of linear extrapolation for homogeneous and isotropic random fields from the observations on a circle. *Math.Notes* **4**, 844-849.

[247] Yu D. Popov (1969a). On a problem of linear prediction for homogeneous random fields. *Kibernetika* **4**.

[248] Yu D. Popov (1969b). On a problem of linear extrapolation of a homogeneous random field in a finite domain. *Kibernetika* **5**.

[249] Yu D. Popov (1970). Some problems of the linear extrapolation for spatial homogeneous isotropic and time-stationary random fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **1**.

[250] Yu D. Popov (1971a). On the linear extrapolation of a homogeneous isotropic random field on the basis of discrete observations on a circle. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **4**.

[251] Yu D. Popov (1971b). On the linear extrapolation of a planar discrete homogeneous random field. *Vychisi. i Prikladn. Matem.* **14**.

[252] Yu. D. Popov y M. Yadrenko (1969). Certain questions of the spectral theory of homogeneous and isotropic random fields. *Theory Probab. and its Applications* **14**, 531-540.

[253] Ch. Preston (1976). *Random Fields.* Springer-Verlag, New York.

[254] B. Pumo (1992). Estimation et prévision de processus autorégressifs fonctionnels. Report de la Université de París 6. París.

[255] R. Pyke (1985). Opportunities for set-indexed empirical and quantile processes in inference. En *Proceedings of the 45th session of the International Statistical Institute.* Volumen 4, Amsterdam.

[256] A. G. Ramm (1973). Detection of random fields in the case of noise. *Problemy Pederachi Informatsii.* **9**, No. 3.

[257] A. G. Ramm (1990). *Random Fields Estimation Theory.* Longman Scientific & Technical, England.

[258] J. O. Ramsay (1982). When the data are functions. *Psychometrika* **47**, 379-396.

[259] J. O. Ramsay y B. W. Silverman (2005). Functional data analysis, 2nd ed. Springer, New York.

[260] S. L. Rathbun y N. Cressie (1994). A space-time survival point process for a longleaf pine forest in Southern Georgia. *J. Am. Statist. Ass.* **89**, 1164-1174.

[261] R. Reeves y A. N. Pettitt (2004). Efficient recursions for general factorisable models. *Biometrika* **91**, 751-757.

[262] S. O. Rice (1939). The distribution of the maxima of a random curve. *Amer. J. Math.* **61**, 409-416.

[263] G. Robins, P. Pattison, Y. Kalish y D. Lusher (2007). An introduction to exponential random graph p* models for social networks. *Social Networks* **29**, 173-191.

[264] M. Rosenblatt (2000). *Gaussian and Non-Gaussian Linear Time Series and Random Fields. Springer Series in Statistics.* Springer, New York.

[265] Y. A. Rozanov (1967). Gaussian fields with given conditional distributions. *Theory Prob. Applications* **12**, 381-397.

[266] Yu A. Rozanov (1971). Infinite-dimensional gaussian distribution. *Proceedings the Steklov Institute of Mathematics. Amer. Math. Society.* Providence, Rhode Island.

[267] Y. A. Rozanov (1982). *Markov Random Fields.* Springer-Verlag, Berlin.

[268] Y. A. Rozanov (1998). *Random Fields and Stochastic Partial Differential Equations.* Kluwer Academic Publishers, New York.

[269] Ya A. Rudzit (1975). *Microgeometry and Contact Interaction of Surfaces.* Zinatne, Riga.

[270] M. D. Ruiz-Medina (2009). Functional denoising and reconstruction of fractal image sequences. *Random Operators and Stochastic Equations* **17**, 275-293.

[271] M. D. Ruiz-Medina (2011). Spatial autoregressive and moving average hilbertian processes. *Journal of Multivariate Analysis* **102**, 292-305.

[272] M. D. Ruiz-Medina (2012a). Spatial functional prediction from spatial autoregressive hilbertian processes. *Environmetrics* **23**, 119-128.

[273] M. D. Ruiz-Medina (2012b). New challenges in spatial and spatiotemporal functional statistics for high-dimensional data. *Spatial Statistics* **1**, 82-91.

[274] M. D. Ruiz-Medina (2016). Functional analysis of variance for Hilbert-valued multivariate fixed effect models. *Statistics* **50**, 689-715.

[275] M. D. Ruiz-Medina (2021). Spectral analysis of long-range dependence functional time series. arXiv:1912.07086 [math.ST].

