Ana María Lara Porras
Profesora del Dpto. Estadística e IO
Universidad de Granada (España)

DISEÑO ESTADÍSTICO DE EXPERIMENTOS

1. Objetivos

- Identificar un diseño unifactorial de efectos fijos.
- Plantear y resolver el contraste sobre las medias de los tratamientos.
- Saber aplicar los procedimientos de comparaciones múltiples.
- Identificar un diseño unifactorial de efectos aleatorios.
- Estimar los componentes de la varianza.
- Identificar un diseño en bloque completo aleatorizado con efectos fijos.
- Identificar un diseño en bloque incompleto aleatorizado con efectos fijos.
- Identificar un diseño en bloque incompleto balanceado (BIB).
- Identificar un diseño en cuadrados latinos.
- Identificar un diseño en cuadrados greco-latinos.
- Identificar un diseño en cuadrados de Jouden.
- Plantear y resolver los contrastes de igualdad de tratamientos y de igualdad de bloques.
- Identificar un diseño bifactorial de efectos fijos y estudiar las interacciones entre los factores.
- Identificar un diseño trifactorial de efectos fijos y estudiar las interacciones entre los factores
- Estudiar la influencia de los factores.
- Analizar en qué sentido se producen las interacciones mediante el gráfico de medias.
- Aplicar los procedimientos de comparaciones múltiples: Obtener conclusiones sobre el experimento planteado y las interacciones.
- Analizar la idoneidad de los modelos planteados.

2. Introducción al Diseño Estadístico de Experimentos

En la práctica 6 hemos descrito métodos de inferencias sobre la media y la varianza de una población y de dos poblaciones. En esta práctica 7 ampliamos dichos métodos a más de dos poblaciones e introducimos algunos aspectos elementales del *Diseño Estadístico de Experimentos* y del *Análisis de la Varianza*.
El diseño estadístico de experimentos incluye un conjunto de técnicas de análisis y un método de construcción de modelos estadísticos que, conjuntamente, permiten llevar a cabo el proceso completo de planificar un experimento para obtener datos apropiados, que puedan ser analizados con métodos estadísticos, con objeto de obtener conclusiones válidas y objetivas.
El análisis de la varianza o abreviadamente ANOVA (del inglés analysis of variance) es un procedimiento estadístico que permite dividir la variabilidad observada en componentes independientes que pueden atribuirse a diferentes causas de interés. Es una

técnica estadística para comparar más de dos grupos, es decir un método para comparar más de dos tratamientos y la variable de estudio o variable respuesta es numérica.
En esta práctica presentamos el *Diseño Completamente Aleatorio con efectos fijos* y con *efectos aleatorios* y el *Diseño en Bloques Completos Aleatorizados.*

3. Diseño Completamente Aleatorio con efectos fijos (Diseño unifactorial de efectos fijos)

El primer diseño que presentamos es el diseño completamente aleatorio de efectos fijos y la técnica estadística es el análisis de la varianza de una vía o un factor. La descripción del diseño así como la terminología subyacente la vamos a introducir mediante el siguiente supuesto práctico.

Supuesto práctico 1
La contaminación es uno de los problemas ambientales más importantes que afectan a nuestro mundo. En las grandes ciudades, la contaminación del aire se debe a los escapes de gases de los motores de explosión, a los aparatos domésticos de la calefacción, a las industrias,… El aire contaminado nos afecta en nuestro vivir diario, manifestándose de diferentes formas en nuestro organismo. Con objeto de comprobar la contaminación del aire en una determinada ciudad, se ha realizado un estudio en el que se han analizado las concentraciones de monóxido de carbono (CO) durante cinco días de la semana (lunes, martes, miércoles, jueves y viernes)

Días de la semana	Concentraciones de monóxido de carbono							
Lunes	420	390	480	430	440	324	450	460
Martes	450	390	430	521	320	360	342	423
Miércoles	355	462	286	238	344	423	123	196
Jueves	321	254	412	368	340	258	433	489
Viernes	238	255	366	389	198	256	248	324

En el ejemplo disponemos de una colección de 40 unidades experimentales y queremos estudiar el efecto de las concentraciones de monóxido de carbono en 5 días distintos. Es decir, estamos interesados en contrastar el efecto de un solo factor, que se presenta con cinco niveles, sobre la variable respuesta.

Nos interesa saber si las concentraciones medias de monóxido de carbono son iguales en los cinco días de la semana, para ello realizamos el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 \equiv \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu \quad vs \quad H_1 \equiv \mu_i \neq \mu_j \quad \text{para algún } i \neq j$$

Es decir, contrastamos que no hay diferencia en las medias de los cinco tratamientos frente a la alternativa de que al menos una media difiere de otra.

Ana María Lara Porras
Profesora del Dpto. Estadística e IO
Universidad de Granada (España)

En este modelo, que estudia el efecto que produce un solo factor en la variable respuesta, la asignación de las unidades experimentales a los distintos niveles del factor se debe realizar de forma completamente al azar. Este modelo, junto con este procedimiento de asignación, recibe el nombre de *Diseño Completamente Aleatorizado* y está basado en el modelo estadístico de *Análisis de la Varianza de un Factor o una Vía*. Esta técnica estadística, Análisis de la Varianza de un factor, se utiliza cuando se tienen que comparar más de dos grupos y la variable respuesta es una variable numérica. Para aplicar este diseño adecuadamente las unidades experimentales deben ser lo más homogéneas posible.

Todo este planteamiento se puede formalizar de manera general para cualquier experimento unifactorial. Supongamos un factor con I niveles y para el nivel i-ésimo se obtienen n_i observaciones de la variable respuesta. Entonces podemos postular el siguiente modelo

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + u_{ij} \ , \ \ i = 1, \cdots, I \ ; \ \ j = 1, \cdots, n_i$$

donde:

y_{ij}: es la variable aleatoria que representa la observación j-ésima del i-ésimo tratamiento (Variable respuesta).

μ: Es un efecto constante, común a todos los niveles del factor, denominado media global.

τ_i: es la parte de y_{ij} debida a la acción del nivel i-ésimo, que será común a todos los elementos sometidos a ese nivel del factor, llamado efecto del tratamiento i-ésimo.

u_{ij} : son variables aleatorias que engloban un conjunto de factores, cada uno de los cuales influye en la respuesta sólo en pequeña magnitud pero que de forma conjunta debe tenerse en cuenta. Es decir, se pueden interpretar como las variaciones causadas por todos los factores no analizados y que dentro del mismo tratamiento variarán de unos elementos a otros. Reciben el nombre de perturbaciones o error experimental.

Nuestro objetivo es estimar el efecto de los tratamientos y contrastar la hipótesis de que todos los niveles del factor producen el mismo efecto, frente a la alternativa de que al menos dos difieren entre sí. Para ello, se supone que los errores experimentales son variables aleatorias independientes igualmente distribuidas según una Normal de media cero y varianza constante.

En este modelo se distinguen dos situaciones según la selección de los tratamientos: *modelo de efectos fijos* y *modelo de efectos aleatorios.*

En el *modelo de efectos fijos* el experimentador decide que niveles concretos se van considerar y las conclusiones que se obtengan sólo son aplicables a esos niveles, no pudiéndose hacer extensivas a otros niveles no incluidos en el estudio.

En el *modelo de efectos aleatorios*, los niveles del factor se seleccionan al azar; es decir los niveles estudiados son una muestra aleatoria de una población de niveles y las

conclusiones que se obtengan se generalizan a todos los posibles niveles del factor, hayan sido explícitamente considerados en el estudio o no.

En cuanto a los tamaños muestrales de los tratamientos, los modelos se clasifican en: *modelo equilibrado o balanceado* si todas las muestras son el mismo tamaño $n_i = n$ y *modelo no-equilibrado o no-balanceado* si los tamaños muestrales n_i son distintos.

El contraste de hipótesis planteado anteriormente está asociado a la descomposición de la variabilidad de la variable respuesta. Dicha variabilidad se descompone de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{SCT = SCTr + SCR}$$

Donde:

SCT: es la suma total de cuadrados o variabilidad total de ***Y,*** $SCT = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_{..}\right)^2$

SCTr: es la suma de cuadrados entre tratamientos o variabilidad explicada,

$$SCTr = \sum_{i=1}^{I} n_i \left(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..}\right)^2$$

SCR: es la suma dentro de los tratamientos, variabilidad no explicada o residual

$$SCR = \sum_{ij}\left(y_{ij} - \overline{y}_{i.}\right)^2$$

La tabla de análisis de la varianza (tabla ANOVA) se construye a partir de esta descomposición y proporciona el valor del estadístico F que permite contrastar la hipótesis nula planteada.

En el Supuesto práctico 1:

Variable respuesta: *Concentración de CO*
Factor: ***Día de la semana*** que tiene cinco niveles. Es un factor de **efectos fijos** ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar (5 días de la semana).
Modelo equilibrado: Los niveles de los factores tienen el mismo número de elementos (8 elementos)
Tamaño del experimento: Número total de observaciones, en este caso 40 unidades experimentales.

El problema planteado se modeliza a través de un **diseño unifactorial totalmente aleatorizado de efectos fijos equilibrado.**

Para realizarlo mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

- Nombre: ***Concentración_CO***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **3**
- Decimales: **0**

Ana María Lara Porras
Profesora del Dpto. Estadística e IO
Universidad de Granada (España)

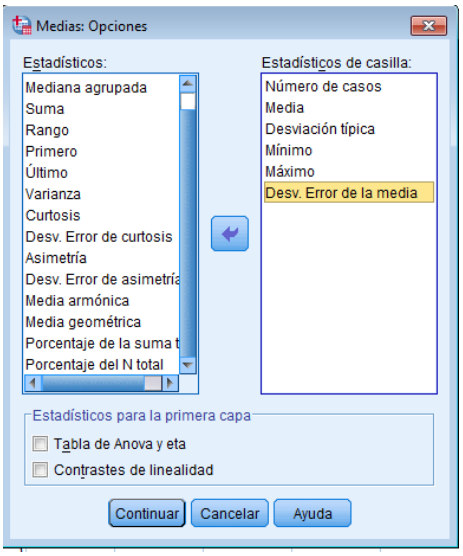
- Nombre: ***Día_semana***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **8**
- Decimales: **0**
- Valores: {**1, Lunes; 2, Martes; 3, Miércoles; 4, Jueves; 5, Viernes**}

	Concentración_CO	Días_Semana
1	420	Lunes
2	390	Lunes
3	480	Lunes
4	430	Lunes
5	440	Lunes
6	324	Lunes
7	450	Lunes
8	460	Lunes
9	450	Martes
10	390	Martes
11	430	Martes
12	521	Martes
13	320	Martes
14	360	Martes
15	342	Martes
16	423	Martes
17	355	Miércoles
18	462	Miércoles

En primer lugar describimos los cinco grupos que tenemos que comparar, los cinco días de la semana, la variable respuesta es la concentración de CO en estos días de la semana. Cada día de la semana tiene ocho unidades, en total tenemos 40 observaciones La hipótesis nula es que el promedio de las concentraciones es igual el día lunes que el martes, que el miércoles. Es decir, no ha diferencias en las concentraciones con respecto a los días y la alternativa es que las concentraciones de CO son diferentes en al menos en dos días.

Para la descripción de los cinco grupos comenzamos realizando un análisis descriptivo. Para ello, se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Comparar medias/medias**

se introduce en el campo **Lista de dependientes:** La variable respuesta ***Concentración_CO*** y en el campo **Lista de independientes:** el factor ***Día_semana*.** Se pulsa **Opciones** y se selecciona ***Número de casos, Media, Desviación típica, Mínimo, Máximo y Desviación Error de la media***.



Pulsar **Continuar** y **Aceptar** y se obtiene la siguiente salida

Informe

Concentración_CO

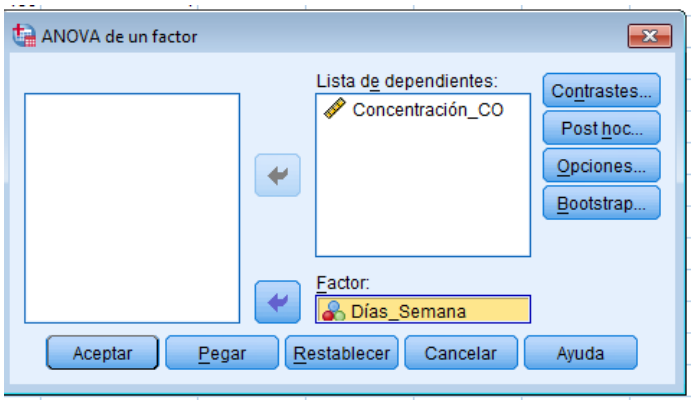
Días_Semana	N	Media	Desv. típ.	Mínimo	Máximo	Error típ. de la media
Lunes	8	424,25	48,655	324	480	17,202
Martes	8	404,50	65,326	320	521	23,096
Miércoles	8	303,38	114,909	123	462	40,626
Jueves	8	359,38	83,063	254	489	29,367
Viernes	8	284,25	67,381	198	389	23,823
Total	40	355,15	93,155	123	521	14,729

donde se presentan los cinco grupos dispuestos en forma comparativa. A simple vista se puede observar que el valor medio de estos grupos es numéricamente distinto, de hecho la media del día lunes tiene un valor medio casi equivalente al doble de la media del viernes. Por tanto, nuestra hipótesis se centra en comprobar si la concentración de CO es significativamente distinta en los cinco grupos. Para responder a esta hipótesis recurrimos al Análisis de la Varianza de un factor. Este contraste de igualdad de medias

$$H_0 \equiv \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu \quad vs \quad H_1 \equiv \mu_i \neq \mu_j \quad \text{para algún i \# j.}$$

Se puede realizar mediante SPSS de dos formas:

a) Se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Comparar medias/ANOVA de un factor…** En la salida correspondiente,



se introduce en el campo **Lista de dependientes:** La variable respuesta ***Concentración_CO*** y en el campo **Factor:** el factor ***Día_semana.*** Pulsando **Aceptar** se obtiene la Tabla ANOVA

ANOVA

Concentración_CO

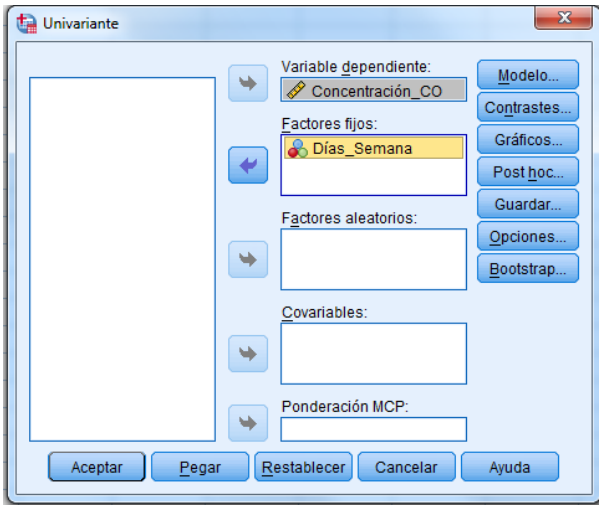
	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	119484,350	4	29871,088	4,775	,004
Intra-grupos	218948,750	35	6255,679		
Total	338433,100	39			

donde:
Inter-grupos: Representa la Suma de cuadrados debida a los tratamientos (SCTr)
Intra-grupos: Representa la suma de cuadrados residual (SCR)
Total: Representa la suma de cuadrados total (SCT).

Si el valor de **F** es mayor que uno quiere decir que hay un efecto positivo del factor día. Se observa que el P-valor (Sig.) tiene un valor de 0.004, que es menor que el nivel de significación 0.05. Por lo tanto, hemos comprobado estadísticamente que estos cinco grupos son distintos. Es decir no se puede rechazar la hipótesis alternativa que dice que al menos dos grupos son diferentes, pero ¿Cuáles son esos

grupos? ¿Los cinco grupos son distintos o sólo alguno de ellos? Pregunta que resolveremos más adelante mediante los contrastes de comparaciones múltiples.

b) Se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante…**



En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Variable dependiente:** La variable respuesta ***Concentración_CO*** y en el campo **Factores fijos:** el factor ***Día_semana.*** Pulsando **Aceptar** se obtiene la Tabla ANOVA

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Concentración_CO

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	119484,350[a]	4	29871,087	4,775	,004
Intersección	5045260,900	1	5045260,900	806,509	,000
Días_Semana	119484,350	4	29871,087	4,775	,004
Error	218948,750	35	6255,679		
Total	5383694,000	40			
Total corregida	338433,100	39			

a. R cuadrado = ,353 (R cuadrado corregida = ,279)

En la tabla correspondiente a las pruebas de los efectos inter-sujetos, se muestran el ***Origen*** denominado:

Modelo corregido: que recoge la suma de cuadrados asociadas a todos los factores que se incluyen en el modelo

Intersección: coincide con la expresión $n\bar{y}_{..}^2$

Días-semana: Representa la Suma de cuadrados debida a los tratamientos (SCTr), que viene identificada con el nombre de la variable que representa al factor.

