Capítulo 6

Diseños en bloques Incompletos aleatorizados

6.0.1. Introducción

Cuando se construye un diseño en bloques aleatorizados, puede suceder que no sea posible realizar todos los tratamientos en cada bloque. En estos casos es posible usar diseños en bloques aleatorizados en los que cada tratamiento no está presente en cada bloque. Estos diseño reciben el nombre de *diseños en bloques incompletos*. Hay varios tipos de diseños en bloques incompletos, siendo uno de los más utilizados el *diseño en bloque incompletos balanceado (BIB)*, que estudiaremos a continuación.

6.0.2. Planteamiento del modelo y análisis estadístico.

Los diseño en bloques incompletos balanceados (BIB) deben verificar:

- Cada tratamiento ocurre el mismo número de veces en el diseño.
- Cada par de tratamientos ocurren juntos el mismo número de veces que cualquier otro par.

Supongamos que se tienen I tratamientos de los cuales sólo se pueden experimentar K $(K < I)$ tratamientos en cada bloque. Se puede construir un diseño BIB tomando $\binom{I}{K}$ bloques de forma que a cada bloque se le asigne una de las $\binom{I}{K}$ combinaciones de tratamientos posibles. En algunas ocasiones es posible reducir el número de bloques necesarios para formar el diseño. En el Apéndice B se muestran tablas de construcción de diseños BIB para ciertos valores de los parámetros del diseño.

Los parámetros que caracterizan este modelo son los siguientes:

- I, número de tratamientos o niveles del factor principal.
- J, número de bloques
- K, número de tratamientos por bloque.
- R, número de veces que cada tratamiento se presenta en el diseño, es decir el número de réplicas de un tratamiento dado.
- λ, número de bloques en los que un par de tratamientos ocurren juntos.
- N, número total de observaciones.

Estos parámetros deben verificar las siguientes relaciones:

i) $N = IR = JK$

ii) $\lambda = R\dfrac{K-1}{I-1}$

iii) $J \geq I$
Cuando $J = I$ el diseño recibe el nombre de simétrico.

Al igual que en el diseño en bloques completos, la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales en cada bloque se debe realizar de forma aleatoria.

El modelo estadístico para este diseño es el mismo que para el diseño en bloques aleatorizados completos, es decir

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + u_{ij} \quad . \tag{6.1}$$

En este diseño la variabilidad total SCT se descompone en

$$SCT = SCTr^* + SCBl + SCR \quad , \tag{6.2}$$

donde

- $SCTr^*$ es la suma de cuadrados de tratamientos ajustada, que tiene la siguiente expresión

$$SCTr^* = \frac{K\sum_{i=1}^{I} T_i^2}{\lambda I} \quad , \tag{6.3}$$

siendo T_i el total ajustado por bloques del i-ésimo tratamiento, definido como

$$T_i = y_{i.} - \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} y_{.j} \qquad i = 1, 2, \cdots, I \tag{6.4}$$

con

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tratamiento } i \text{ ocurre en el bloque } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notamos que

$$\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} y_{.j} \quad ,$$

es el valor medio de los totales de los bloques que contienen al tratamiento i-ésimo.

Se verifica que

$$\sum_{i=1}^{I} T_i = 0 \quad ,$$

la suma de cuadrados ajustada de los tratamientos tiene, por tanto, $I - 1$ grados de libertad.

- Como en este diseño se realizan K de los I tratamientos en cada bloque, la suma de cuadrados correspondiente a los bloques tiene la siguiente expresión

$$SCBl = \sum_{j=1}^{J} \frac{y_{.j}^2}{K} - \frac{y_{..}^2}{N} \quad , \tag{6.5}$$

con $J - 1$ grados de libertad.

- SCT tiene la misma expresión que en el diseño en bloques completos aleatorizados, es decir

$$SCT = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} \quad , \tag{6.6}$$

con $N - 1$ grados de libertad.

- SCR se calcula a partir de las otras sumas de cuadrados, es decir

$$SCR = SCT - SCTr^* - SCBl$$

con $N - I - J + 1$ grados de libertad, que se obtienen como la diferencia entre los grados de libertad de SCT y los grados de libertad de $SCTr^*$ y $SCBl$

$$(N-1) - (I-1) - (J-1) = N - I - J + 1 \quad .$$

En este modelo el estadístico de contraste para los tratamientos es

$$F_\tau = \frac{MCTr^*}{MCR}$$

donde los cuadrados medios tienen las siguientes expresiones

i)
$$MCTr^* = \frac{SCTr^*}{I-1}$$

ii)
$$MCR = \frac{SCR}{N-I-J+1}$$

La correspondiente tabla de análisis de la varianza se presenta a continuación

Tabla 4-9. Análisis de la varianza para un diseño BIB

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F_{exp}
Tra-ajustad.	$\dfrac{K\sum_i T_i^2}{\lambda I}$	$I-1$	$MCTr^*$	$\dfrac{MCTr^*}{SCR}$
Bloq-no-ajustad.	$\sum_j \dfrac{y_{.j}^2}{K} - \dfrac{y_{..}^2}{N}$	$J-1$		
Residual	$SCT - SCTr^* - SCBl$	$N-I-J+1$	MCR	
TOTAL	$\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \dfrac{y_{..}^2}{N}$	$N-1$		