[276] M. D. Ruiz-Medina y J. Álvarez-Liébana (2019a). Classical and bayesian componentwise predictors for non-compact correlated ARH(1) processes. *REVSTAT* **17**, 265-296.

[277] M. D. Ruiz-Medina y J. Álvarez-Liébana (2019b). Strongly consistent autoregressive predictors in abstract Banach spaces. *Journal of Multivariate Analysis* **170**, 186-201.

[278] M. D. Ruiz-Medina y J. Álvarez-Liébana (2019c). A note on strong-consistency of componentwise ARH(1) predictors *Statistics & Probability Letters* **145**, 224-228

[279] M. D. Ruiz-Medina y J. M. Angulo (2002). Spatio-temporal filtering using wavelets. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **16**, 241-266

[280] M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh (2001). Scaling limit solution of a fractional Burgers equation. *Stochastic Processes and Their Applications* **93**, 285-300.

[281] M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh (2002). Stochastic fractional-order differential models on fractals. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* **67**, 130-146.

[282] M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh (2003a). Fractional-order regularization and wavelet approximation to the inverse estimation problem for random fields. *Journal of Multivariate Analysis* **85**, 192-216.

[283] M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh (2003b). Fractional generalized random fields on bounded domains. *Stochastic Analysis and Applications* **21**, 465-492.

[284] M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo y V. V. Anh (2006). Spatial and spatiotemporal Karhunen-Loéve-type representations on fractal domains. *Stochastic Analysis and Applications* **24**, 195-219.

[285] M. D. Ruiz-Medina, J. A. Angulo y R. Fernández-Pascual (2007). Wavelet-vaguelette decomposition of spatiotemporal random fields. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **21**, 273-281.

[286] M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y J. M. Angulo (2001). Stochastic fractional-order differential models with fractal boundary conditions. *Statistics & Probability Letters* **54**, 47-60.

[287] M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y J. M. Angulo (2004). Fractal random fields on domains with fractal boundary. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **7**, 395-417.

[288] M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh y J. M. Angulo (2011). Multifractional Markov processes in heterogeneous domains. *Stochastic Analysis and Applications* **29**, 15-47.

[289] M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh, y J. M. Angulo (2012). Random fields with multifractional regularity order on heterogenous fractal domains. *Stochastic Analysis and Applications* **30**, 849-864.

[290] M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh, R. M. Espejo, J. M. Angulo y M. P. Frías (2015). Least-squares estimation of multifractional random fields in a Hilbert-valued context. *Journal of Optimization. Theory and Applications* **167**, 888-911.

[291] M. D. Ruiz-Medina y R. Crujeiras (2014). A central limit result in the wavelet domain for minimum contrast estimation of fractal random fields. *Theory of Probability and its Applications* **58**, 450-486.

[292] M. D. Ruiz-Medina y R. M. Espejo (2012). Spatial autoregressive functional plug-in prediction of ocean surface temperature *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **26**, 335-344.

[293] M. D. Ruiz-Medina y R. M. Espejo (2013). Integration of spatial functional interaction in the extrapolation of ocean surface temperature anomalies due to global warming. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation* **22**, 27-39.

[294] M. D. Ruiz-Medina y R. M. Espejo (2015). Maximum-likelihood asymptotic inference for autoregressive hilbertian processes. *Methodology and Computing in Applied Probability* **17**, 207-222.

[295] M. D. Ruiz-Medina, R. M. Espejo y E. Romano (2014). Spatial functional normal mixed effect approach for curve classification. *Advances in Data Analysis and Classification* **8**, 257-285.

[296] M. D. Ruiz-Medina y M. P. Frías (2015). Wavelet-based semiparametric estimation of ocean surface temperature. *Mathematical Geosciences* **47**, 149-171.

[297] M. D. Ruiz-Medina, D. Miranda y R. M. Espejo (2019). Dynamical multiple regression in function spaces, under kernel regressors, with ARH(1) errors. *Test* **28**, 943-968.

[298] M. D. Ruiz-Medina y E. Porcu (2015). Equivalence of gaussian measures of multivariate random fields. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **29**, 325-334.

[299] M. D. Ruiz-Medina, E. Porcu y R. Fernández-Pascual (2011). The Dagum and auxiliary covariance families towards reconciling two-parameter models that separate fractal dimension and Hurst effect. *Probabilistic Engineering Mechanics* **26**, 259-268.