Error: Representa la suma de cuadrados residual (SCR)

Total: Representa la suma de los cuadrados de todas las observaciones $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{8} y_{ij}^2$

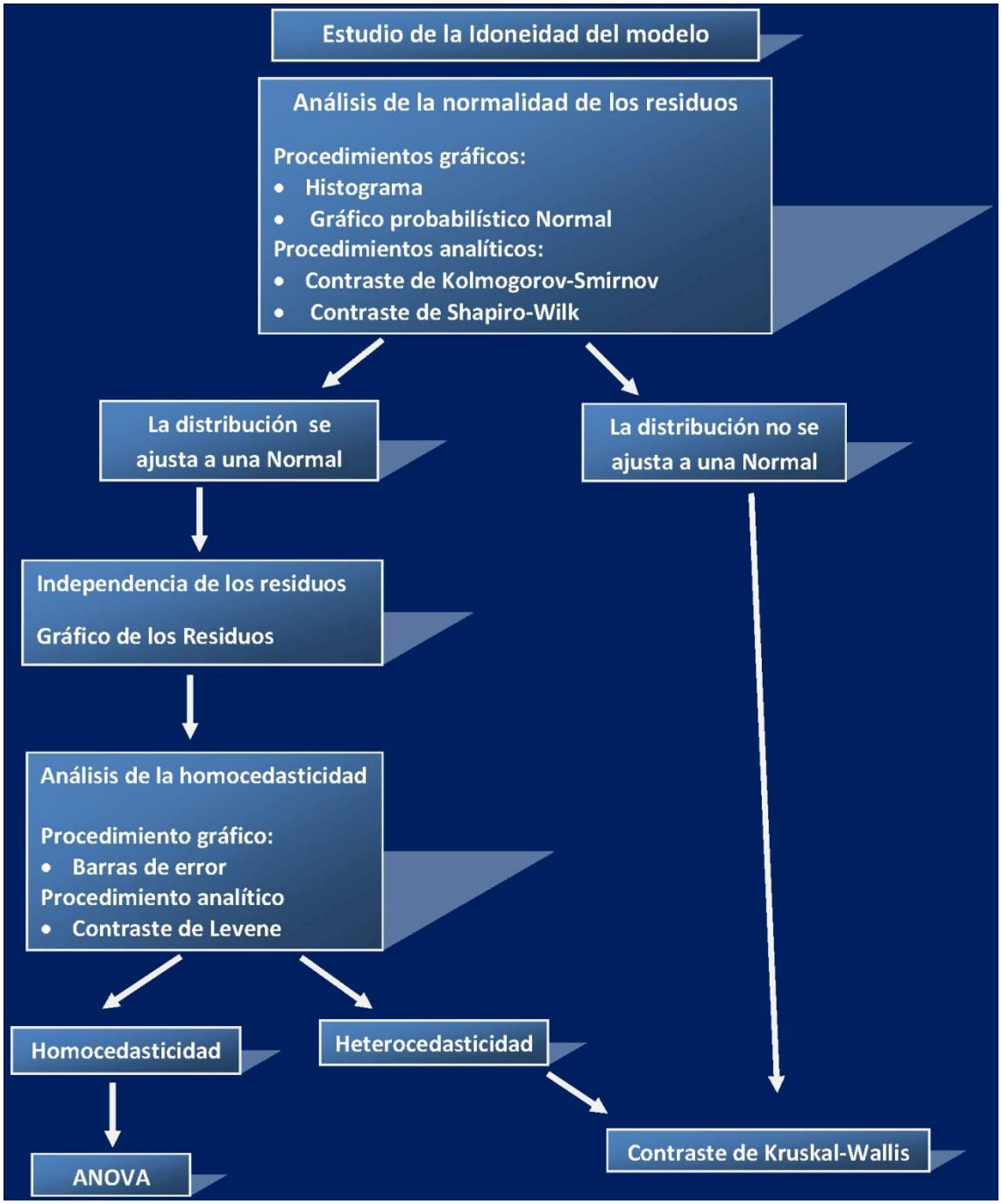
Total corregida: Representa la suma de cuadrados total (SCT). Por lo tanto, ***Intersección*** es la diferencia entre ***Total corregido*** y ***Total.***

En la *Tabla ANOVA*, el valor del estadístico de contraste de igualdad de medias, **F = 4.775** deja a su derecha un p-valor de 0.004, menor que el nivel de significación del 5%, por lo que se rechaza la Hipótesis nula de igualdad de medias. Es decir, existen diferencias significativas en las concentraciones medias de monóxido de carbono entre los cinco días de la semana.
La salida de SPSS también nos muestra que R cuadrado vale 0.353, indicándonos que el modelo explica el 35.3% de la variabilidad de los datos.

El modelo que hemos propuesto hay que validarlo, para ello hay que comprobar si se verifican las hipótesis básicas del modelo, es decir, si las perturbaciones son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 0 y varianza constante (homocedasticidad).

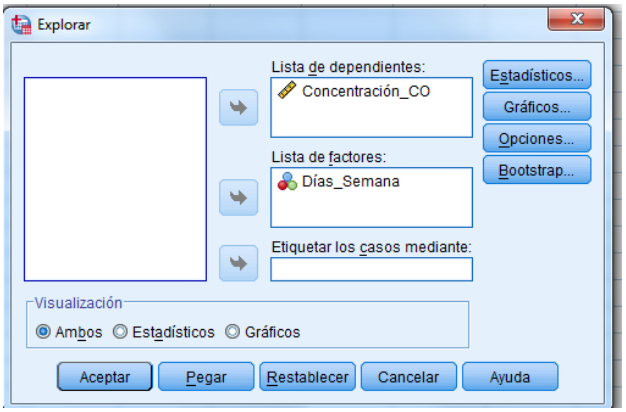
3.1 Estudio de la Idoneidad del modelo

Como hemos dicho anteriormente, validar el modelo propuesto consiste en estudiar si las hipótesis básicas del modelo están o no en contradicción con los datos observados. Es decir si se satisfacen los supuestos del modelo: Normalidad, Independencia, Homocedasticidad. Para ello utilizamos procedimientos gráficos y analíticos.

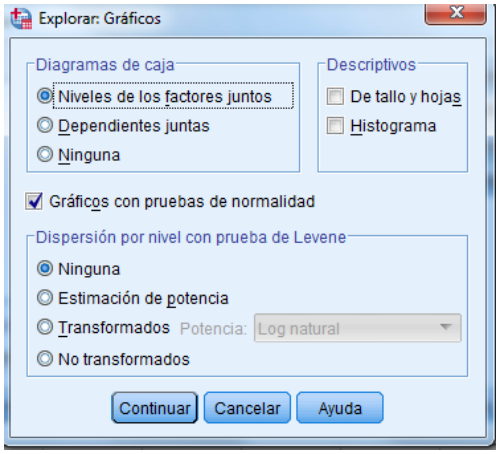


3.1.1. Hipótesis de normalidad

En primer lugar, analizamos la normalidad de las concentraciones y continuamos con el análisis de la normalidad de los residuos. Para analizar la normalidad de las concentraciones, se selecciona en el menú principal, **Analizar/Estadísticos descriptivos/Explorar…** y en la salida correspondiente



se introduce en el campo **Lista de dependientes:** La variable respuesta ***Concentración_CO*** y en el campo **Lista de Factores:** el factor ***Día_semana*.** En **Visualización** se selecciona **Ambos.** Se pulsa **Gráficos y** se selecciona **Gráficos con pruebas de normalidad**



Pulsando **Continuar** y **Aceptar** se obtiene los siguientes contrastes de normalidad

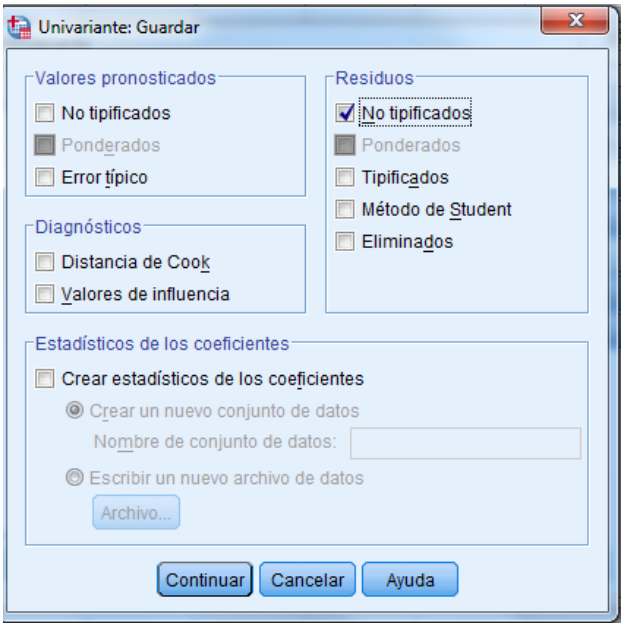
Pruebas de normalidad

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Días_Semana	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Concentración_CO	Lunes	,215	8	,200*	,903	8	,309
	Martes	,127	8	,200*	,966	8	,868
	Miércoles	,138	8	,200*	,978	8	,953
	Jueves	,139	8	,200*	,958	8	,787
	Viernes	,287	8	,050	,903	8	,308

a. Corrección de la significación de Lilliefors
*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

Observamos el contraste de Shapiro-Wilk que es adecuado cuando las muestras son pequeñas (n<50) y es una alternativa más potente que el test de Kolmogorov-Smirnov. Todos los p-valores (**Sig.**) son mayores que el nivel de significación 0.05. Concluyendo que las muestras de las concentraciones se distribuyen de forma normal en cada día de la semana.

Par analizar la hipótesis de normalidad de los residuos, se debe comenzar salvando los residuos. Para ello, se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante/Guardar…**

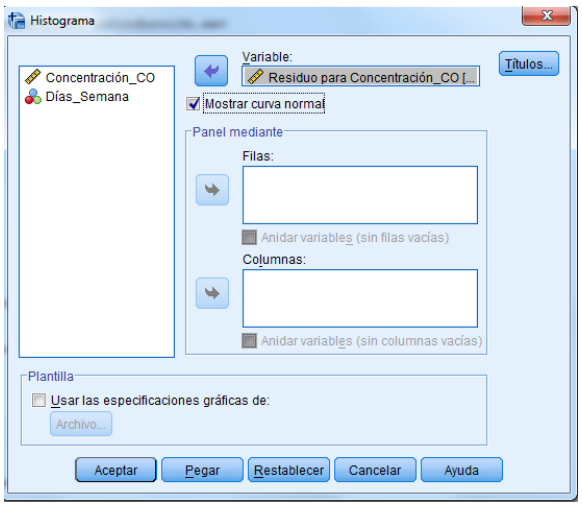


En la ventana resultante se selecciona **Residuos No tipificados.** Se pulsa, **Continuar** y **Aceptar.** Y en el ***Editor de datos*** se ha creado una nueva variable **RES_1** que contiene los residuos del modelo.

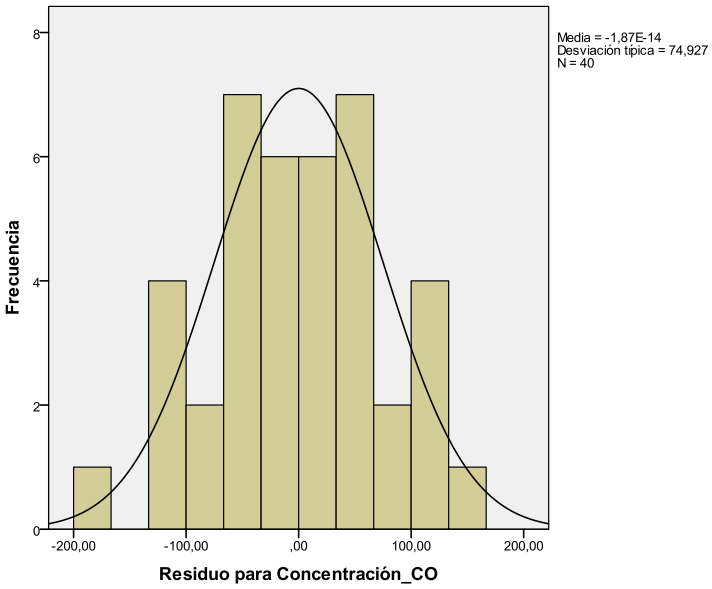
	Concentración_CO	Días_Sem...	RES_1
1	420	Lunes	-4,25
2	390	Lunes	-34,25
3	480	Lunes	55,75
4	430	Lunes	5,75
5	440	Lunes	15,75
6	324	Lunes	-100,25
7	450	Lunes	25,75
8	460	Lunes	35,75
9	450	Martes	45,50
10	390	Martes	-14,50
11	430	Martes	25,50
12	521	Martes	116,50
13	320	Martes	-84,50
14	360	Martes	-44,50

El estudio de la Normalidad de los residuos, lo realizamos mediante procedimientos gráficos **(Histograma y Gráfico probabilístico Normal) y** procedimientos analíticos **(Contraste de Kolmogorov-Smirnov)**

Histograma: Se selecciona en el menú principal, **Gráficos/Cuadros de diálogos antiguos/Histograma**

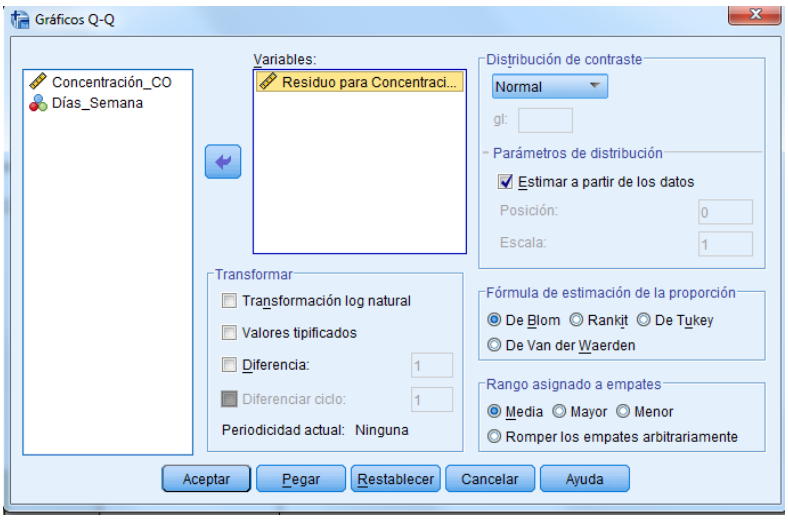


se introduce en el campo **Variable:** la variable que recoge los residuos **RES_1**, se selecciona **Mostrar curva normal**. Se pulsa **Aceptar**

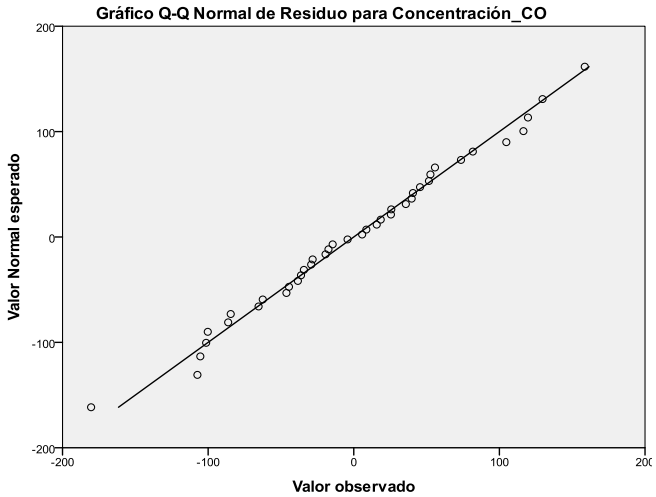


Aunque podemos observar en el histograma resultante algunas desviaciones de la normalidad, éstas no implican necesariamente la ausencia de normalidad de los residuos.

Gráfico probabilístico Normal: Se selecciona en el menú principal, **Analizar/Estadísticos descriptivos/Gráficos Q-Q**

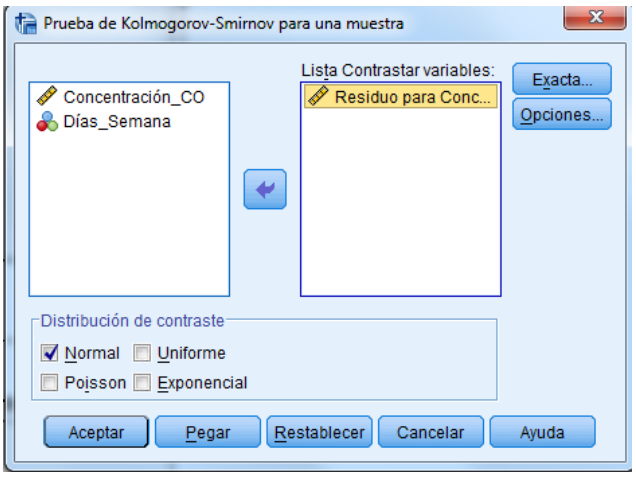


se introduce en el campo **Variables: RES_1**. Se pulsa **Aceptar**



Podemos apreciar en este gráfico que los puntos aparecen próximos a la línea diagonal. Esta gráfica no muestra una desviación marcada de la normalidad.