En algunas ocasiones puede resultar de interés contrastar también la igualdad de efectos de los bloques, para ello la suma de cuadrados total se debe descomponer de la siguiente forma

$$SCT = SCTr + SCBl^* + SCR$$

donde

- $SCTr$ es la suma de cuadrados de tratamientos no-ajustada

$$SCTr = \sum_{i=1}^{I} \frac{y_{i.}^2}{R} - \frac{y_{..}^2}{N} \tag{6.7}$$

- $SCBl^*$ es la suma de cuadrados ajustada de los bloques, que en el caso del diseño en bloques incompletos balanceado tiene la siguiente expresión

$$SCBl^* = \frac{R \sum_{j=1}^{J} B_j^2}{\lambda J}$$

  * siendo B_j el total ajustado por tratamientos del j-ésimo bloque, definido como

$$B_j = y_{.j} - \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{I} n_{ij} y_{i.}$$

  Se verifica que

$$\sum_{j=1}^{J} B_j = 0 \quad ,$$

  la suma de cuadrados ajustada de los bloques tiene, por tanto, J-1 grados de libertad.

En este caso el estadístico de contraste para los bloques es

$$F_\beta = \frac{MCBl^*}{MCR}$$

La correspondiente tabla de análisis de la varianza se muestra a continuación

Tabla 4-10. Análisis de la varianza para un diseño BIB

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F_{exp}
Trat-no-ajustad.	$\sum_i \frac{y_{i.}^2}{R} - \frac{y_{..}^2}{N}$	$I-1$		
Bloq-ajustad.	$\frac{R\sum_{j=1}^{J} B_j^2}{\lambda J}$	$J-1$	$MCBl^*$	$\frac{MCBl^*}{SCR}$
Residual	$SCT - SCTr - SCBl^*$	$N-I-J+1$	MCR	
TOTAL	$\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$	$N-1$		

Como ilustración de este modelo se considera el siguiente ejemplo

Una industria algodonera, interesada en maximizar el rendimiento de la semilla de algodón, quiere comprobar si dicho rendimiento depende del tipo de fertilizante utilizado para tratar la planta. A su disposición tiene 5 tipos de fertilizantes. Como se cree que el tipo de terreno puede influir también en el rendimiento de la semilla de algodón se considera el terreno dividido en bloques. Para ello, divide el terreno en 4 bloques[1] *y cada bloque en 5 parcelas, fumigando dentro de cada bloque cada una de las parcelas con un fertilizante, pero debido a la extensión de los bloques y a la falta de recursos, no se pueden aplicar todos los fertilizantes en cada bloque, sino que sólo se pueden aplicar 4 de los 5 fertilizantes en cada uno de ellos. Al recoger la cosecha se mide el rendimiento de la semilla, obteniéndose las siguientes observaciones.*

Un posible diseño BIB para los parámetros $I = J = 5$ lo proporciona la tabla correspondiente al Diseño 5 del Apéndice B, con $R = 4$, $J = 5$ y $\lambda = 3$. La disposición del diseño y las observaciones obtenidas se muestran en la siguiente tabla, que dan lugar al Ejemplo 4-2.

[1] El terreno, en cada bloque, debe ser lo más homogéneo posible.

Tabla 4-11. Datos para el Ejemplo 4-2.

	Bloques				
fertilizantes	B1	B2	B3	B4	B5
1	94	96	100	92	
2	95	75	76		92
3	76	100		97	98
4	94		102	93	96
5		75	91	86	95

Comprobemos que se verifican las relaciones exigidas a los parámetros del diseño.

- $N = IR = JK$. En efecto, ya que $N = 20$, $I = J = 5$ y $R = K = 4$
- $\lambda = R\dfrac{K-1}{I-1} = 4\dfrac{3}{4} = 3$
- $J \geq I$. En este caso, puesto que $I = J = 5$, es un diseño simétrico.

Organizamos los datos en forma tabular como se muestra a continuación

Tabla 4-12. Datos del Ejemplo 4-2

	Bloques							
Fertil.	B1	B2	B3	B4	B5	$y_{i.}$	$y_{i.}^2$	$\sum y_{ij}^2$
1	94	96	100	92		382	145924	36516
2	95	75	76		92	338	114244	28890
3	76	100		97	98	371	137641	34789
4	94		102	93	96	385	148225	37105
5		75	91	86	95	347	120409	30327
$y_{.j}$	359	346	369	368	381	1823	666443	167627
$y_{.j}^2$	128881	119716	136161	135424	145161	665343		