[300] M. D. Ruiz-Medina y M. J. Valderramna (1995). Recursive filtering for the Uhlenbeck field. An application to image restoring *Advances in Stochastic Modelling and Data Analysis*, pp. 74-84, J. Janssen, Ch. Skiadas y C. Zopounidis (Eds.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[301] M. D. Ruiz-Medina y M. J. Valderramna (1997). Orthogonal representations of random fields and an application to geophysics data. *Journal of Applied Probability* **34**, pp. 458-476.

[302] M. D. Ruiz-Medina y M. J. Valderramna (1998). Two-parameter diffusions random fields. *Stochastic Analysis and Applications* **16**, 391-402.

[303] D. L. Russell (1982). On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **87**, 528-550.

[304] G. Samorodnitsky y M. S. Taqqu (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Modeling. Stochastic models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, New York.

[305] L. Serra , M. Saez, J. Mateu, D. Varga, P. Juan, C. Díaz-Ávalos y H. Rue (2014). Spatio-temporal log-gaussian Cox processes for modelling wildfire occurrence: the case of Catalonia 1994-2008. *Environ Ecol Stat* **21**, 531-563.

[306] J. Shoenberg (1938). Metric spaces and completely monotone functions. *Ann.of Math.* **39**, 811-841.

[307] A. V. Skorokhod (1960). On a problem of statistics of random processes. *Dopovidi Akad. Nauk. Uk. R.S.R.* **9**.

[308] A. V. Skorokhod (1973). A theorem on continuity of random functions on a compact set in Hilbert space. *Theory Prob. Applications* **4**, 771-774.

[309] A. V. Skorokhod y M. I. Yadrenko (1973). On absolutely continuity of measures corresponding to homogeneous Gaussian fields. *Theory Prob. Applications* **1**, 27-40.

[310] D. Stoyan, W. S. Kendall y J. Mecke (1995). *Stochastic Geometry and Its Applications (2nd edn)*. Wiley, Chichester.

[311] P. Strait (1966). Sample function regularity for Gaussian processes with the parameter in a Hilbert space . *Pacific J. of Math.* **19** No.1.

[312] D. Surgailis (1981). On the convergence of sums of non-linear functions of moving average to automodel process. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **2**, 51-54.

[313] D. Surgailis (1982). On attraction zones for automodel multiple integrals. *Litovsk. Mat. Sb.* **22**, 185-201.

[314] M. Taniguchi (1987). Minimum contrast estimation for spectral densities of stationary processes. *J. R. Stat. Soc. Ser. B-Stat. Methodol.* **49**, 315-325.

[315] M. S. Taqqu (1975). Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **31**, 287-302.

[316] M. S. Taqqu, (1979). Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **50**, 53-83.

[317] M. S. Taqqu (1986). *A Bibliographical Guide to Self-Similar Processes and Long-Range Dependence.* En *Dependence in Probability and Statistics*, E. Eberlein y M. S. Taqqu (Eds.). Birkhauser, Boston.

[318] J. E. Taylor (2001). *Euler Characteristics for Gaussian Fields on Manifolds.* PhD thesis, McGill University.

[319] J. E. Taylor (2006). A Gaussian kinematic formula. *Ann. Probab.* **34**, 122-158.

[320] A. A. Tempel'man (1962). Ergodic theorems for homogeneous generalized random fields and homogeneous random fields on groups. *Litovskii matem. sbornik.* **2**, No. 1.

[321] H. Tong (1990). *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach.* Oxford University Press, New York.

[322] A. Torres, M. P. Frías y M. D. Ruiz-Medina, (2016). Log-gaussian Cox processes in infinite-dimensional spaces. *Theor. Prob. Math. Stat.* **95**, 157-177.

[323] A. Torres-Signes, M.P. Frías, J. Mateu y M.D. Ruiz-Medina (2021). A spatial functional count model for heterogeneity analysis in time. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* DOI:10.1007/s00477-020-01951-5.

[324] A. Torres-Signes, M.P. Frías y M.D. Ruiz-Medina (2021). COVID-19 mortality analysis from soft-data multivariate curve regression and machine learning. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* DOI: 10.1007/s00477-021-02021-0

[325] H. Triebel (1978). *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North-Holland, Amsterdam.

[326] H. Triebel (1997). *Fractals and Spectra.* Birkhaüser, New York.

[327] Ch. Tse-Pei (1957a). Extrapolation problem for discrete parameter homogeneous fields. *Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R.* **112**, No.2.

[328] Ch. Tse-Pei (1957b). On the linear extrapolation of a continuous homogeneous random field. *Theory Prob. Applications* **2**, 58-89.