Contraste de Kolmogorov-Smirnov: Se selecciona en el menú principal, **Analizar/Pruebas no paramétricas/ Cuadros de diálogos antiguos/K-S de 1 muestra**



se introduce en el campo **Lista Contrastar variables: RES_1**. Se pulsa **Aceptar**

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

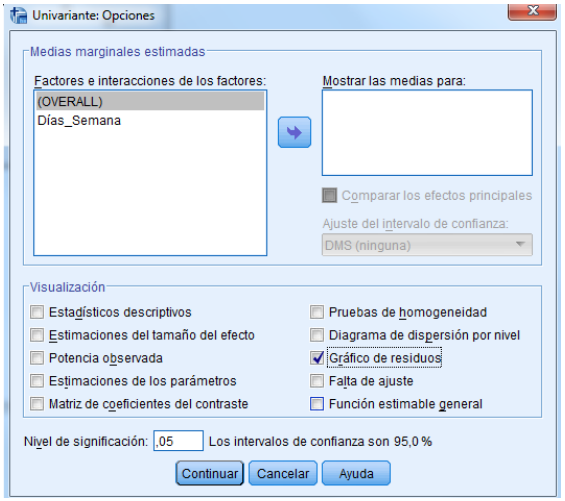
		Residuo para Concentración_CO
N		40
Parámetros normales[a,b]	Media	,0000
	Desviación típica	74,92710
Diferencias más extremas	Absoluta	,053
	Positiva	,053
	Negativa	-,051
Z de Kolmogorov-Smirnov		,338
Sig. asintót. (bilateral)		1,000

a. La distribución de contraste es la Normal.
b. Se han calculado a partir de los datos.

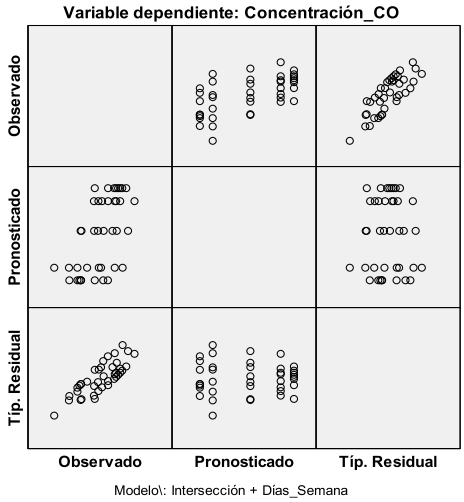
El valor del p-valor es mayor que el nivel de significación 0.05, no rechazándose la hipótesis de normalidad.

3.1. 2. Hipótesis de independencia

Para comprobar que se satisface el supuesto de independencia entre los residuos analizamos el gráfico de los residuos frente a los valores pronosticados o predichos por el modelo. El empleo de este gráfico es útil puesto que la presencia de alguna tendencia en el mismo puede ser indicio de una violación de dicha hipótesis. Para obtener dicho gráfico seleccionamos **Opciones** en el cuadro de diálogo de **Univariante** y marcamos la casilla **Gráfico de los residuos**

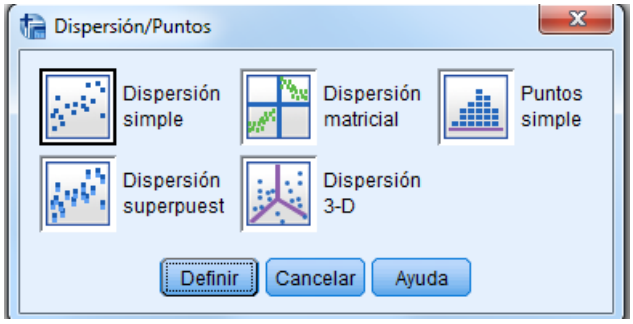


Se pulsa **Continuar** y **Aceptar**

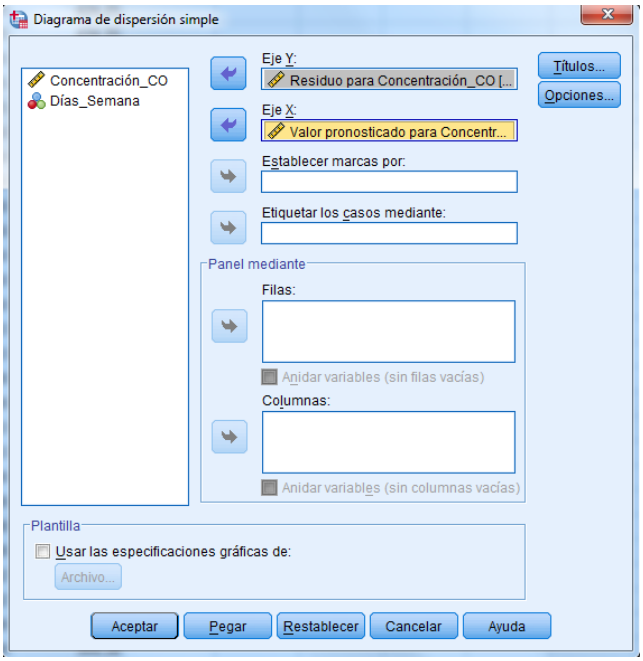


Interpretamos el gráfico que aparece en la fila 3 columna 2, es decir aquel gráfico que se representan los residuos en el eje de ordenadas y los valores pronosticados en el eje de abscisas. No observamos, en dicho gráfico, ninguna tendencia sistemática que haga sospechar del incumplimiento de la suposición de independencia.

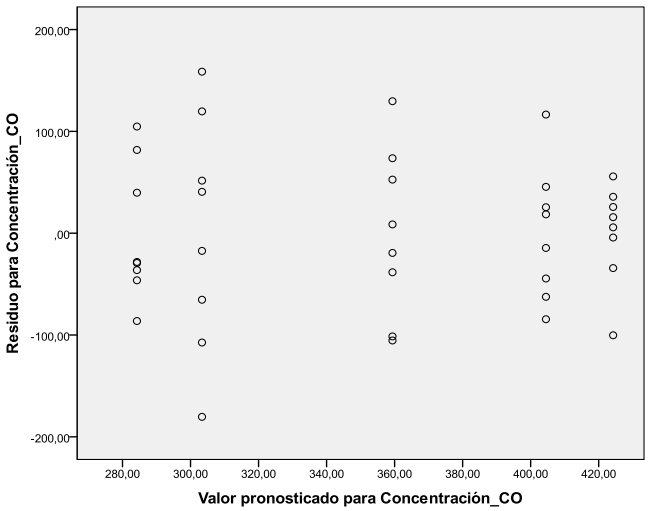
También, podemos realizar un gráfico de dispersión de los residuos y las predicciones, para ello, tenemos que guardar los valores predichos. Se selecciona, en la ventana **Univariante, /Guardar.** En la ventana resultante se selecciona **Valores pronosticados No tipificados.** Se pulsa, **Continuar** y **Aceptar.** Y en el ***Editor de datos*** se ha creado una nueva variable **PRE_1** que contiene los valores predichos por el modelo. Realizamos el gráfico de dispersión, para ello se selecciona en el menú principal, **Gráficos/Cuadros de diálogos antiguos/Diagramas/Puntos**



Y en la salida correspondiente seleccionar **Dispersión simple** y pulsar **Definir**

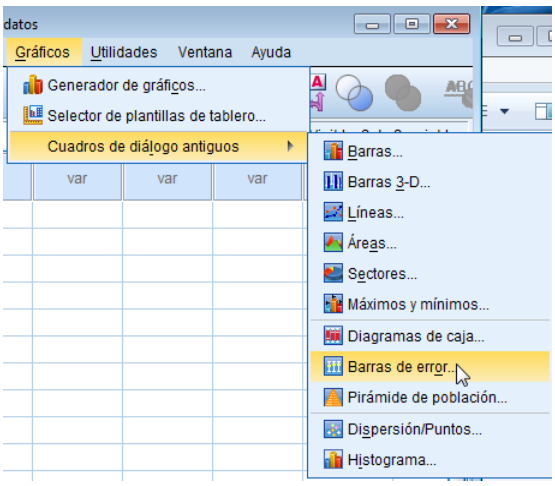


se introduce en el **Eje Y:** Los **residuo**s y el **Eje X**: Los **valores predichos**. Se pulsa **Aceptar**

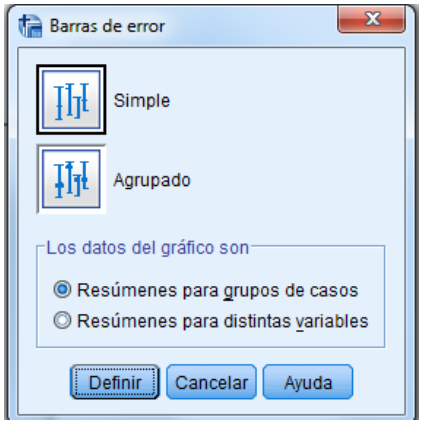


3.1.3. Hipótesis de homocedasticidad

En primer lugar comprobamos la homocedasticidad gráficamente, para ello se selecciona en el menú principal, **Gráficos/Cuadros de diálogos antiguos/Barras de error…**

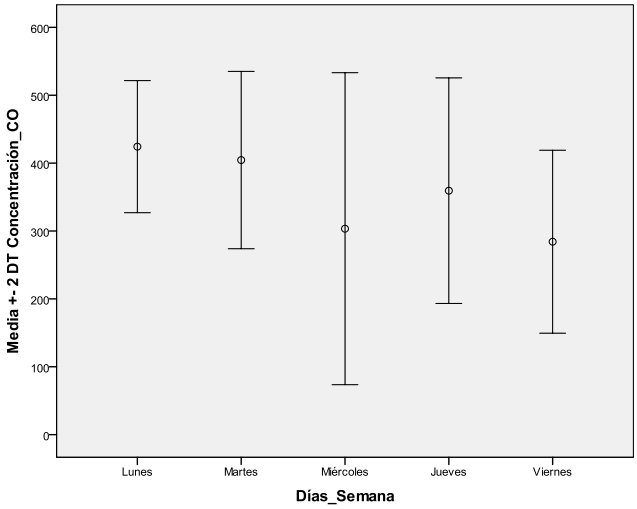


Y en la salida correspondiente seleccionar

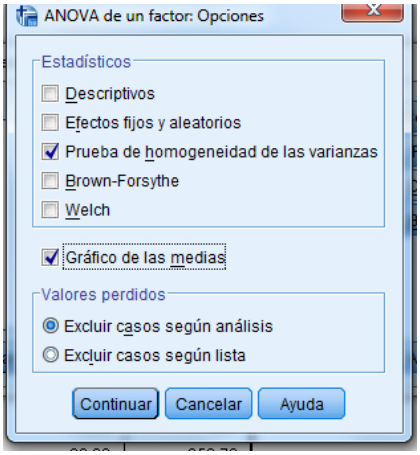


Simple y pulsar **Definir**

se introduce en el campo **Variable:** La variable respuesta ***Concentración_CO*** y en el campo **Eje de categorías:** el factor ***Día_semana.*** En **Las barras representan** se selecciona **Desviación típica**, en **Multiplicador: 2** (nos interesa que la desviación típica esté multiplicada por dos). Se pulsa **Aceptar**



Cada grupo tiene su promedio (el círculo en cada una de las barras) y dos desviaciones típicas a la izquierda y dos desviaciones típicas a la derecha del promedio. Observamos que el miércoles hay mucha más dispersión que el resto de los días y donde hay menos dispersión es el lunes, la dispersión del martes y viernes son muy similares. Del gráfico no se deduce directamente si hay homogeneidad en estas varianzas, por lo que recurrimos analizarlo analíticamente mediante una prueba el test de Levene.
Para realizar el test de Levene mediante SPSS, en la ventana de **ANOVA de un factor…** pulsar **Opciones**



Se selecciona **Prueba de homogeneidad de las varianzas** y **Gráfico de las medias.** Se pulsa **Continuar y Aceptar**

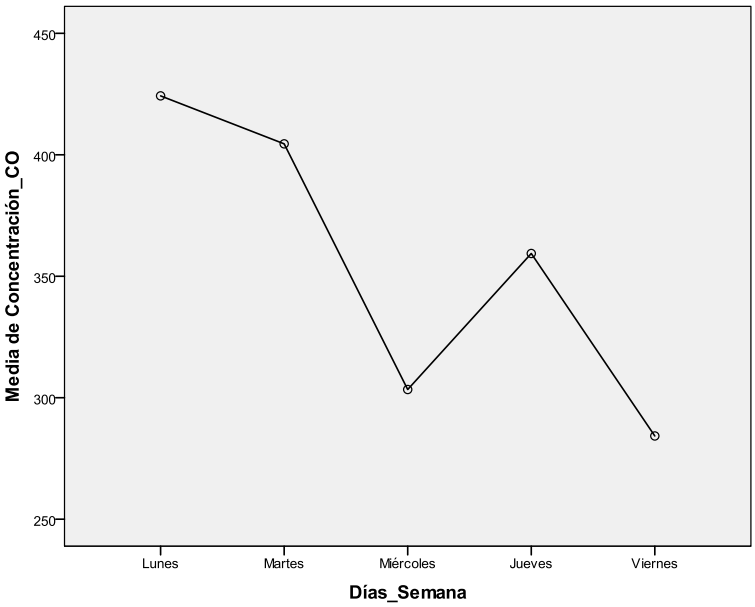
Prueba de homogeneidad de varianzas

Concentración_CO

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
2,171	4	35	,093

El p-valor es 0.093 por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis de homogeneidad de las varianzas y se concluye que los cinco grupos tienen varianzas homogéneas. Si esta prueba sale significativa, es decir si la homocedasticidad no se cumple, en ese caso SPSS dispone de una prueba alternativa que veremos en los contrastes Post-hoc.

Una vez comprobado que se verifican las hipótesis del modelo se puede interpretar la tabla ANOVA. Si alguna de las hipótesis de homocedasticidad e independencia fallase no debería aplicarse el ANOVA, en cuanto a la hipótesis de Normalidad hay que tener en cuenta que las pruebas ANOVA son robustas antes leves desviaciones de la normalidad.



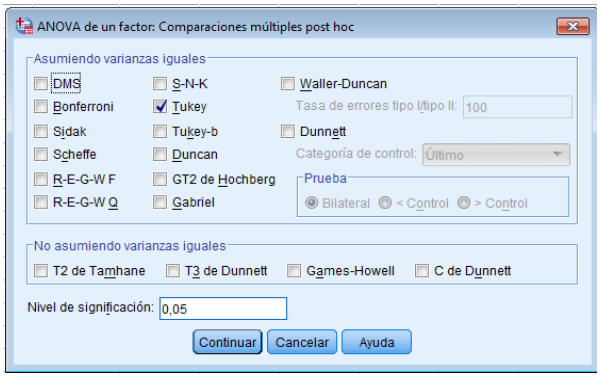
El p-valor es 0.093 por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis de homogeneidad de las varianzas y se concluye que los cinco grupos tienen varianzas homogéneas. Si esta prueba sale significativa, es decir si la homocedasticidad no se cumple, en ese caso SPSS dispone de una prueba alternativa que veremos en los contrastes Post-hoc.

Una vez comprobado que se verifican las hipótesis del modelo se puede interpretar la tabla ANOVA. Si alguna de las hipótesis de homocedasticidad e independencia fallase no debería aplicarse el ANOVA, en cuanto a la hipótesis de Normalidad hay que tener en cuenta que las pruebas ANOVA son robustas antes leves desviaciones de la normalidad.