Las sumas de cuadrados necesarias para el análisis de la varianza se calculan como sigue:

$$SCT = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} = 167627 - \frac{(1823)^2}{20} = 1460{,}55$$

$$SCBl = \sum_{j=1}^{5} \frac{y_{.j}^2}{K} - \frac{y_{..}^2}{N} = \frac{665343}{4} - \frac{(1823)^2}{20} = 169{,}3$$

$$SCTr^* = \frac{K\sum_{i=1}^{5} T_i^2}{\lambda I} = \frac{4}{15}(1790{,}625) = 477{,}5$$

donde los totales ajustados de los tratamientos T_i se calculan utilizando la ecuación

$$T_i = y_{i.} - \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{5} n_{ij} y_{.j} \qquad i = 1, 2, \cdots, 5$$

de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
T_1 = &\ (382) - \frac{1}{4}(359 + 346 + 369 + 368) = &\ 21{,}5 \\
T_2 = &\ (338) - \frac{1}{4}(359 + 346 + 369 + 381) = &\ -25{,}75 \\
T_3 = &\ (371) - \frac{1}{4}(359 + 369 + 368 + 381) = &\ 7{,}5 \\
T_4 = &\ (385) - \frac{1}{4}(359 + 369 + 368 + 381) = &\ 15{,}75 \\
T_5 = &\ (347) - \frac{1}{4}(369 + 346 + 368 + 381) = &\ -19
\end{aligned}$$

Se comprueba que efectivamente $\sum_i T_i = 0$

Por último se calcula la suma de cuadrados del error

$$SCR = SCT - SCTr^* - SCBl = 813{,}75$$

El análisis de la varianza resultante se presenta en la siguiente tabla

Tabla 4-13. Análisis de la varianza para los datos del Ejemplo 4-2

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	Contraste F_{exp}
Trat-corregidos	477.5	4	119.375	1.614
Bloq-no-correg.	169.3	4		
Residual	813.75	11	73.97	
TOTAL	1460.55	19		

Recordemos que los grados de libertad se obtienen como diferencia entre los grados de libertad de la suma de cuadrados total y los correspondientes a las sumas debidas a los tratamientos y a los bloques. Notemos que dichos grados de libertad también se pueden obtener como el producto de los grados de libertad de los tratamientos y los bloques (de forma similar al modelo en bloques completos) pero restando a este producto el número de observaciones faltantes con respecto al diseño completo, es decir $4 \times 4 - 5 = 11$.

Si realizamos el contraste al 5 % y comparamos el valor del estadístico de contrate con el correspondiente valor de la F teórica ($F_{0,05;4,11} = 3{,}36$) concluimos que los efectos de los fertilizantes no son significativos.

A continuación vamos a estudiar el efecto de los bloques, para lo cual calculamos:

- La suma de cuadrados ajustada de bloques

$$SCBl^* = \frac{R\sum_{j=1}^{J} B_j^2}{\lambda J} = \frac{4(759{,}375)}{15} = 202{,}5$$

donde los totales ajustados de los bloques, B_j, se calculan utilizando la expresión

$$B_j = y_{\cdot j} - \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{I} n_{ij} y_{i\cdot}$$

de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
B_1 = & \quad (359) - \frac{1}{4}(382 + 338 + 371 + 385) = & -10 \\
B_2 = & \quad (346) - \frac{1}{4}(382 + 338 + 371 + 347) = & -13{,}5 \\
B_3 = & \quad (369) - \frac{1}{4}(382 + 338 + 385 + 347) = & 6 \\
B_4 = & \quad (368) - \frac{1}{4}(382 + 371 + 385 + 347) = & -3{,}25 \\
B_5 = & \quad (381) - \frac{1}{4}(338 + 371 + 385 + 347) = & 20{,}75
\end{aligned}
$$

- La suma de cuadrados de los tratamientos

$$
SCTr = \sum_{i=1}^{5} \frac{y_{i.}^2}{R} - \frac{y_{..}^2}{N} = \frac{666443}{4} - \frac{(1823)^2}{20} = 444{,}3
$$

El análisis de la varianza se presenta en la siguiente tabla

Tabla 4-14. Análisis de la varianza para los datos del Ejemplo 4-2

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F_{exp}
Trat-no-corregidos	444.3	4		
Bloqu-corregidos	202.5	4	50.625	0.684
Residual	813.75	11	73.97	
TOTAL	1460.55	19		

Notamos que al nivel de significación del 5 % tampoco son significativos los efectos del tipo de terreno.

Puede observarse que la suma de cuadrados residual se puede obtener indistintamente como:

$$
SCR = SCT - SCTr^* - SCBl
$$

o

$$
SCR = SCT - SCTr - SCBl^*
$$

Bibliografía utilizada

∗ **García Leal, J. & Lara Porras, A.M.** (1998). *"Diseño Estadístico de Experimentos. Análisis de la Varianza."* Grupo Editorial Universitario.

∗ **Lara Porras, A.M.** (2000). *"Diseño Estadístico de Experimentos, Análisis de la Varianza y Temas Relacionados: Tratamiento Informático mediante SPSS."* Proyecto Sur de Ediciones.