[329] C. A. Tudor y Y. Xiao (2007). Sample path properties of bifractional Brownian motion. *Bernoulli* **13**, 1023-1052.

[330] V. N. Tutubalin (1961). Invariant random measures on the sphere. *Theory Prob. Applications* **1**

[331] E. Vanmarcke (1983). *Random Fields. Analysis and Synthesis.* MIT Press, Cambridge, Mass-London.

[332] N. Ja. Vilenkin (1968). *Special Functions and the Theory of Group Representations.* American Mathematical Society, Estados Unidos.

[333] N. Ja. Vilenkin y T.I. Dubenko (1971). On optimal linear estimates of the mathematical expectation of a homogeneous random field. *Izvestia Akad. Nauk. S.S.S.R. Tekhnich. Kibernetika* **1**.

[334] H. Wackernagel (2003). *Multivariate Geostatistics.* Springer, New York.

[335] J. B. Walsh (1978). Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **46**, 177-192.

[336] J. B. Walsh (1986). Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. En *Lecture Notes in Math.*, Volume 1215, pp. 329-491. Springer, Berlín.

[337] Z. Wang (1988). Transition probabilities and prediction for two parameter Ornstein-Uhlenbeck processes. *Kexue Tongbao* (English Ed.) **33**, 5-9.

[338] Z. Wang (1995). *Multi-Parameter Ornstein-Uhlenbeck Process.* En *Dirichlet forms and Stochastic Processes*, pp. 375-382. De Gruyter, Berlín.

[339] S. Wasserman y P. Pattison (1996). Logit models and logistic regressions for social networks: I. An introduction to Markov graphs and $p^\star$. *Psychometrika* **61**, 401-425.

[340] H. Watanabe (1973). On the continuity property of gaussian random fields. *Studia Math.* **49**, No.1.

[341] N. Wiener (1938). The homogeneous chaos. *American J. Math.* **60**, 897-936.

[342] W. Winkler (1959/1960). Stetigeigenschaften der trajektorian zufälliger felder. *Wiss. Zeitschrift T. U. Dresden* **9**, No.1.

[343] W. Winkler y O. Frölich (1966). Bemerkungen zur differenzierbarkeit zufälliger felder. *Wiss. Zeitschrift T. U. Dresden* **15**, No.4.

[344] E. Wong (1968). Two-dimensional random fields and representation images. *S.I.A.M. Journal of Applied Math.* **16**.

[345] E. Wong (1969). Homogeneous Gauss-Markov random fields. *Ann. Math. Statis.* **40**, No. 8.

[346] K. J. Worsley (1994). Local maxima and the expected Euler characteristic of excursion sets of χ^2, F and t fields. *Adv. in Appl. Probab.* **26**, 13-42.

[347] K. J. Worsley (1995a). Boundary corrections for the expected Euler characteristic of excursion sets of random fields, with an application to astrophysics. *Adv. Appl. Probab.* **27**, 943-959.

[348] K. J. Worsley (1995b). Estimating the number of peaks in a random field using the hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images. *Ann. Statist.* **23**, 640-669.

[349] K. J. Worsley (2001). Testing for signals with unknown location and scale in a χ^2 random field, with an application to fMRI. *Adv. in Appl. Probab.* **33**, 773-793.

[350] M. Wschebor (1985). *Surface Aléatoires. Lecture Notes in Math.* Vol. 1147.

[351] Y. Xiao (2009). Sample path properties of anisotropic gaussian random fields. En *A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations*, Volumen 1962 de *Lecture Notes in Math.*, pp. 145-212. Springer, Berlín.

[352] M. I. Yadrenko (1959). On the isotropy Markov random fields on a sphere. *Dopovidi Akad. Nauk. Uk. R.S.R.* **3**.

[353] M. I. Yadrenko (1960). Isotropic Markov random fields on euclidean and Hilbert spaces. *Proceedings of the All-Union Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics.* Erevan, Izd-vo Akad. Nauk. Armen. S.S.R.

[354] M. I. Yadrenko (1962). On a class of isotropic random fields in Lobachevski space. *Dopovidi Akad. Nauk. Uk. R.S.R.* **1**.

[355] M. I. Yadrenko (1963). On a class of isotropic random fields in infinite-dimensional Lobachevski space. *Dopovidi Akad. Nauk. Uk. R.S.R.* **3**.