Antes de resolver el contraste de igualdad de medias observemos este gráfico de medias, donde en el eje de ordenadas figura las concentraciones medias de CO y en el eje de abscisas los días de la semana. En esta gráfica observamos que la mayor concentración de CO se produce el lunes y las más bajas el miércoles y el viernes, siendo la concentración de este último la menor. Para saber entre que parejas de días estas diferencias son significativas aplicamos una prueba Post-hoc

3.2. Comparaciones múltiples

En **Analizar/Comparar medias/ANOVA de un factor…** pulsamos en **Post_hoc…**



En la ventana resultante seleccionamos, por ejemplo, **Tukey.** Si no se verifica la hipótesis homocedasticidad se tiene que utilizar una de las pruebas que figura en **No asumiendo varianzas iguales.** Se pulsa **Continuar** y **Aceptar**

Comparaciones múltiples

Concentración_CO
HSD de Tukey

(I) Días_Semana	(J) Días_Semana	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.	Intervalo de confianza al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
Lunes	Martes	19,750	39,546	,987	-93,95	133,45
	Miércoles	120,875*	39,546	,033	7,18	234,57
	Jueves	64,875	39,546	,483	-48,82	178,57
	Viernes	140,000*	39,546	,010	26,30	253,70
Martes	Lunes	-19,750	39,546	,987	-133,45	93,95
	Miércoles	101,125	39,546	,101	-12,57	214,82
	Jueves	45,125	39,546	,784	-68,57	158,82
	Viernes	120,250*	39,546	,034	6,55	233,95
Miércoles	Lunes	-120,875*	39,546	,033	-234,57	-7,18
	Martes	-101,125	39,546	,101	-214,82	12,57
	Jueves	-56,000	39,546	,622	-169,70	57,70
	Viernes	19,125	39,546	,988	-94,57	132,82
Jueves	Lunes	-64,875	39,546	,483	-178,57	48,82
	Martes	-45,125	39,546	,784	-158,82	68,57
	Miércoles	56,000	39,546	,622	-57,70	169,70
	Viernes	75,125	39,546	,336	-38,57	188,82
Viernes	Lunes	-140,000*	39,546	,010	-253,70	-26,30
	Martes	-120,250*	39,546	,034	-233,95	-6,55
	Miércoles	-19,125	39,546	,988	-132,82	94,57
	Jueves	-75,125	39,546	,336	-188,82	38,57

*. La diferencia de medias es significativa al nivel 0.05.

Esta salida nos muestra los intervalos de confianza simultáneos construidos por el método de Tukey. En la tabla se muestra un resumen de las comparaciones de cada tratamiento con los restantes. Es decir, aparecen comparadas dos a dos las cinco medias de los tratamientos. En el primer bloque de la tabla se muestran comparadas la media del lunes con la media de los otros cuatro días de la semana. En los siguientes bloques se muestran comparadas las restantes medias entre sí. En la columna **Diferencias de medias (I-J)** se muestran las diferencias entre las medias que se comparan. En la columna **Sig.** aparecen los p-valores de los contrastes, que permite conocer si la diferencia entre cada pareja de medias es significativa al nivel de significación considerado (en este caso 0.05) y la última columna proporciona los intervalos de confianza al 95% para cada diferencia. Así por ejemplo, si comparamos la concentración media de CO del lunes con el martes, tenemos una diferencia entre ambas

medias de 19.750, un error típico de 39.546, que es un error típico para la diferencia de estas medias, un P-valor (Sig.) de 0.987 no significativo puesto que la concentración de CO no difiere significativamente el lunes del martes y un intervalo de confianza con un límite inferior negativo y un límite superior positivo y por lo tanto contiene al cero de lo que también deducimos que no hay diferencias significativas entre los dos grupos que se comparan o que ambos grupos son homogéneos. En cambio si observamos el grupo formado por el lunes y el miércoles, vemos que ambos extremos del intervalo son del mismo signo y el P-valor es significativo deduciendo que si hay diferencias significativas entre ambos Ya se había observado que la concentración media de CO el miércoles era muy inferior al lunes, de hecho el valor de la diferencia de medias es 120.875. Las otras comparaciones se interpretan de forma análoga. Por lo tanto la tabla se interpreta observando los valores de **Sig** menores que el 5%, o si el intervalo de confianza contiene al cero. Además, los contrastes que sí han resultado significativos al nivel de significación 0.05 aparecen marcados con asterisco. Concluimos que se detectan diferencias significativas en las concentraciones de CO entre lunes y miércoles, lunes y viernes, martes y viernes.

Para que se pueda analizar esta tabla más fácilmente, trasladamos la columna **Sig**. A la primera columna, para ello hacemos doble Click en cualquier lugar de la tabla, nos posicionamos en la cabecera de la columna de **Sig.** y con el botón izquierdo del ratón la arrastramos al lugar que queramos (primera posición) y allí la soltamos. Aparecen dos opciones

(I) Días_Semana	(J) Días_Semana	Diferencia de medias (I-J)		Sig.	Intervalo de confianza al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
Lunes	Martes	19,7		,987	-93,95	133,45
	Miércoles	120,87		,033	7,18	234,57
	Jueves	64,875	39,546	,483	-48,82	178,57
	Viernes	140,000*	39,546	,010	26,30	253,70
Martes	Lunes	-19,750	39,546	,987	-133,45	93,95

Insertar antes
Intercambiar

Seleccionamos **Insertar antes.** Y se muestra la salida se la siguiente forma

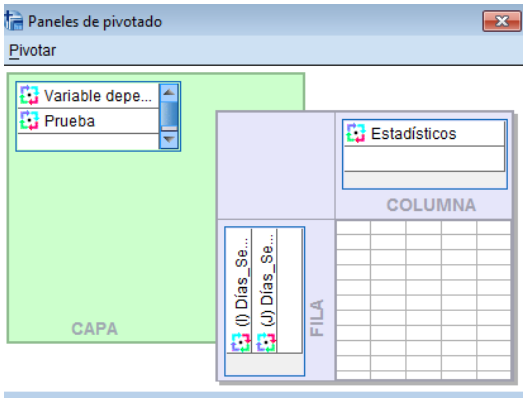
Comparaciones múltiples

Concentración_CO
HSD de Tukey

(I) Días_Semana	(J) Días_Semana	Sig.	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Intervalo de confianza al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
Lunes	Martes	,987	19,750	39,546	-93,95	133,45
	Miércoles	,033	120,875*	39,546	7,18	234,57
	Jueves	,483	64,875	39,546	-48,82	178,57
	Viernes	,010	140,000*	39,546	26,30	253,70
Martes	Lunes	,987	-19,750	39,546	-133,45	93,95
	Miércoles	,101	101,125	39,546	-12,57	214,82
	Jueves	,784	45,125	39,546	-68,57	158,82
	Viernes	,034	120,250*	39,546	6,55	233,95
Miércoles	Lunes	,033	-120,875*	39,546	-234,57	-7,18
	Martes	,101	-101,125	39,546	-214,82	12,57
	Jueves	,622	-56,000	39,546	-169,70	57,70
	Viernes	,988	19,125	39,546	-94,57	132,82
Jueves	Lunes	,483	-64,875	39,546	-178,57	48,82
	Martes	,784	-45,125	39,546	-158,82	68,57
	Miércoles	,622	56,000	39,546	-57,70	169,70
	Viernes	,336	75,125	39,546	-38,57	188,82
Viernes	Lunes	,010	-140,000*	39,546	-253,70	-26,30
	Martes	,034	-120,250*	39,546	-233,95	-6,55
	Miércoles	,988	-19,125	39,546	-132,82	94,57
	Jueves	,336	-75,125	39,546	-188,82	38,57

*. La diferencia de medias es significativa al nivel 0.05.

En el menú principal seleccionamos **Pivotar/Paneles** de pivotado



Los Días_Semana están en fila y los arrastramos para que figuren en columnas, quedando la siguiente tabla

Variable dependiente: Concentración_CO
Prueba: HSD de Tukey

	Sig.				
	(I) Días_Semana				
(J) Días_Semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Lunes		,987	,033	,483	,010
Martes	,987		,101	,784	,034
Miércoles	,033	,101		,622	,988
Jueves	,483	,784	,622		,336
Viernes	,010	,034	,988	,336	

*. La diferencia de medias es significativa al nivel 0.05.

De esta forma es más cómodo comparar cualquier pareja de días para saber si hay diferencias significativas. De la tabla se deduce que hay diferencias significativas entre lunes y miércoles, lunes y viernes, martes y viernes.
Además de la tabla de Comparaciones múltiples también se muestra una tabla de subconjuntos homogéneos

Subconjuntos homogéneos

Concentración_CO

DHS de Tukey[a,b]

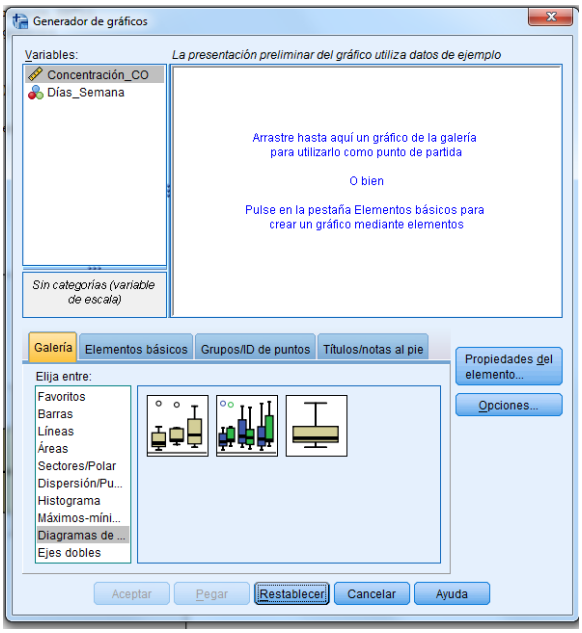
		Subconjunto		
Días_Semana	N	1	2	3
Viernes	8	284,25		
Miércoles	8	303,38	303,38	
Jueves	8	359,38	359,38	359,38
Martes	8		404,50	404,50
Lunes	8			424,25
Sig.		,336	,101	,483

Se muestran las medias de los grupos de subconjuntos homogéneos.
Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática(Error) = 6255,679.

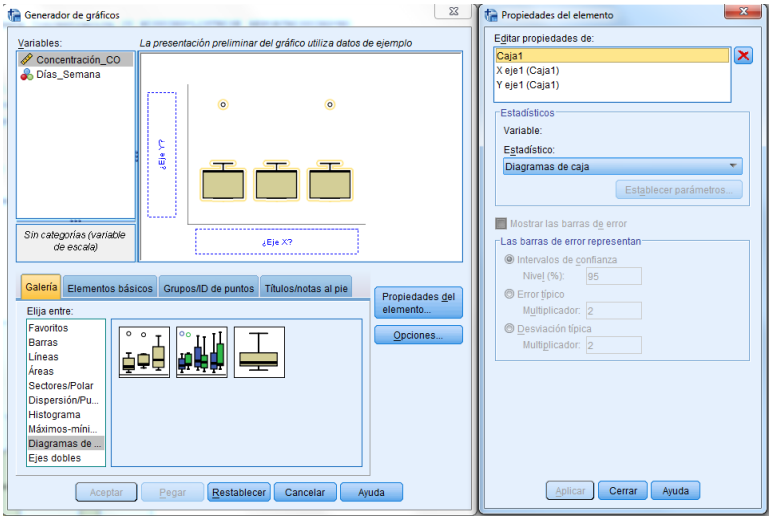
a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 8,000
b. Alfa = 0,05.

La tabla de subconjuntos homogéneos muestra por columnas los subgrupos de medias iguales, formados al utilizar el método de Tukey. Se llama de *Prueba de subgrupos homogéneos* por que se agrupan en columnas aquellos grupos que no difieren significativamente. Se observa que la prueba de Tukey ha agrupado los días viernes, miércoles y jueves en una misma columna, miércoles, jueves y martes en otra columna y jueves, martes y lunes en una tercera columna. De esta forma gráfica deducimos que subgrupos son homogéneos y cuales difieren significativamente.
Los subgrupos homogéneos son los formados por: viernes, miércoles y jueves; miércoles, jueves y martes y jueves, martes y lunes. De hecho, si comparamos en el primer subconjunto, los tres primeros grupos el P-valor (Sig.) es 0.336 mayor que el nivel de significación 0.05 deduciendo que no hay diferencias significativas en la concentración media de CO entre estos tres.
También se deduce que subconjuntos difieren significativamente entre sí. La concentración de CO en el primer subconjunto difiere de la concentración en el segundo y de la concentración en el tercero y dentro de estos subconjuntos no se aprecian diferencias significativas. También se observa que la concentración media de CO es mayor los lunes (424,25) y menor los viernes (284,25).

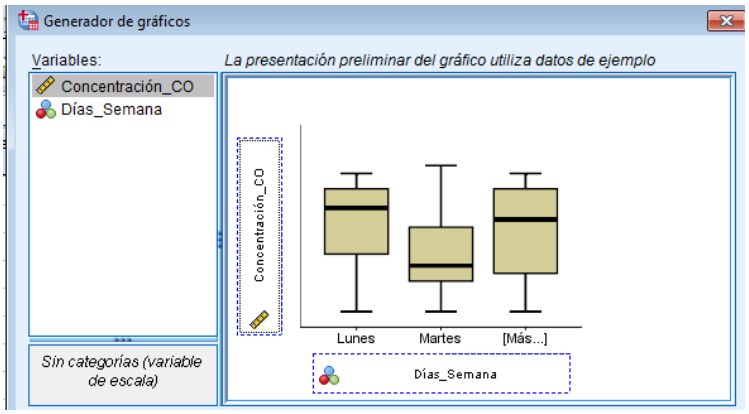
Veamos estas diferencias de una forma gráfica, para ello se selecciona en el menú principal, **Gráficos/Generador de gráficos…**



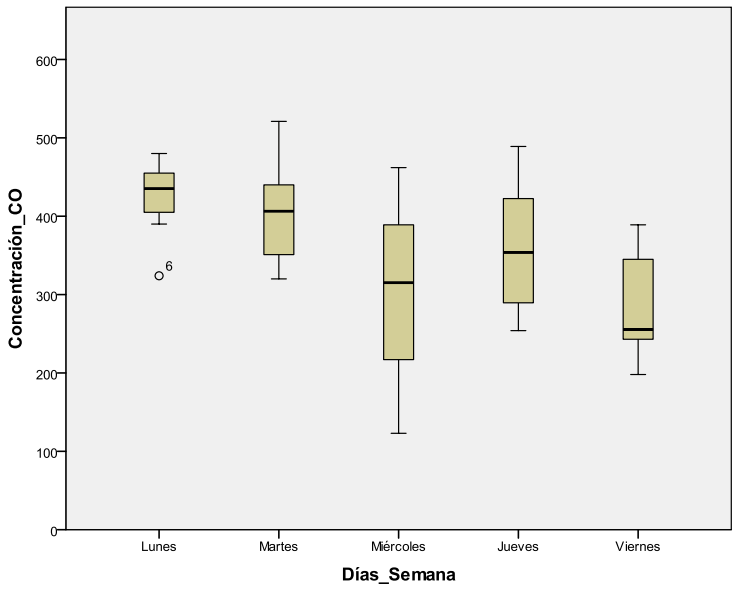
Se selecciona el **Diagrama de cajas** y se arrastra el diagrama de caja simple (el primer gráfico) a la ventana que hay encima. Se pulsa **Aceptar**



Se sitúa **Días_Semana** en el eje **X** y la **Concentración_CO** en el eje **Y**



Se pulsa **Aceptar** y se obtiene la siguiente salida



Observamos que las cajas correspondientes a los miércoles, jueves y viernes están prácticamente superpuestas, de hecho el valor mediano del miércoles (línea negra dentro de las cajas) está a un nivel interno dentro de la caja del jueves y de la caja del viernes, es un criterio que se utiliza para comparar grupos y en este caso nos indica que hay homogeneidad o que no hay diferencias significativas en ese grupo de medias. Observamos que el lunes tiene una distribución superior a los demás, por lo que concluimos que la concentración de CO es mucho mayor este día de la semana.