[356] M. I. Yadrenko (1967). Local power of sample functions of random fields. *Visnik Kievsk. Univers. Ser Matem. ta Mekh.* **9**, 103-112.

[357] M. I. Yadrenko (1969). Analytical random fields. *Visnik Kievsk. Univers. Ser. Matem. ta Mekh.* **11**.

[358] M. I. Yadrenko (1970a). On extrapolation of isotropic (not necessarily homogeneous) random fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **1**.

[359] M. I. Yadrenko (1970b). On the problem of linear extrapolation for homogeneous and isotropic random fields on a Lobachevsky plane. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **2**.

[360] M. I. Yadrenko (1971a). On an interpolation problem for homogeneous isotropic random fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **4**.

[361] M. I. Yadrenko (1971b). On a problem of linear interpolation for homogeneous isotropic random fields. *Dopovidi Akad.Nauk. Uk R.S.R. Ser. A* **4**.

[362] M. I. Yadrenko (1972a). Isotropic Markov random fields on a sphere in Hilbert space. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **6**.

[363] M. I. Yadrenko (1972b). On absolute continuity of measures corresponding to homogeneous and isotropic random fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **7**.

[364] M. I. Yadrenko (1973a). On orthogonality of measures corresponding to gaussian homogeneous random fields. *Teoria Sluchainykh Protsessov* **2**.

[365] M. I. Yadrenko (1973b). On optimal linear estimates for the regression coefficients of isotropic random fields. *Soviet. Math. Dokl.* **14**, 920-923.

[366] M. I. Yadrenko (1974). The problem of testing hypothesis for isotropic random fields. *Kibernetika* **5**.

[367] M. I. Yadrenko (1983). *Spectral Theory of Random Fields.* Optimization Software Inc., New York.

[368] M. I. Yadrenko y S. B. Khatset (1973). Some statistical problems for isotropic fields in the sphere. En *Statistika sluchainykh protsessov i upravlyaemye sluchainye protsessy (Statistics of Random Processes and Control of Random Processes).* Izd-vo Instit. matem. Akad.Nauk. Ukrain S.S.R.

[369] M. I. Yadrenko y M. G. Al-Mandani (1975). On a filtering problem for homogeneous isotropic random fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **13**.

[370] A. M. Yaglom (1948). Homogeneous and isotropic turbulence in compressed fluid. *Izvestia Akad. Nauk. S. S. S. R. Ser. Geograf. i fizich.* **12**, No. 6.

[371] A. M. Yaglom (1952). Introduction to the theory of stationary random functions. *Uspekhi Matem. Nauk.* **7**, No. 5.

[372] A. M. Yaglom (1957). Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes. *Theory Probab. Applications* **3**, 273-320.

[373] A. M. Yaglom (1961). Second-order homogeneous random fields. *Proc. of IV Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab.* Vol. 2.

[374] A. M. Yaglom (1962). Some mathematical model generalizing the model of homogeneous and isotropic turbulence. *Geophys. Res.*, **67** No. 8.

[375] A. M. Yaglom (1963). Spectral representation of various classes of random functions. *Proceedings of the Fourth all Union-Union Mathematica Conference.* Vol. 1.

[376] A. M. Yaglom (1987). *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions.* Volumen I. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York.

[377] P. I. Yuditskaya (1970). On the asymptotic behavior of the maximum of gaussian random fields. *Soviet Math. Dokl.* **11**, 1206-1208.

[378] P. I. Yuditskaya (1971). Asymptotic inequalities for maxima of nondifferentiable normal fields. *Teoria Verojatnostei i Matem. Statistika* **5**.

[379] V. V. Yurinskii (1973). On sample continuity of random fields. *Theory Prob. Applications* **3**, 602-607.

[380] V. V. Yurinskii (1974). The strong law of large numbers for homogeneous random fields. *Math. Notes* **16**, No. 1.

[381] Z. S. Zekaridze (1969). On the equivalence of distributions of gaussian homogeneous fields. *Trudy Instit. Prikl. Matem. Tbilisskogo Gosudarstven. Univers.* **11**, 215-220.

Contestación al discurso de Ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada de la Ilma. Sra. Dña. María Dolores Ruíz Medina

Ilmo. Sr. D. Mariano José Valderrama Bonnet

Excmo. Sr. Presidente de la Academia,

Excmos. e Ilmos. Sres.,

amigos y compañeros:

La Junta de Gobierno de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada me propuso actuar como padrino en el ingreso de la Dra. María Dolores Ruíz Medina como académica de número en esta Institución, lo cual acepté gustoso no sólo por tratarse de una compañera de Departamento, sino por haber sido una de mis primeras discípulas en investigación y haber estado muy ligado profesionalmente a ella en sus primeros años como profesora universitaria.