3.3. Contrastes

Se denomina **Contraste** a toda combinación lineal ***C,*** de los parámetros del modelo de análisis de la varianza de la forma

$$C = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + ... + a_I\mu_I \qquad \text{los coeficientes verifican} \qquad \sum_{i=1}^{I} a_i = 0$$

Se utilizan para comparar tratamientos entre sí o grupos de tratamientos, así por ejemplo:

- Para comparar dos días entre sí, por ejemplo el lunes y jueves el contraste debe tener los siguientes coeficientes:

L	Ma	Mi	J	V
1	**0**	**0**	**-1**	**0**

  Es decir, los coeficientes de las dos categorías que se van a comparar deben sumar cero y los días que no se van a comparar deben tener un coeficiente de 0

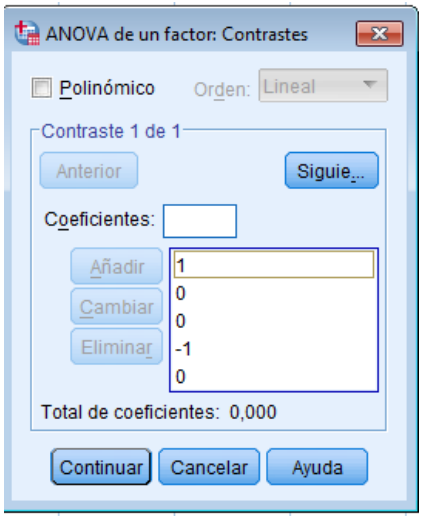
- Para compara grupos de días, por ejemplo el grupo formado por el lunes y miércoles con el formado por el martes y viernes, en este caso los coeficientes deben ser

L	Ma	Mi	J	V
0.5	**-0.5**	**0.5**	**0**	**-0.5**

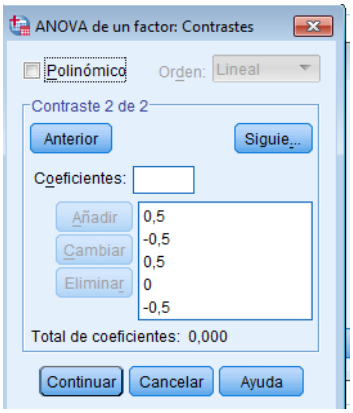
  Los grupos que se comparan deben sumar uno de ellos 1 y el otro -1. La suma de los coeficientes debe ser cero.
- Para realizar el contraste: $H_0 : 2\mu_1 = \mu_3 + \mu_4 \quad vs \quad H_1 : 2\mu_1 \neq \mu_3 + \mu_4$

L	Ma	Mi	J	V
2	**0**	**-1**	**-1**	**0**

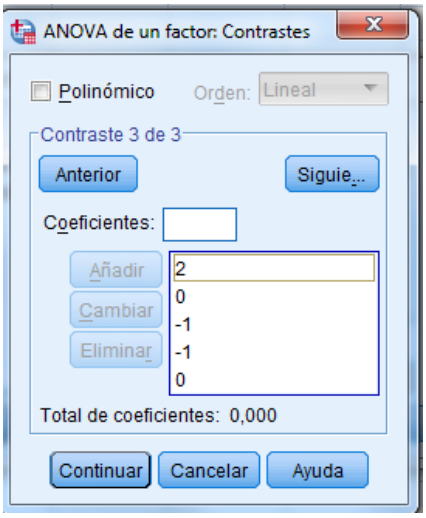
Para realiza estos contrastes con SPSS, se selecciona En **Analizar/Comparar medias/ANOVA de un factor…** pulsamos en **Contrastes…**



Para el primer contraste, en **Coeficientes** se pone 1, 0, 0, -1, 0. Como hay cinco tratamientos deben figurar cinco números indicando los 0 las categorías que no se comparan. Si queremos realizar otro contraste pulsamos **Siguie_**e introducimos los coeficientes del segundo contraste



pulsamos **Siguie_**e introducimos los coeficientes del tercer contraste



Pulsamos **Continuar** y **Aceptar.** Se muestra la tabla de contrastes con los coeficientes indicando los contrastes que se van a realizar

Coeficientes de los contrastes

Contraste	Días_Semana				
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1	1	0	0	-1	0
2	,5	-,5	,5	0	-,5
3	2	0	-1	-1	0

Y la prueba t para los contrastes

Pruebas para los contrastes

		Contraste	Valor del contraste	Error típico	t	gl	Sig. (bilateral)
Concentración_CO	Asumiendo igualdad de varianzas	1	64,88	39,546	1,640	35	,110
		2	19,44	27,964	,695	35	,492
		3	185,75	68,496	2,712	35	,010
	No asumiendo igualdad de varianzas	1	64,88	34,034	1,906	11,298	,082
		2	19,44	27,602	,704	19,017	,490
		3	185,75	60,800	3,055	19,645	,006

Para interpretar la tabla, asumimos en todos los contrastes la homocedasticidad, aunque sólo la hemos comprobado para cada uno de los tratamientos y no lo hemos hecho en grupos.
Observamos que para el primer contraste, las concentraciones de CO para el lunes y jueves ha dado no significativo, P-valor es 0.110.
En el segundo contraste se quiere comparar las concentraciones de CO de lunes y miércoles en conjunto con las concentraciones de CO el martes y viernes también en conjunto, en este contraste el P-valor es 0.492 por lo tanto no hay diferencias significativas entre los dos grupos comparados.
En el tercer contraste se quiere comprobar si el lunes hay el doble de concentración de CO que el miércoles y jueves conjuntamente. El P-valor es 0.010 por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se deduce que el doble de la concentración de CO el lunes difiere significativamente de las concentraciones de los días miércoles y jueves, conjuntamente.

4. Diseño Unifactorial de efectos aleatorios

En el modelo de efectos aleatorios, los niveles del factor son una muestra aleatoria de una población de niveles. Este modelo surge ante la necesidad de estudiar un factor que presenta un número elevado de posibles niveles, que en algunas ocasiones puede ser infinito. En este modelo las conclusiones obtenidas se generalizan a toda la población de niveles del factor, ya que los niveles empleados en el experimento fueron seleccionados al azar. El estudio de este diseño lo vamos a realizar mediante el siguiente supuesto práctico.

Supuesto práctico 2
Los medios de cultivo bacteriológico en los laboratorios de los hospitales proceden de diversos fabricantes. Se sospecha que la calidad de estos medios de cultivo varía de un

fabricante a otro. Para comprobar esta teoría, se hace una lista de fabricantes de un medio de cultivo concreto, se seleccionan aleatoriamente los nombres de cinco de los que aparecen en la lista y se comparan las muestras de los instrumentos procedentes de éstos. La comprobación se realiza colocando sobre una placa dos dosis, en gotas, de una suspensión medida de un microorganismo clásico, *Escherichia coli*, dejando al cultivo crecer durante veinticuatro horas, y determinando después el número de colonias (en millares) del microorganismo que aparecen al final del período. Se quiere comprobar si la calidad del instrumental difiere entre fabricantes.

Fabricantes	**Número de colonias (en millares)**								
Fabricante1	120	240	300	360	240	180	144	300	240
Fabricante2	240	360	180	180	300	240	360	360	360
Fabricante3	240	270	300	360	360	300	360	360	300
Fabricante4	300	240	300	360	360	360	360	360	300
Fabricante5	300	360	240	360	360	360	360	300	360

Supuestos del modelo

1. Las 5 muestras representan muestras aleatorias independientes extraídas de *I* poblaciones seleccionadas aleatoriamente de un conjunto mayor de poblaciones.
2. Todas las poblaciones del conjunto más amplio son normales, de modo que cada una de las 5 poblaciones muestreadas es también normal.
3. Todas las poblaciones del conjunto más amplio tienen la misma varianza, y por lo tanto, cada una de las 5 poblaciones muestreadas tiene también varianza σ^2.
4. Las variables τ_i son variables aleatorias normales independientes, cada una con media 0 y varianza común σ_τ^2.

El modelo matemático de este diseño y los tres primeros supuestos del modelo son semejantes a los del modelo de efectos fijos. Sin embargo, el supuesto 4 expresa matemáticamente una importante diferencia entre los dos. En el modelo de efectos fijos, el experimentador elige los tratamientos o niveles del factor utilizados en el experimento. Si se replicase el experimento, se utilizarían los mismos tratamientos. Es decir, se muestrearían las mismas poblaciones cada vez y los *I* efectos del tratamiento $\tau_i = \mu_i - \mu$ no variarían. Esto implica que en el modelo de efectos fijos, estos *I* términos se consideran constantes desconocidas. En el modelo de efectos aleatorios se seleccionan aleatoriamente *I* poblaciones, las elegidas variarán de replicación en replicación. De este modo, en este modelo los *I* términos $\mu_i - \mu$ no son constantes, son variables aleatorias, cuyos valores para una determinada replicación depende de la elección de las *I* poblaciones a estudiar. En este modelo estas variables τ_i se suponen variables aleatorias normales independientes con media 0 y varianza común σ_τ^2. Además este modelo requiere que las variables τ_i y u_{ij} sean independientes. Así por la independencia de estas variables la varianza de cualquier observación de la muestra, es decir, la varianza total σ_T^2 vale $\sigma_T^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma^2$.

La mecánica del Análisis de la Varianza es la misma que en el modelo de efectos fijos. En este modelo, carece de sentido probar la hipótesis que se refiere a los efectos de los tratamientos individuales. Si las medias poblacionales en el conjunto mayor son iguales, no variarán los efectos del tratamiento $\tau_i = \mu_i - \mu$. Es decir, $\sigma_\tau^2 = 0$. Así en el modelo de efectos aleatorios, la hipótesis de medias iguales se contrasta considerando:

$$H_0 \equiv \sigma_\tau^2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 \equiv \sigma_\tau^2 \neq 0$$

Si no se rechaza H_0, significa que no hay variedad en los efectos de los tratamientos.

Volvamos al supuesto práctico 2 donde:

Variable respuesta: *Calidad_Instrumental*
Factor: ***Fabricante***. Es un factor de **efectos aleatorios,** se han elegido aleatoriamente a cinco fabricantes y únicamente constituyen una muestra de todos los fabricantes de instrumentos y el propósito no es comparar estos cinco fabricantes sino contrastar el supuesto general de que la calidad del instrumental difiere entre fabricantes.
Modelo equilibrado: Los niveles de los factores tienen el mismo número de elementos (9 elementos)
Tamaño del experimento: Número total de observaciones, en este caso 45 unidades experimentales.

El problema planteado se modeliza a través de un **diseño unifactorial totalmente aleatorizado de efectos aleatorios equilibrado.**

Para realizarlo mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

- Nombre: ***Calidad_Instrumental***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **3**
- Decimales: **0**

- Nombre: ***Fabricante***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **8**
- Decimales: **0**
- Valores: {**1, Fabricante1; 2, Fabricante2; 3, Fabricante3; 4, Fabricante4; 5, Fabricante** 5}

Se quiere comprobar si la calidad del instrumental difiere entre fabricantes, por lo que hay que resolver el contraste $H_0 \equiv \sigma_\tau^2 = 0$ vs $H_1 \equiv \sigma_\tau^2 \neq 0$. Para ello, se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/Univariante…** En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Variable dependiente:** La variable respuesta ***Calidad_Instrumental*** y en el campo **Factores aleatorios:** el factor ***Fabricante*.** Pulsando **Aceptar** se obtiene la Tabla ANOVA

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Calidad_Instrumental

Origen		Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Intersección	Hipótesis	4046400,800	1	4046400,800	282,160	,000
	Error	57363,200	4	14340,800[a]		
Fabricante	Hipótesis	57363,200	4	14340,800	3,976	,008
	Error	144272,000	40	3606,800[b]		

a. MS(Fabricante)
b. MS(Error)

Esta tabla muestra los resultados del contraste planteado. El valor del estadístico de contraste es igual a 3.976 que deja a la derecha un p-valor de 0.008, así que la respuesta dependerá del nivel de significación que se fije. Si fijamos un nivel de significación de 0.05 se concluye que hay evidencia suficiente para afirmar de la existencia de alguna variabilidad entre la calidad del material de los diferentes fabricantes. Si fijamos un nivel de significación de 0.001, no podemos hacer tal afirmación.

En el modelo de efectos aleatorios no se necesitan llevar a cabo más contrastes incluso aunque la hipótesis nula sea rechazada. Es decir, en el caso de rechazar H_0 no hay que realizar comparaciones múltiples para comprobar que medias son distintas, ya que el propósito del experimento es hacer un planteamiento general relativo a las poblaciones de las que se extraen las I muestras.

La tabla siguiente muestra la media cuadrática esperada, de esta tabla se deducen las expresiones de las esperanzas de los cuadrados medios del factor y del error:

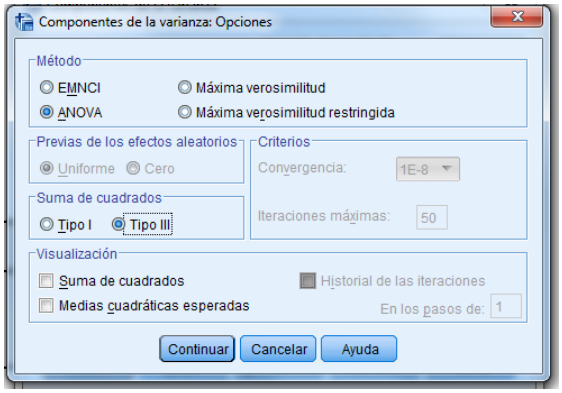
Media cuadrática esperada[a,b]

Origen	Componente de la varianza		
	Var (Fabricante)	Var(Error)	Término cuadrático
Intersección	9,000	1,000	Intersección
Fabricante	9,000	1,000	
Error	,000	1,000	

a. Para cada fuente, la media cuadrática esperada es igual a la suma de los coeficientes de las casillas por las componentes de la varianza, más un término cuadrático que incluye los efectos de la casilla Término cuadrático.
b. Las medias cuadráticas esperadas se basan en la suma de cuadrados tipo III.

$$E(CMTr) = 9\sigma_\tau^2 + \sigma^2 \quad ; \quad E(CMR) = \sigma^2$$

Estas expresiones se utilizan para estimar las componentes de la varianza σ_τ^2 y σ^2. Para determinar el valor concreto de estas estimaciones mediante SPSS, se selecciona, en el menú principal **Analizar/Modelo lineal general/Componentes de la varianza…** En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Variable dependiente:** La variable respuesta ***Calidad_Instrumental*** y en el campo **Factores aleatorios:** el factor ***Fabricante.*** Pinchando en **Opciones**



Se elige **ANOVA** en **Método** y en **Sumas de Cuadrados** el **tipo III** (Método que consiste en igualar los cuadrados medios con sus esperanzas). Pulsando **Continuar** y **Aceptar** se obtiene las estimaciones de los componentes de la varianza

Estimaciones de la varianza

Componente	Estimación
Var(Fabricante)	1192,667
Var(Error)	3606,800

Variable dependiente: Calidad_Instrumental
Método: ANOVA (Tipo III Suma de cuadrados)

Donde $\sigma_T^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma^2 = 1192.667 + 3606.800 = 4799.467$. Por lo tanto, la varianza total (4799.467) se descompone en una parte atribuible a la diferencia entre los fabricantes (1192.667) y otra procedente de la variabilidad existente dentro de ellos (3606.8). Comprobamos que en dicha varianza tiene mayor peso la variación dentro de los fabricantes, en porcentaje un 75.15 % frente a la variación entre fabricantes, que representa el 24.85 % del total.

5. Diseño en bloques Aleatorizados

En los diseños estudiados anteriormente hemos supuesto que existe bastante homogeneidad entre las unidades experimentales. Pero puede suceder que dichas unidades experimentales sean heterogéneas y contribuyan a la variabilidad observada en la variable respuesta. Si en esta situación se utiliza un diseño completamente aleatorizado, la diferencia entre dos unidades experimentales sometidas a distintos tratamientos no sabremos si se deben a una diferencia real entre los efectos de los tratamientos o a la heterogeneidad de dichas unidades, Como resultado el error experimental reflejará esta variabilidad. En esta situación se debe sustraer del error experimental la variabilidad producida por las unidades experimentales y para ello el experimentador puede formar bloques de manera que las unidades experimentales de cada bloque sean lo más homogéneas posible y los bloques entre sí sean heterogéneos.
En el diseño en bloques Aleatorizados, primero se clasifican las unidades experimentales en grupos homogéneos, llamados bloques, y los tratamientos son

entonces asignados aleatoriamente dentro de los bloques. Esta estrategia de diseño mejora efectivamente la precisión en las comparaciones al reducir la variabilidad residual.
Distinguimos dos tupos de diseños en bloques aleatorizados:

- Los *diseños en bloques completos Aleatorizados* (Todos los tratamientos se prueban en cada bloque exactamente vez)
- Los *diseños por bloque incompletos Aleatorizados* (Todos los tratamientos no están representados en cada bloque, y aquellos que sí están en uno en particular se ensayan en él una sola vez).

5.1 Diseño en bloques Completos Aleatorizados

En esta sección presentamos el *diseño completo aleatorizado con efectos fijos*. La palabra *bloque* se refiere al hecho de que se ha agrupado a las unidades experimentales en función de alguna variable extraña; *aleatorizado* se refiere al hecho de que los tratamientos se asignan aleatoriamente dentro de los bloques; *completo* implica que se utiliza cada tratamiento exactamente una vez dentro de cada bloque y el término *efectos fijos* se aplica a bloques y tratamientos. Es decir, se supone que ni los bloques ni los tratamientos se eligen aleatoriamente. Además una caracterización de este diseño es que los efectos bloque y tratamiento son aditivos; es decir no hay interacción entre los bloques y los tratamientos.

La descripción del diseño así como la terminología subyacente la vamos a introducir mediante el siguiente supuesto práctico.

Supuesto práctico 3
El Abeto blanco, Abeto del Pirineo es un árbol de gran belleza por la elegancia de sus formas y el exquisito perfume balsámico que destila sus hojas y cortezas. Destilando hojas y madera se obtiene aceite de trementina muy utilizado en medicina contra torceduras y contusiones. En estos últimos años se ha observado que la producción de semillas ha descendido y con objeto de conseguir buenas producciones se proponen tres tratamientos. Se observa que árboles diferentes tienen distintas características naturales de reproducción, este efecto de las diferencias entre los árboles se debe de controlar y este control se realiza mediante bloques. En el experimento se utilizan 10 abetos, dentro de cada abeto se seleccionan tres ramas semejantes. Cada rama recibe exactamente uno de los tres tratamientos que son asignados aleatoriamente. Constituyendo cada árbol un bloque completo. Los datos obtenidos se presentan en la siguiente tabla donde se muestra el número de semillas producidas por rama.