Durante el curso académico 1989-90 impartía en 5º curso de la Especialidad de Estadística e Investigación Operativa de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas la asignatura Teoría de Sistemas Estocásticos. Desde el primer día me llamó la atención una chica rubia muy despierta que se sentaba en primera fila y seguía con gran interés las explicaciones y que, cuando íbamos por la mitad del curso, me comentó que le gustaría hacer la tesina conmigo. En ese momento estaba empezando a configurar un grupo de investigación sobre la línea en la que años antes había realizado la tesis doctoral dirigida por el Prof. Gutiérrez Jáimez, y que se centraba en la modelización de fenómenos mediante procesos estocásticos de segundo orden.

El tema sobre el que realizó la tesina fue *Transformaciones funcionales en procesos estocásticos*, en el que abordaba el problema de representación ortogonal con funciones de Bessel de procesos obtenidos mediante transformaciones no lineales, especialmente cuadráticas, a partir de procesos Gaussianos, la cual presentó al finalizar su licenciatura en junio de 1990.

Al comienzo del curso 1990-91, recién terminada su carrera, fue contratada como Profesora Asociada por la UGR y, junto a su labor docente, comenzó la realización de la tesis doctoral bajo mi dirección. Dentro de la línea antes mencionada un capítulo importante en el que queríamos profundizar y que, a su vez, era novedoso era la extensión del análisis estocástico sobre procesos uniparamétricos a campos aleatorios, y sobre esta base le asigné a María Dolores el desarrollo de este tema con especial atención a sus aplicaciones a estudios de prospección geofísica, donde el valor de la variable viene determinado por dos o más coordenadas geográficas. Con las aportaciones realizadas defendió en septiembre de 1993 su tesis doctoral titulada *Problemas de representación y predicción sobre campos aleatorios de segundo orden*, obteniendo la máxima calificación, que en esa época recibía el insípido nombre de Apto *cum laude*.

Inmediatamente su categoría profesional pasó a ser de Profesora Titular Interina y, en el periodo subsiguiente a la lectura de la tesis, publicó las aportaciones más relevantes contenidas en ella, al mismo tiempo que se preparaba para concursar a la plaza de Profesora Titular de Universidad, que obtuvo en junio de 1996 y en cuyo tribunal tuve el honor de ser Presidente.

A partir de ese momento, y dado el gran número de ideas que bullían en su cabeza, comenzó a desarrollar por si misma la mencionada línea de campos aleatorios, inicialmente desde un punto de vista teórico para pasar posteriormente al estudio de aplicaciones. Son especialmente relevantes en este periodo sus trabajos sobre representación de campos aleatorios y sus aplicaciones en geofísica y en reconstrucción de imágenes, así como el estudio de campos fraccionales y el análisis de problemas teórico-práctico asociados. A esta época corresponden los artículos de Ruíz-Medina y Valderrama (1995, 1997, 1998).

Con un currículo bastante consolidado, decidió presentarse en abril de 2005 a la prueba de habilitación para el cuerpo de Catedráticos de Universidad que se celebraba en Salamanca. El destino o, mejor, la aleatoriedad como decimos los estadísticos, quiso que yo volviera a formar parte de ese tribunal de 7 miembros en la que tras una semana completa de pruebas en las que tuvimos que examinar a 25 concursantes, Lola obtuvo una de las dos plazas de habilitación, adscribiéndose el curso siguiente al Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Granada donde ha desarrollado toda su carrera profesional.

A lo largo de estos treinta años de dedicación a la Universidad, la labor de María Dolores Ruíz Medina ha sido extensísima, tanto a nivel docente como investigador. Cabe destacar en el primero de los ámbitos que ha impartido asignaturas en las extintas licenciaturas en Ciencias Matemáticas, Ciencias y Técnicas Estadísticas y Diplomatura en Estadística, así como en los actuales Grados en Matemáticas y en el de Estadística. De igual forma, fuera del ámbito estrictamente matemático, ha sido profesora en la Licenciatura en Ciencias Biológicas, en la Diplomatura en Ciencias Empresariales y en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos, así como en numerosos cursos de postgrado, máster y doctorado.