	Abetos (Bloques)									
Tratamientos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**8**	**10**
Tratamiento 1	7	8	9	10	11	8	7	8	7	8
Tratamiento 2	9	9	9	9	12	10	8	8	9	9
Tratamiento 3	10	10	12	12	14	9	7	7	10	10

El objetivo del estudio es comparar los tres tratamientos, por lo que se trata de un factor con tres niveles. Sin embrago, al realizar la medición sobre los distintos abetos, es posible que estos influyan sobre el número se semillas observadas, al tratarse de abetos distintos. Por ello, y al no ser directamente motivo de estudio, los abetos es un factor secundario que recibe el nombre de bloque.

Nos interesa saber si los distintos tratamientos influyen en la producción de semillas, para ello realizamos el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 \equiv \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 \quad vs \quad H_1 \equiv \tau_i \neq \tau_j \text{ para algún i \# j.}$$

Es decir, contrastamos que no hay diferencia en las medias de los tres tratamientos frente a la alternativa de que al menos una media difiere de otra.

Pero, previamente hay que comprobar si la presencia del factor bloque (los abetos) está justificada. Para ello, realizamos el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 \equiv \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_{10} \quad vs \quad H_1 \equiv \beta_i \neq \beta_j \text{ para algún i \# j.}$$

Es decir, contrastamos que no hay diferencia en las medias de los diez bloques frente a la alternativa de que al menos una media difiere de otra.

Este experimento se modeliza mediante un diseño en bloques completos al azar. El modelo matemático es:

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + u_{ij}$, $i = 1, \cdots, 3$; $j = 1, \cdots, 10$. En general $i = 1, \cdots, I$; $j = 1, \cdots, J$.

La fórmula expresa simbólicamente la idea de que cada observación y_{ij} (Número de semillas medida con el tratamiento *i*, del abeto *j*), puede subdividirse en cuatro componentes: un efecto medio global μ, un efecto tratamiento τ_i (efecto del factor principal sobre el número de semillas), un efecto bloque β_j (efecto del factor secundario (abetos) sobre el número de semillas) y una desviación aleatoria debida a causas desconocidas u_{ij} (Perturbaciones o error experimental). Este modelo tiene que verificar los siguientes supuestos:

1. Las 30 observaciones constituyen muestras aleatorias independientes, cada una de tamaño 3, de 30 poblaciones con medias μ_{ij}, $i = 1, ..., 3$ y $j = 1, ..., 10$
2. Cada una de las 30 poblaciones es normal
3. Cada una de las 30 poblaciones tiene la misma varianza
4. Los efectos de los bloques y tratamientos son aditivos; es decir, no existe interacción entre los bloques y tratamientos. Esto significa que si hay diferencias entre dos tratamientos cualesquiera, estas se mantienen en todos los bloques (abetos).

Los tres primeros supuestos coinciden con los supuestos del modelo unifactorial, con la diferencia que en el modelo unifactorial se examinaban *I* poblaciones y en este modelo se examinan *IJ*. El cuarto supuesto es característico del diseño en bloques. La no interacción entre los bloques y los tratamientos significa que los tratamientos tienen un comportamiento consistente a través de los bloques y que los bloques tienen un comportamiento consistente a través de los tratamientos. Expresado matemáticamente significa que la diferencia de los valores medios para dos tratamientos cualesquiera es la misma en todo un bloque y que la diferencia de los valores medios para dos bloques cualesquiera es la misma para cada tratamiento.

Variable respuesta: ***Número de semillas***
Factor: ***Tratamiento*** que tiene tres niveles. Es un factor de **efectos fijos** ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar.
Bloque: ***Abeto*** que tiene diez niveles. Es un factor de **efectos fijos** ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar.
Modelo completo: Los tres tratamientos se prueban en cada bloque exactamente vez
Tamaño del experimento: Número total de observaciones (30).

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

- Nombre: ***Número_semillas***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **2**
- Decimales: **0**

- Nombre: ***Tratamientos***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **1**
- Decimales: **0**

- Nombre: ***Abetos***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **1**
- Decimales: **0**

Para resolver los contrastes planteados. Se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante…**

En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Variable dependiente:** La variable respuesta ***Número_semillas*** y en el campo **Factores fijos:** el factor ***Tratamientos*** y el bloque ***Abetos*.** Para indicar que se trata de un modelo sin interacción entre los tratamientos y los bloques, se debe pinchar en **Modelo** e indicar en la salida correspondiente que es un modelo aditivo

Por defecto, SPSS tiene marcado un modelo Factorial completo, por lo que hay que señalar **Personalizado.** En el modelo que estamos estudiando sólo aparecen los efectos principales de los dos factores, por lo tanto se selecciona en **Tipo: Efectos principales** y se pasan los dos factores, Tratamientos y abetos, al campo **Modelo:** Observamos que no hay distinción entre los dos factores, no se indica cual es el factor principal y cuál es el bloque. En el modelo matemático el tratamiento que se hace es el mimos para ambos factores, lo que cambia es la interpretación. Pulsando **Continuar** y **Aceptar** se obtiene la Tabla ANOVA

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Número_semillas

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	7100,000[a]	11	645,455	7,353	,000
Intersección	253920,000	1	253920,000	2892,759	,000
Tratamientos	1620,000	2	810,000	9,228	,002
Abetos	5480,000	9	608,889	6,937	,000
Error	1580,000	18	87,778		
Total	262600,000	30			
Total corregida	8680,000	29			

a. R cuadrado = ,818 (R cuadrado corregida = ,707)

Puesto que la construcción de bloques se ha diseñado para comprobar el efecto de una variable, nos preguntamos si ha sido eficaz su construcción. En caso afirmativo, la suma de cuadrados de bloques explicaría una parte sustancial de la suma total de cuadrados. También se reduce la suma de cuadrados del error dando lugar a un aumento del valor del estadístico de contraste experimental utilizado para contrastar la igualdad de medias de los tratamientos y posibilitando que se rechace la Hipótesis nula, mejorándose la potencia del contraste.

La construcción de bloques puede ayudar cuando se comprueba su eficacia pero debe evitarse su construcción indiscriminada. Ya que, la inclusión de bloques en un diseño da lugar a una disminución del número de grados de libertad para el error, aumenta el punto crítico para contrastar la Hipótesis nula y es más difícil rechazarla. La potencia del contraste es menor.

La *Tabla ANOVA*, muestra que:

- El valor del estadístico de contraste de igualdad de bloques, ***F* = 6.937** deja a su derecha un p-valor menor que 0.001, menor que el nivel de significación del 5%, por lo que se rechaza la Hipótesis nula de igualdad de bloques. La eficacia de este diseño depende de los efectos de los bloques. Un valor grande de ***F*** de los bloques (6.937) implica que el factor bloque tiene un efecto grande. En este caso el diseño es más eficaz que el diseño completamente aleatorizado ya que si el cuadrado medio entre bloques es grande (608.889), el término residual será mucho menor (87.778) y el contraste principal de las medias de los tratamientos será más sensible a las diferencias entre tratamientos. Por lo tanto la inclusión del factor bloque en el modelo es acertada. Así, la producción de semillas depende del abeto.
  Si los efectos de los bloques son muy pequeños, el análisis de bloque quizás no sea necesario y en caso extremo, cuando el valor de *F* de los bloques es próximo a 1, puede llegar a ser prejudicial, ya que el número de grados de libertad, *(I-1)(J-1*), del denominador de la comparación de tratamientos es menor que el número de grados de libertad correspondiente, IJ-I, en el diseño completamente aleatorizado. Pero, ¿Cómo saber cuándo se puede prescindir de los bloques? La respuesta la tenemos en el valor de la *F* experimental de los bloques, se ha comprobado que si dicho valor es mayor que 3, no conviene prescindir de los bloques para efectuar los contrastes.

- El valor del estadístico de contraste de igualdad de tratamiento, **F = 9.228** deja a su derecha un p-valor de 0.002, menor que el nivel de significación del 5%, por lo que se rechaza la Hipótesis nula de igualdad de tratamientos. Así, los tratamientos influyen en el número de semillas. Es decir, existen diferencias significativas en el número de semillas entre los tres tratamientos.
  La salida de SPSS también nos muestra que R cuadrado vale 0.818, indicándonos que el modelo explica el 81.80% de la variabilidad de los datos.

El modelo que hemos propuesto hay que validarlo, para ello hay que comprobar si se verifican los cuatros supuestos expresados anteriormente.

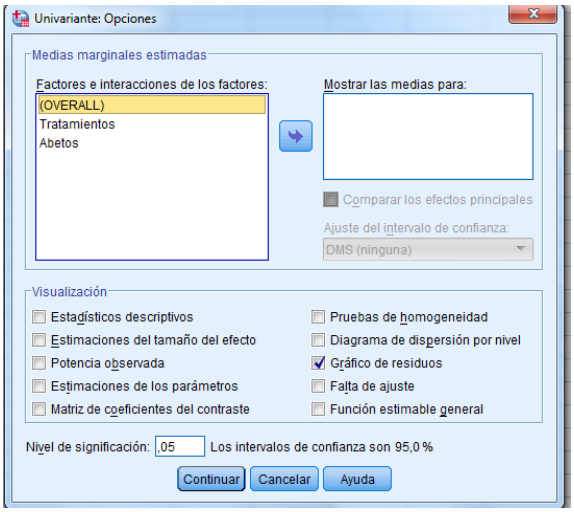
5.1.1 Estudio de la Idoneidad del modelo

5.1.1.1 Hipótesis de aditividad entre los bloques y tratamientos

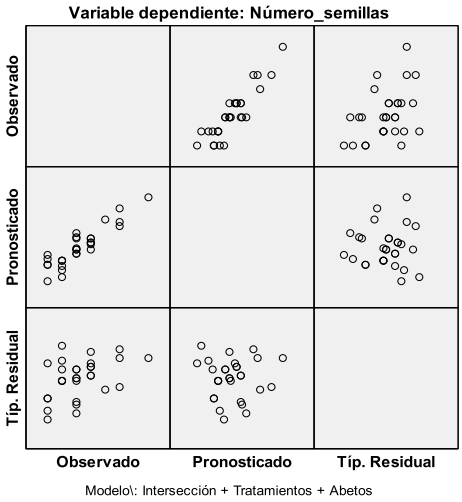
La interacción entre el factor bloque y los tratamientos se puede estudiar gráficamente de diversas formas:

- **Gráfico de residuos frente a los valores predichos por el modelo**. Si este gráfico no presenta ningún aspecto curvilíneo se admite que el modelo es aditivo. Este gráfico se puede realizar en SPSS de dos formas:

  Seleccionamos **Opciones** en el cuadro de diálogo de **Univariante** y marcamos la casilla **Gráfico de los residuos**

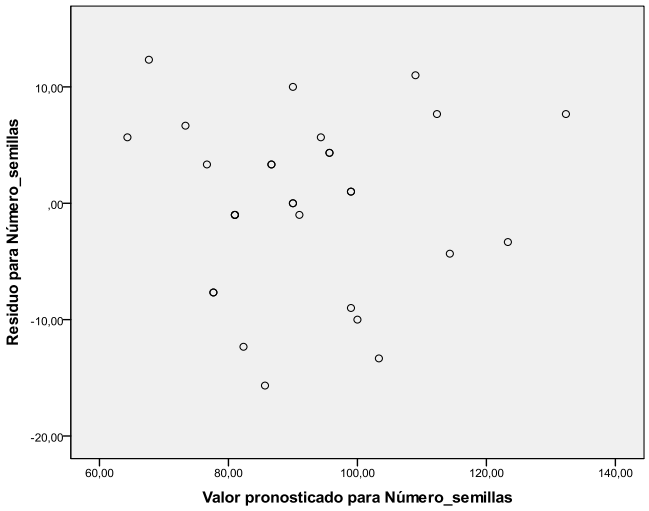


  Se pulsa, **Continuar** y **Aceptar**

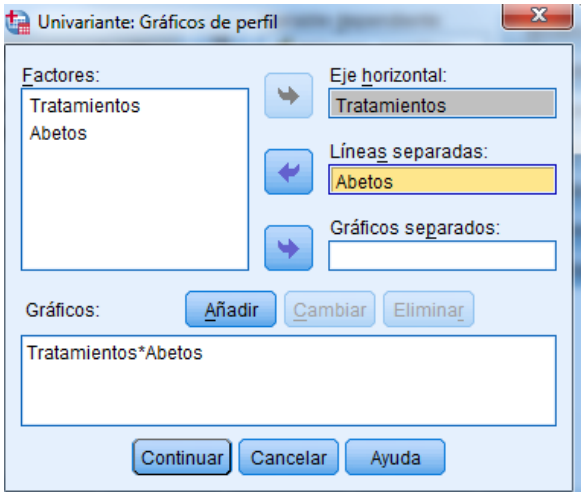


Interpretamos el gráfico que aparece en la fila 3 columna 2, es decir aquel gráfico que se representan los residuos en el eje de ordenadas y los valores pronosticados en el eje de abscisas. No observamos, en dicho gráfico, ninguna tendencia curvilínea, es decir no muestra evidencia de interacción entre el factor bloque y los tratamientos.

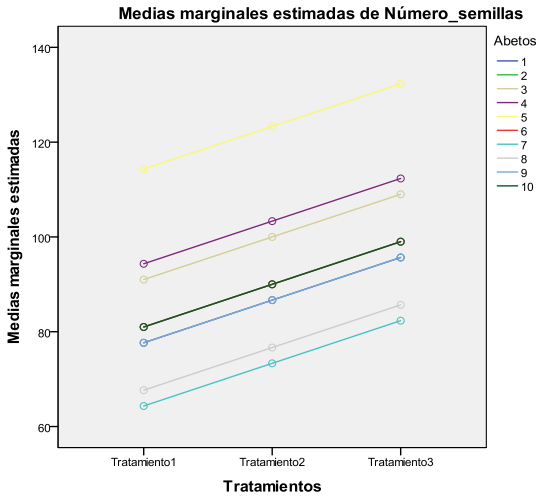
- **Gráfico de dispersión de los residuos y las predicciones**. Para realizar este gráfico, se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante/Guardar…** En la ventana resultante se selecciona **Residuos No tipificados** y **Valores pronosticados No tipificados.** Se pulsa, **Continuar** y **Aceptar.** Y en el ***Editor de datos*** se han creado dos nuevas variables **RES_1** y **PRE_1** que contienen los residuos del modelo y los valores predichos, respectivamente. Realizamos el gráfico de dispersión, para ello se selecciona en el menú principal, **Gráficos/Cuadros de diálogos antiguos/Diagramas/Puntos**



- **Gráfico de perfil:** Es un gráfico de las medias de los tratamientos, para realizarlo se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante/Gráficos…**



se introduce en el **Eje horizontal:** ***Tratamientos*** y en **Líneas separadas:** ***Abetos*****.** Se pulsa **Añadir, Continuar** y **Aceptar.**

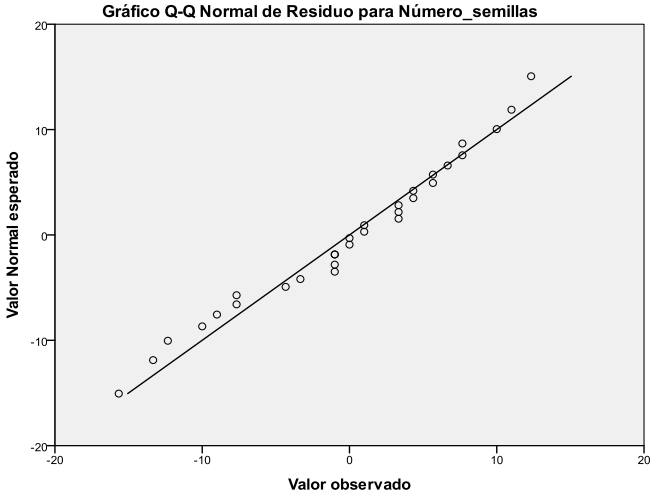


La figura representa el gráfico de las medias de los tratamientos. Cuando no existe interacción, los segmentos lineales que unen dos medias cualesquiera serán paralelos a través de los bloques. Es decir, es posible hacer consideraciones generales relativas a los tratamientos sin tener que especificar el bloque implicado. Podemos deducir, por ejemplo, que el tratamiento 1 es menos eficaz que los otros dos en el sentido que produce menos semillas. Cuando estos segmentos no son paralelos se deduce que hay interacción entre los bloques y tratamientos. Esto significa que debemos tener cuidado cuando hagamos declaraciones relativas a los tratamientos, porque el bloque implicado es también importante.

5.1.1.2. Hipótesis de normalidad

En primer lugar se deben salvar los residuos (procedimiento realizado anteriormente) y a continuación realizamos el estudio de la normalidad mediante el *Gráfico probabilístico Normal* y *el Contraste de Kolmogorov-Smirnov*

Gráfico probabilístico Normal: Se selecciona en el menú principal, **Analizar/Estadísticos descriptivos/Gráficos Q-Q. S**e introduce en el campo **Variables:** la variable que recoge los residuos **RES_1**. Se pulsa **Aceptar**



Podemos apreciar en este gráfico que los puntos aparecen próximos a la línea diagonal. Esta gráfica no muestra una desviación marcada de la normalidad.