En el aspecto investigador la Profesora Ruíz Medina es autora de 135 artículos, el 70% de los cuales publicados en revistas JCR, y más de 140 contribuciones a congresos. En los momentos actuales en los que la investigación pura se ha sustituido, en numerosas ocasiones, por el simple publicismo, donde es más importante el volumen de publicaciones que el contenido de las mismas, cabe destacar que el número medio de firmantes por artículo en el caso de Lola es de 2,8 siendo ella, en numerosas ocasiones, la única firmante del artículo, lo que demuestra su implicación absoluta en la autoría de los mismos.

Además de estas publicaciones, María Dolores ha participado en 10 proyectos de investigación de ámbito nacional (financiados por los sucesivos Ministerios de Educación y Ciencia, Universidades e Investigación, Ciencia e Innovación, Economía y Competitividad, etc.), habiendo sido I.P. en 7 de ellos. También en otros 3 regionales de la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, de los que ha sido responsable de uno de ellos, y 4 internacionales, 3 del *Australian Research Council* y uno de la *National Science Foundation* de Estados Unidos, además de dos acciones especiales.

Ha dirigido o codirigido 7 tesis doctorales, es editora asociada de 3 revistas internacionales y ha realizado estancias en la Queensland University of Technology y en la Cardiff University.

Como ha indicado anteriormente en su disertación, no es hasta el primer tercio del siglo pasado cuando se desarrolla de forma rigurosa la teoría de procesos estocásticos, vinculada en sus orígenes a problemas cinéticos y de flujos, especialmente la modelización de ese movimiento incesante y caótico de partículas, descrito inicialmente por el botánico Robert Brown, en una suspensión acuosa de granos de polen, que inicialmente se explicó postulando que esos granos tenían vitalidad propia.

Ocupa un lugar en la historia el experimento realizado en 1908 por Jean B. Perrin, que obtuvo el Premio Nóbel de Física en 1926, el cual preparó una suspensión de gomaguta y almáciga, obteniendo partículas esféricas de magnitud uniforme de $13x10^{-4}$ cm de diámetro mediante un proceso de centrifugación fraccionada, deduciendo una ecuación que permitía obtener el número de Avogadro de forma directa a partir del desplazamiento lineal medio de una partícula en movimiento Browniano.

La figura de Andréi N. Kolmogórov ha sido decisiva en la Teoría estocástica, tanto en la Probabilidad como en la Estadística. Dentro del campo que nos ocupa realizó una de las primeras aportaciones al estudio de campos aleatorios demostrando que, aunque a escala macroscópica los movimientos de las turbulencias están determinadas por su dirección, esta dependencia geométrica se pierde a pequeña escala por lo que el movimiento puede modelizarse mediante un campo aleatorio isotrópico.

Sin ánimo de repetir el discurso, merece citar de nuevo las contribuciones decisivas realizadas por Robert J. Adler, Alexander V. Ivanov, Nikolai Leonenko, Mikhaïlo I. Yadrenko y la propia María D. Ruíz Medina. De hecho, su discurso de ingreso es una síntesis de las principales líneas en las que ella ha trabajado en estos últimos treinta años, conjuntamente con los citados investigadores, abordando las cuestiones más complejas y abstractas de la teoría de campos aleatorios, y que pueden resumirse en los cuatro puntos siguientes:

1. Teoremas límite centrales y no centrales para campos aleatorios.

Destaca en esta línea el artículo de Ivanov *et al.* (2013), publicado en *Annals of Probability*, donde se obtiene un Teorema Central del Límite para integrales, ponderadas por una función test (la función de regresión), de un funcional no lineal de un campo aleatorio Gaussiano, cuyo espectro presenta múltiples singularidades. Así mismo merece citarse el trabajo de Leonenko *et al.* (2017), publicado en *Bernouilli*, en el que aplicando una metodología basada en el *Wiener chaos* y el desarrollo de Karhunen-Loéve, obtiene como límite la distribución de Rosemblatt.

2. Ecuaciones pseudodiferenciales fraccionarias y multifraccionarias estocásticas.

Son numerosos los trabajos desarrollados en esta temática en la que se obtiene la caracterización de campos aleatorios Gaussianos fraccionarios y multifraccionarios y se derivan sus propiedades de variación cuadrática media. Por citar algunos reseñaré los realizados por Ruiz-Medina *et al.* (2001) publicado en *Stochastic Processes and Their Applications*, y Ruiz-Medina *et al.* (2004) en *Infinite Dimensional Analysis, Quantum*

Probability and Related Topics, así como los de Anh *et al.* (2016a, 2016b) ambos publicados en *Fractional Calculus and Applied Analysis*.