Contraste de Kolmogorov-Smirnov: Se selecciona en el menú principal, **Analizar/Pruebas no paramétricas/ Cuadros de diálogos antiguos/K-S de 1 muestra.** Se introduce en el campo **Lista Contrastar variables:** la variable que recoge los residuos **RES_1**. Se pulsa **Aceptar**

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		Residuo para Número_ semillas
N		30
Parámetros normales[a,b]	Media	,0000
	Desviación típica	7,38124
Diferencias más extremas	Absoluta	,146
	Positiva	,084
	Negativa	-,146
Z de Kolmogorov-Smirnov		,800
Sig. asintót. (bilateral)		,544

a. La distribución de contraste es la Normal.
b. Se han calculado a partir de los datos.

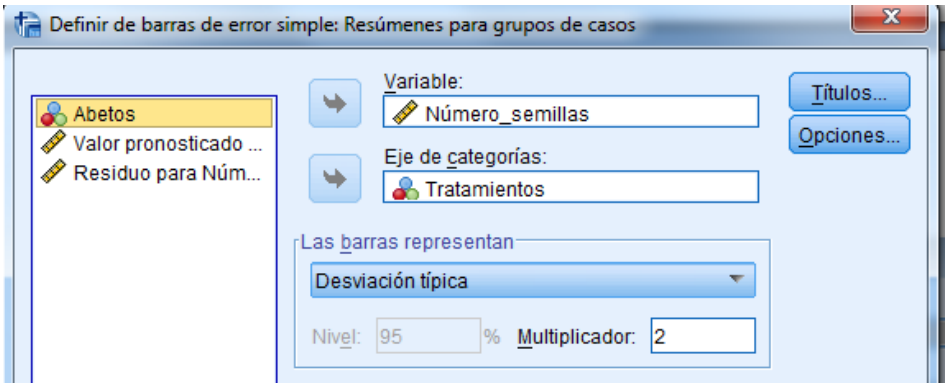
El valor del p-valor, 0.544, es mayor que el nivel de significación 0.05, aceptándose la hipótesis de normalidad.

5.1.1.3 Independencia entre los residuos

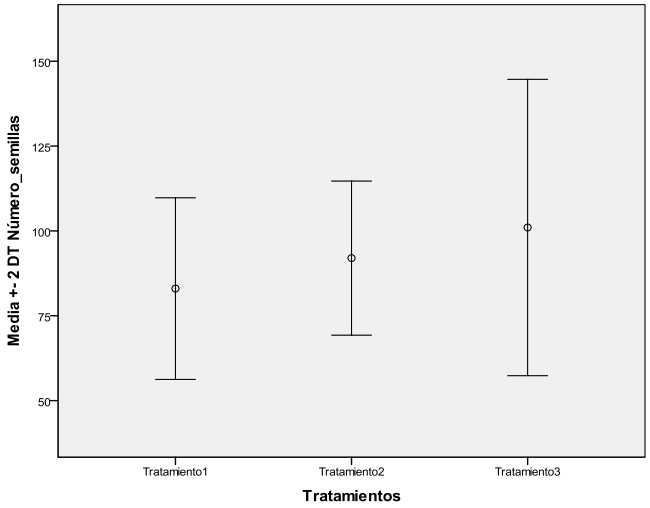
En el gráfico de los residuos realizado anteriormente, interpretamos el gráfico que aparece en la fila 3 columna 2, es decir aquel gráfico que se representan los residuos en el eje de ordenadas y los valores pronosticados en el eje de abscisas. No observamos, en dicho gráfico, ninguna tendencia sistemática que haga sospechar del incumplimiento de la suposición de independencia. Este gráfico también los podemos realizar mediante un diagrama de dispersión de los residuos y las predicciones. Procedimiento realizado anteriormente para comprobar la hipótesis de no interacción.

5.1.1.4 Homogeneidad de varianzas

En primer lugar comprobamos la homocedasticidad gráficamente, para ello se selecciona en el menú principal, **Gráficos/Cuadros de diálogos antiguos/Barras de error…** Y en la salida correspondiente seleccionar **Simple** y pulsar **Definir**

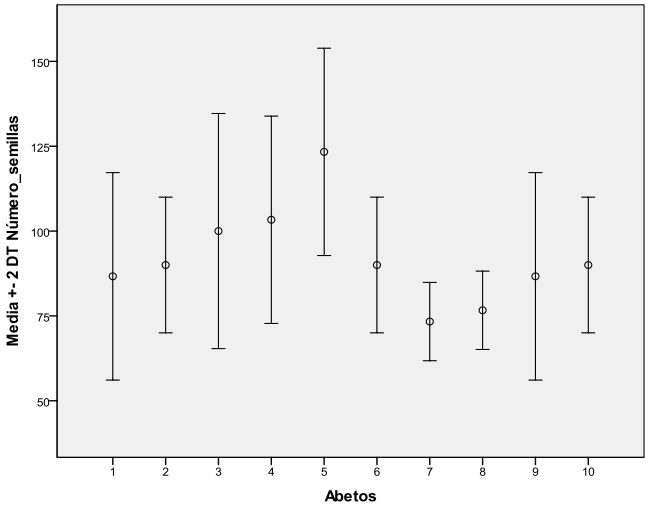


se introduce en el campo **Variable:** La variable respuesta ***Número_semillas*** y en el campo **Eje de categorías:** el factor ***Tratamientos*.** En **Las barras representan** se selecciona **Desviación típica**, en **Multiplicador: 2** (nos interesa que la desviación típica esté multiplicada por dos). Se pulsa **Aceptar**



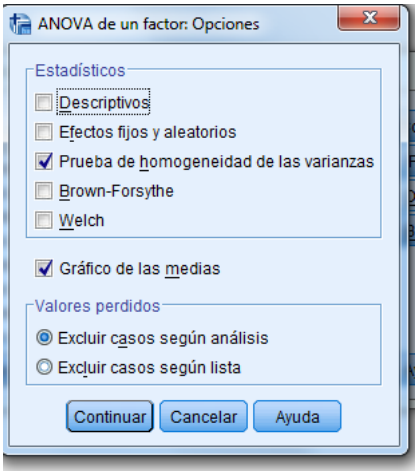
Cada grupo tiene su promedio (el círculo en cada una de las barras) y dos desviaciones típicas a la izquierda y dos desviaciones típicas a la derecha del promedio. Observamos que en el tratamiento3 hay mucha más dispersión que en los otros dos y donde hay menos dispersión es en el Tratamiento2. Del gráfico no se deduce directamente si hay homogeneidad en estas varianzas, por lo que recurrimos analizarlo analíticamente mediante una prueba el test de Levene.

Realizamos el mismo gráfico para el factor bloque, para ello en el campo **Eje de categorías:** el factor ***Abetos*.**



Observamos que en el Abeto 3 parece que hay mayor dispersión pero seguido a muy poca distancia del los Abetos 1, 4, 5 y 9 y donde hay menos dispersión es en los Abetos 7 y 8. Como en el gráfico anterior, no se deduce directamente si hay homogeneidad en estas varianzas, por lo que recurrimos analizarlo analíticamente mediante una prueba el test de Levene.

Para realizar el test de Levene mediante SPSS, Se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Comparar medias/ANOVA de un factor.** En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Lista de dependientes:** La variable respuesta ***Número_semillas*** y en el campo **Factor:** el factor ***Tratamientos*.** Se pulsa **Opciones**



Se selecciona **Pruebas de homogeneidad de las varianzas** y **Gráfico de medias.** Se pulsa **Continuar y Aceptar**

Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error[a]

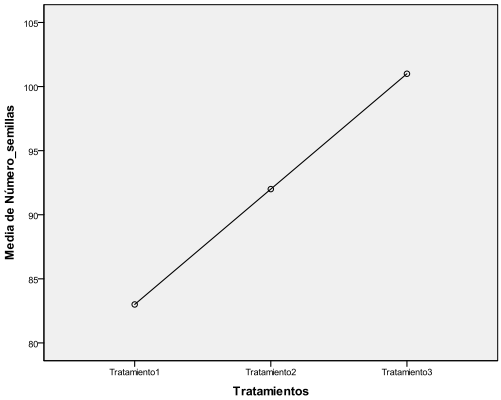
Variable dependiente:Número_semillas

F	gl1	gl2	Sig.
1,485	2	27	,244

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.

a. Diseño: Intersección + Tratamientos

El p-valor es 0.244 por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis de homogeneidad de las varianzas y se concluye que los tres grupos tienen varianzas homogéneas.



Antes de resolver el contraste de igualdad de medias observemos este gráfico de medias, donde en el eje de ordenadas figuran las medias del número de semillas y en el eje de abscisas los tratamientos. En esta gráfica observamos que la mayor concentración del número de semillas se produce en el tratamiento 3 y el número más bajo se produce con el tratamiento1. Para saber entre que parejas de tratamientos estas diferencias son significativas aplicamos una prueba Post-hoc

Realizamos el mismo contraste para los bloques, ya que hay que comprobar la homocedasticidad tanto en los tratamientos como en los bloques. En la ventana **ANOVA de un factor.** En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Lista de dependientes:** ***Número_semillas*** y en el campo **Factor:** ***Abetos*****.** Se pulsa **Opciones** y a continuación se selecciona **Pruebas de homogeneidad de las varianzas.** Se pulsa **Continuar y Aceptar**

Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error[a]

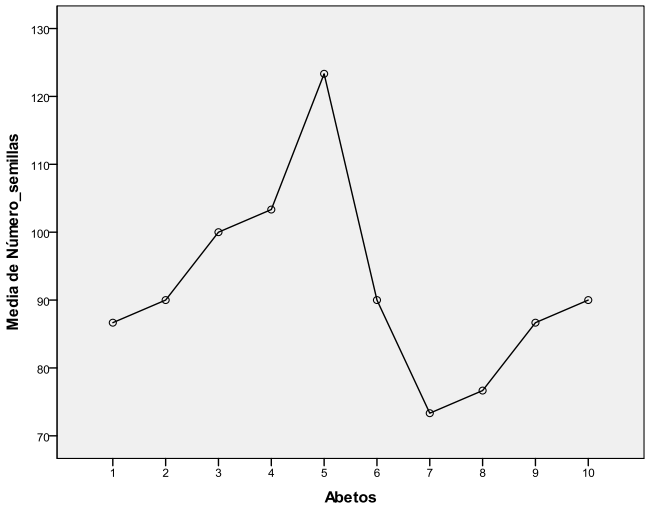
Variable dependiente:Número_semillas

F	gl1	gl2	Sig.
,933	9	20	,518

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.

a. Diseño: Intersección + Abetos

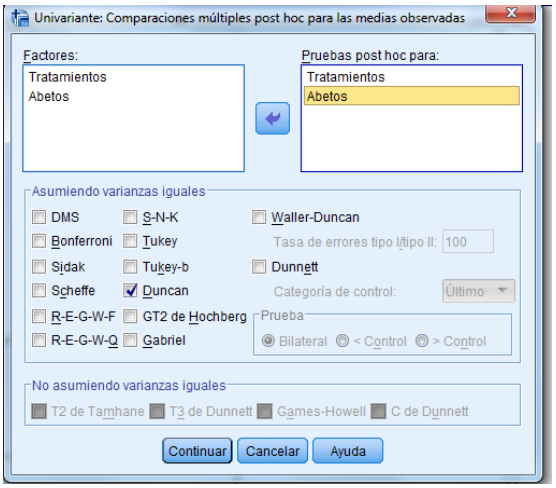
El p-valor es 0.518 por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis de homogeneidad de las varianzas y se concluye que los diez grupos tienen varianzas homogéneas.



En esta gráfica observamos que la mayor concentración del número de semillas se produce en el Abeto 5 y el número más bajo se produce en el Abeto 7. Para saber entre que parejas de Abetos estas diferencias son significativas aplicamos una prueba Post-hoc

5.1.2. Comparaciones múltiples

Se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante…**En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Variable dependiente:** ***Número_semillas*** y en el campo **Factores fijos:** ***Tratamientos*** y ***Abetos*.** Para indicar que se trata de un modelo sin interacción entre los tratamientos y los bloques, se debe pinchar en **Modelo** e indicar en la salida correspondiente que es un modelo aditivo. Para ello, señalar **Personalizado** y en **Tipo: Efectos principales** y se pasan los dos factores, ***Tratamientos*** y ***abetos***, al campo **Modelo.** Se pulsa **Continuar** y **Post_hoc…**



En la ventana resultante, se pasan las variables ***Tratamientos*** y ***Abetos*** al campo **Pruebas posthoc para**: y seleccionamos la prueba de **Duncan.** Se pulsa **Continuar** y **Aceptar**

Número_semillas

Duncan[a,b]

Tratamientos	N	Subconjunto 1	2	3
Tratamiento1	10	83,00		
Tratamiento2	10		92,00	
Tratamiento3	10			101,00
Sig.		1,000	1,000	1,000

Se muestran las medias de los grupos de subconjuntos homogéneos.
Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática(Error) = 87,778.

a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 10,000
b. Alfa = ,05.

La tabla de subconjuntos homogéneos muestra por columnas los subgrupos de medias iguales, formados al utilizar el método de Duncan. Se observa que los tres tratamientos difieren significativamente entre sí. También se observa que la concentración media del número de semillas es mayor con el tratamiento 3 (101) y menor con el tratamiento 1 (83).

Número_semillas

Duncan[a,b]

Abetos	N	Subconjunto 1	2	3
7	3	73,33		
8	3	76,67		
1	3	86,67	86,67	
9	3	86,67	86,67	
2	3	90,00	90,00	
6	3	90,00	90,00	
10	3	90,00	90,00	
3	3		100,00	
4	3		103,33	
5	3			123,33
Sig.		,070	,070	1,000

Se muestran las medias de los grupos de subconjuntos homogéneos.
Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática(Error) = 87,778.

a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 3,000
b. Alfa = ,05.

Se observa que la prueba de Duncan ha agrupado los abetos 7, 8, 1, 9, 2, 6 y 10 en una misma columna (P-valor 0.070, no hay diferencias significativas entre ellos), 1, 9 ,2 6, 10, 3 y 4 (P-valor 0.070, no hay diferencias significativas entre ellos) en otra columna y la tercera columna está formada únicamente por el abeto 5. Inmediatamente se ve que por ejemplo el abeto 5 difiere de todos los demás, siendo en este abeto donde se produce el mayor número de semillas y el menor en el abeto 7.

5.2 Diseño en bloques Incompletos Aleatorizados

En los diseños en bloques Aleatorizados, puede suceder que no sea posible realizar todos los tratamientos en cada bloque. En estos casos es posible usar diseños en bloques

Aleatorizados en los que cada tratamiento no está presente en cada bloque. Estos diseños reciben el nombre de *diseño en bloque incompleto aleatorizado* siendo uno de los más utilizados el *diseño en bloque incompleto balanceado (BIB)*

El diseño de bloques incompletos balanceado *(BIB)* compara todos los tratamientos con igual precisión.
Este diseño experimental debe verificar:

- Cada tratamiento ocurre el mismo número de veces en el diseño
- Cada par de tratamientos ocurren juntos el mismo número de veces que cualquier otro par

Supongamos que se tienen I tratamientos de los cuales sólo pueden experimentar K tratamientos en cada bloque $(K < I)$. Los parámetros que caracterizan este modelo son:

- I, J y K son el número de tratamientos, el número de bloques y el número de tratamientos por bloque, respectivamente.
- R, número de veces que cada tratamiento se presenta en el diseño, es decir el número de réplicas de un tratamiento dado
- λ, número de bloques en los que un par de tratamientos ocurren juntos
- N, número de observaciones

Estos parámetros deben verificar las siguientes relaciones:

- $N = I\,R = J\,K$
- $\lambda = R\dfrac{K-1}{I-1}$
- $J \geq I$ $\quad J \geqq I$
- Cuando $J = I$ el diseño recibe el nombre de simétrico.

Al igual que en el diseño en bloques completo, la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales en cada bloque se debe realizar en forma aleatoria.
Este diseño lo estudiaremos a continuación mediante el supuesto práctico 4

Supuesto práctico 4
Se realiza un estudio para comprobar la efectividad en el retraso del crecimiento de bacterias utilizando seis soluciones diferentes para lavar los envases de la leche. El análisis se realiza en el laboratorio y sólo se pueden realizar seis pruebas en un mismo día. Como los días son una fuente de variabilidad potencial, el investigador decide utilizar un diseño aleatorizado por bloques, pero al recopilar las observaciones durante seis días no ha sido posible aplicar todas los tratamientos en cada día, sino que sólo se han podido aplicar dos de las cuatro soluciones cada día. Los datos obtenidos se presentan en la siguiente tabla. Se decide utilizar un diseño en bloques incompletos balanceado, donde I = 4 y K = 2. Un posible diseño para estos parámetros lo proporciona la tabla correspondiente al Diseño 5 del Apéndice, con R = 3, J = 6 y λ= 1. La disposición del diseño y las observaciones obtenidas se muestran en la siguiente tabla.