3. Series espaciales funcionales.

Son especialmente destacables los trabajos de Ruiz-Medina (2011, 2012), el primero publicado en *Journal of Multivariate Analysis* y el segundo en *Environmetrics*, donde, por primera vez, se presentan las series espaciales funcionales lineales bajo un enfoque de espacio de estados, proporcionando las condiciones para la invertibilidad del modelo y la existencia de una solución única estacionaria; de igual forma, la introducción de un contexto general de espacios de Banach para la estimación y predicción fuertemente consistente ARH(1) se deriva en el artículo de Ruiz-Medina y Alvarez (2019) publicado en *Journal of Multivariate Analysis*.

4. Análisis de la varianza funcional.

En esta línea de trabajo cabe citar el artículo de Ruiz-Medina (2016), publicado en *Statistics*, donde se introduce el FANOVA en el ámbito de espacios de Hilbert separables, junto a la formulación de un contraste funcional lineal bajo errores Gaussianos Hilbert–valuados correlados, Más recientemente se ha extendido este modelo al contexto de la regresión múltiple funcional con regresores *kernel* bajo errores del mismo tipo, siendo publicado por Ruiz-Medina *et al.* (2019) en la revista *Test*.

El ingreso de la Profesora Ruíz Medina como académica de número supone para ella un broche más en su dilatada carrera universitaria. Pero recíprocamente la Academia se honrará al recibir entre sus miembros a una extraordinaria investigadora, lo que contribuirá a incrementar el prestigio de esta Institución, tanto por sus cualidades científicas como personales. Por todo lo cual, en nombre de la Corporación y, especialmente, en el mío propio te transmito nuestra felicitación por entrar a formar parte de su nómina de académicos y te doy mi más cordial bienvenida.

Referencias

Anh V.V., Leonenko N.N. y Ruiz-Medina M.D. (2016a). Space-time fractional stochastic equations on regular bounded open domains. Fractional Calculus and Applied Analysis 19, 1161-1199.

Anh V.V., Leonenko N.N. y Ruiz-Medina M.D. (2016b). Fractionalin-time and multifractional-in-space stochastic partial differential equations. Fractional Calculus and Applied Analysis 19, 1434-1459.

Ivanov A.V., N. N. Leonenko, Ruiz-Medina M.D. y Savich I.N. (2013). Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra. Annals of Probability 41, 1088-1114

Leonenko N.N., Ruiz-Medina M.D. y Taqqu M. (2017). Non-central limit theorems for random fields subordinated to Gamma-correlated random fields. Bernoulli 23, 3469-3507.

Ruiz-Medina M.D. (2011). Spatial autoregressive and moving average hilbertian processes. Journal of Multivariate Analysis 102, 292-305.

Ruiz-Medina M.D. (2012). Spatial functional prediction from spatial autoregressive hilbertian processes. Environmetrics 23, 119-128.

Ruiz-Medina M.D. (2016). Functional analysis of variance for Hilbertvalued multivariate fixed effect models. Statistics 50, 689-715.

Ruiz-Medina M.D. y Álvarez-Liébana J. (2019). Strongly consistent autoregressive predictors in abstract Banach spaces. Journal of Multivariate Analysis 170, 186-201.

Ruiz-Medina M.D., Angulo J.M. y Anh V.V. (2001). Scaling limit solution of a fractional Burgers equation. Stochastic Processes and Their Applications 93, 285-300.

Ruiz-Medina M.D., Anh V.V. y Angulo J.M. (2004). Fractal random fields on domains with fractal boundary. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 7, 395-417.

Ruiz-Medina M.D., Miranda D. y Espejo R.M. (2019). Dynamical multiple regression in function spaces, under kernel regressors, with ARH(1) errors. Test 28, 943-968.

Ruíz-Medina M.D. y Valderrama M.J. (1995). Recursive Filtering for the Uhlenbeck Field. An Application to Image Restoring. *Advances in Stochastic Modelling and Data Analysis* (Janssen J., Skiadas C.H. y Zopounidis C., eds.), 74-84. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Ruíz-Medina M.D. y Valderrama M.J. (1996). Orthogonal Representations of Random Fields and an Application to Geophysics Data. *Journal of Applied Probability*, 34, 458-476.

Ruíz-Medina M.D. y Valderrama M.J. (1998). Diffusions Random Fields. *Stochastic Analysis and Applications*, 16(2), 391-402.