	Días					
Soluciones	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Solución 1	12	24	31			
Solución 2	21				20	21
Solución 3			19	18		19
Solución 4		15		19	47	

En el ejemplo:

- *N = I R = J K*. En efecto, ya que *N= 12; I = 4, J = 6; R = 3 y K = 2.*
- λ= 1; $\lambda = R\frac{K-1}{I-1} = 3\times\frac{1}{3} = 1$ $\lambda = R\frac{K-1}{I-1} = 3*\frac{1}{3} = 1$

El objetivo principal es estudiar la efectividad en el retraso del crecimiento de bacterias utilizando seis soluciones, por lo que se trata de un factor con seis niveles. Sin embrago, como los días son una fuente de variabilidad potencial, consideramos un factor bloque con cuatro niveles.

Variable respuesta: ***Número de bacterias***
Factor: ***Soluciones*** que tiene cuatro niveles. Es un factor de **efectos fijos** ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar.
Bloque: ***Días*** que tiene seis niveles. Es un factor de **efectos fijos** ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar.
Modelo incompleto: Todos los tratamientos no se prueban en cada bloque
Tamaño del experimento: Número total de observaciones (12).

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

- Nombre: ***Número_bacterias***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **2**
- Decimales: **0**

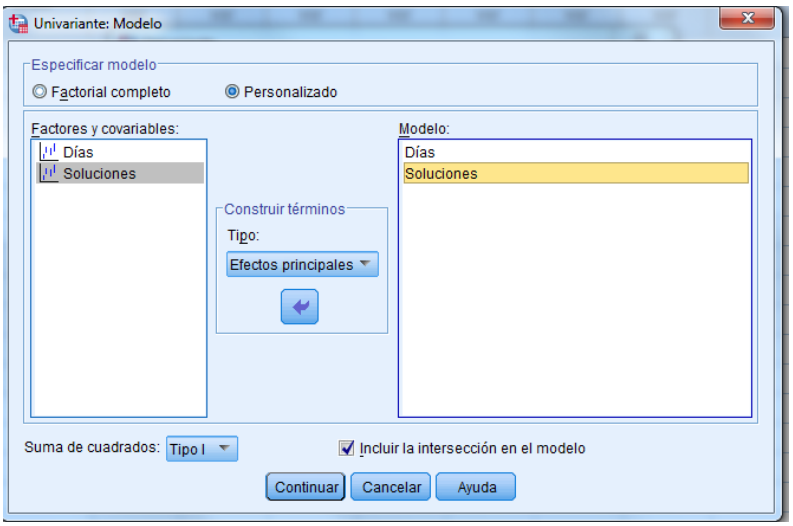
- Nombre: ***Soluciones***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **1**
- Decimales: **0**
- Valores: {**1, Solución1; 2, Solución2; 3, Solución3; 4, Solución4**}

- Nombre: ***Días***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **1**
- Decimales: **0**

Para resolver los contrastes planteados. Se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante…** En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Variable dependiente:** ***Número_bacterias*** y en el campo **Factores fijos:** ***Soluciones*** y ***Días*.** Para indicar que se trata de un modelo sin interacción entre los tratamientos y los bloques, se debe pinchar en **Modelo** e indicar en la salida correspondiente que es un modelo aditivo.

En este tipo de diseño los tratamientos no estan en todos los bloques, entonces los bloques y tratamientos no son ortogonales (como lo son en el diseño de bloques completos al azar), por lo tanto no es posible realizar una descomposición de la variabilidad del experimento como en el diseño en bloques completos. Para resolver está cuestión, SPSS utiliza las Sumas de cuadrados de tipo I.

- Para evaluar el efecto de los tratamientos, la suma de cuadrados de tratamientos debe ajustarse por bloques, por lo tanto primero se introducen los bloques y depués los tratamientos



En la ventana **Univariante** se selecciona **TipoI** en **Suma de cuadrados.** Los resultados de dicho NOVA dependerán del orden en que se introduzcan los factores en el campo **Factores fijo:** Pulsando **Continuar** y **Aceptar** se obtiene la Tabla ANOVA

Pruebas de los efectos inter-sujetos

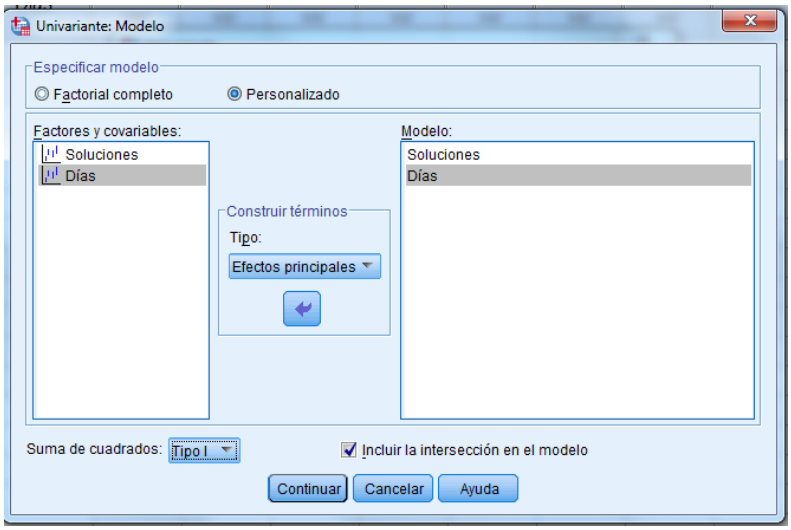
Variable dependiente:Número_bacterias

Origen	Suma de cuadrados tipo I	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	510,917[a]	8	63,865	,483	,817
Intersección	5896,333	1	5896,333	44,585	,007
Días	387,667	5	77,533	,586	,720
Soluciones	123,250	3	41,083	,311	,819
Error	396,750	3	132,250		
Total	6804,000	12			
Total corregida	907,667	11			

a. R cuadrado = ,563 (R cuadrado corregida = -,603)

El valor del estadístico de contraste de igualdad de Soluciones, ***F* = 0.311** deja a su derecha un **p-valor 0.819**, mayor que el nivel de significación del 5%, por lo que no se rechaza la Hipótesis nula de igualdad de tratamientos. Por lo tanto el tipo de solución para lavar los envases de la leche no influye en el retraso del crecimiento de bacterias

- Para evaluar el efecto de los bloques, la suma de cuadrados de bloques debe ajustarse por los tratamientos, por lo tanto primero se introducen los tratamientos y depués los bloques



Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Número_bacterias

Origen	Suma de cuadrados tipo I	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	510,917[a]	8	63,865	,483	,817
Intersección	5896,333	1	5896,333	44,585	,007
Soluciones	113,667	3	37,889	,286	,834
Días	397,250	5	79,450	,601	,712
Error	396,750	3	132,250		
Total	6804,000	12			
Total corregida	907,667	11			

a. R cuadrado = ,563 (R cuadrado corregida = -,603)

El valor del estadístico de contraste de igualdad de Soluciones, ***F* = 0.601** deja a su derecha un p-valor 0.712, mayor que el nivel de significación del 5%, por lo que no se rechaza la Hipótesis nula de igualdad de bloques. Por lo tanto los días en los que se realiza la prueba para lavar los envases de la leche no influyen en el retraso del crecimiento de bacterias. Con este ejemplo se ilustra el hecho de decidir si se prescinde o no de los bloques. Hay situaciones en las que, aunque los bloques no resulten significativamente diferentes no es conveniente prescindir de ellos. Pero ¿cómo saber cuándo se puede prescindir de los bloques? La respuesta la tenemos en el valor de la F de los bloques, experimentalmente se ha comprobado que si dicho valor es mayor que 3, no conviene prescindir de los bloque para efectuar los contrastes. En esta situación si se puede prescindir del efecto de los bloque

6. Diseño en Cuadrados Latinos

Hemos estudiado en el apartado anterior que los diseños en bloques completos aleatorizados utilizan un factor de control o variable de bloque con objeto de eliminar, su influencia en la variable respuesta y así reducir el error experimental. Los diseños en cuadrados latinos utilizan dos variables de bloque. Para reducir el error experimental.

Un inconveniente que presentan a veces los diseños es el de requerir excesivas unidades experimentales para su realización. Un diseño en bloques completos con un factor principal y dos factores de bloque, con K_1, K_2 y K_3 niveles en cada uno de los factores, requiere $K_1 \times K_2 \times K_3$ unidades experimentales. En un experimento puede haber diferentes causas, por ejemplo de índole económico, que no permitan emplear demasiadas unidades experimentales, ante esta situación se puede recurrir a un tipo especial de diseños en bloques incompletos aleatorizados. La idea básica de estos diseños es la de fracción; es decir, seleccionar una parte del diseño completo de forma que, bajo ciertas hipótesis generales, permita estimar los efectos que interesan.

Uno de los diseños en bloques incompletos aleatorizados más importante con dos factores de control es el modelo en cuadrado latino, dicho modelo requiere el mismo número de niveles para los tres factores.

En general, para K niveles en cada uno de los factores, el diseño completo en bloques aleatorizados utiliza K^2 bloques, aplicándose en cada bloque los K niveles del factor principal, resultando un total de K^3 unidades experimentales. Los diseños en cuadrado latino reducen el número de unidades experimentales a K^2 utilizando los K^2 bloques del experimento, pero aplicando sólo un tratamiento en cada bloque con una disposición especial. De esta forma, si K fuese 4, el diseño en bloques completos necesitaría $4^3=64$ observaciones, mientras que el diseño en cuadrado latino sólo necesitaría $4^2=16$ observaciones.

Los diseños en cuadrados latinos son apropiados cuando es necesario controlar dos fuentes de variabilidad. En dichos diseños el número de niveles del factor principal tiene que coincidir con el número de niveles de las dos variables de bloque o factores secundarios y además hay que suponer que no existe interacción entre ninguna pareja de factores.

Recibe el nombre de cuadrado latino de orden K a una disposición en filas y columnas de K letras latinas, de tal forma que cada letra aparece una sola vez en cada fila y en cada columna.

En resumen, podemos decir que un diseño en cuadrado latino tiene las siguientes características:

1. Se controlan tres fuentes de variabilidad, un factor principal y dos factores de bloque.
2. Cada uno de los factores tiene el mismo número de niveles, K.
3. Cada nivel del factor principal aparece una vez en cada fila y una vez en cada columna.
4. No hay interacción entre los factores.

En el Apéndice B se muestran algunos cuadrados latinos estándares para los órdenes 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Este diseño lo estudiaremos a continuación mediante el supuesto práctico 5

Supuesto práctico 5

Se estudia el rendimiento de un proceso químico en seis tiempos de reposo, A, B, C, D, E y F. Para ello, se consideran seis lotes de materia prima que reaccionan con seis concentraciones de ácido distintas, de manera que cada lote de materia prima en cada concentración de ácido se somete a un tiempo de reposo. Tanto la asignación de los tiempos de reposo a los lotes de materia prima, como la concentración de ácido, se hizo de forma aleatoria. Los datos del rendimiento del proceso químico se muestran en la siguiente tabla.

	Concentraciones de ácido					
Lote	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Lote 1	12 A	24 B	10 C	18 D	21 E	18 F
Lote 2	21 B	26 C	24 D	16 E	20 F	21 A
Lote 3	20 C	16 D	19 E	18 F	16 A	19 B

Lote 4	22 D	15 E	14 F	19 A	27 B	17 C
Lote 5	15 E	13 F	17 A	25 B	21 C	22 D
Lote 6	17 F	11 A	12 B	22 C	14 D	20 E

El objetivo principal es estudiar la influencia de seis tiempos de reposo en el rendimiento de un proceso químico, por lo que se trata de un factor con seis niveles. Sin embargo, como los lotes de materia prima y las concentraciones son dos fuentes de variabilidad potencial, consideramos dos factores de bloque con seis niveles cada uno.

Variable respuesta: *Rendimiento*
Factor: ***Tiempo de reposo*** que tiene seis niveles. Es un factor de **efectos fijos** ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar.
Bloques: ***Lotes*** y ***Concentraciones,*** ambos con seis niveles y ambos son factores de **efectos fijos**.
Tamaño del experimento: Número total de observaciones (6^2).

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

- Nombre: ***Rendimiento***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **2**
- Decimales: **0**

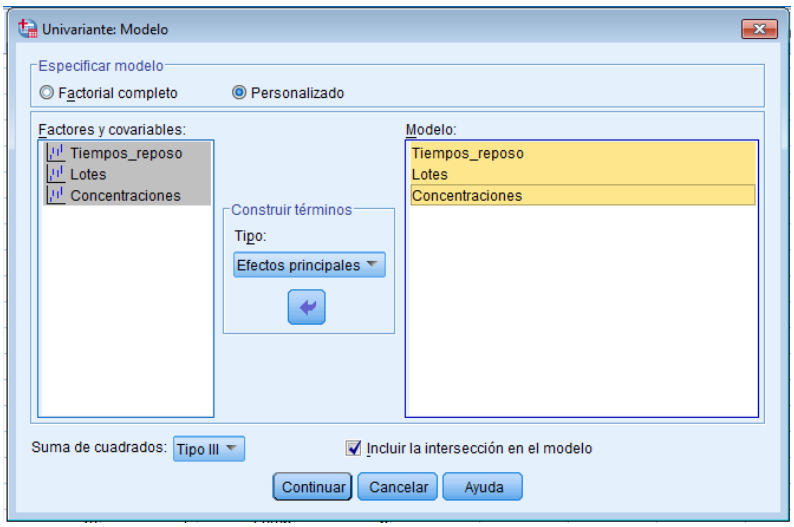
- Nombre: ***Tiempo_reposo***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **1**
- Decimales: **0**
- Valores: {**1, A; 2, B; 3, C; 4, D; 5, E; 6, F**}

- Nombre: ***Lotes***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **1**
- Decimales: **0**
- Valores: {**1, Lote1; 2, Lote2; 3, Lote 3; 4, Lote 4; 5, Lote** 5; 6, **Lote** 6}

- Nombre: ***Concentraciones***
- Tipo: **Numérico**
- Anchura: **1**
- Decimales: **0**

Para resolver los contrastes planteados. Se selecciona, en el menú principal, **Analizar/Modelo lineal general/ Univariante…** En la salida correspondiente, se introduce en el campo **Variable dependiente: *Rendimiento*** y en el campo **Factores fijos: *Tiempo_reposo, Lotes*** y ***Concentraciones*.** Para indicar que se trata de un modelo

sin interacción entre los tratamientos y los bloques, se debe pinchar en **Modelo** e indicar en la salida correspondiente que es un modelo aditivo.



Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Rendimiento

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	288,000[a]	15	19,200	1,108	,408
Intersección	12173,444	1	12173,444	702,539	,000
Tiempos_reposo	117,889	5	23,578	1,361	,281
Lotes	99,556	5	19,911	1,149	,368
Concentraciones	70,556	5	14,111	,814	,553
Error	346,556	20	17,328		
Total	12808,000	36			
Total corregida	634,556	35			

a. R cuadrado = ,454 (R cuadrado corregida = ,044)

Observando los valores de los p-valores, 0.281, 0.368 y 0.553; mayores respectivamente que el nivel de significación del 5%, deducimos que ningún efecto es significativo.

7. Diseño en Cuadrados Greco-Latinos

El modelo en cuadrado greco-latino se puede considerar como una extensión del modelo en cuadrado latino en el que se incluye una tercera variable control o variable de bloque. En este modelo como en el diseño en cuadrado latino, todos los factores deben tener el mismo número de niveles, K, y el número de observaciones necesarias sigue siendo K^2. Este diseño es, por tanto, una fracción del diseño completo en bloques aleatorizados con un factor principal y tres factores secundarios que requeriría K^4 observaciones.

Los cuadrados greco-latinos se obtienen por superposición de dos cuadrados latinos del mismo orden y ortogonales entre sí, uno de los cuadrados con letras latinas el otro con

letras griegas. Dos cuadrados reciben el nombre de ortogonales si, al superponerlos, cada letra latina y griega aparecen juntas una sola vez en el cuadrado resultante.

En el Fichero-Adjunto se muestra una tabla de cuadrados latinos que dan lugar, por superposición de dos de ellos, a cuadrados greco-latinos. Notamos que no es posible formar cuadrados greco-latinos de orden 6.

La Tabla siguiente ilustra un cuadrado greco-latino para K=4

Cuadrado greco-latino de orden 4			
A α	B β	C γ	D δ
D γ	C δ	B α	A β
B δ	A γ	D β	C α
C β	D α	A δ	B γ

Este diseño lo estudiaremos a continuación mediante el supuesto práctico

Supuesto práctico 6

Para comprobar el rendimiento de un proceso químico en cinco tiempos de reposo, se consideran cinco lotes de materia prima que reaccionan con cinco concentraciones de ácido distintas a cinco temperaturas distintas, de manera que cada lote de materia prima con cada concentración de ácido y cada temperatura se somete a un tiempo de reposo. Tanto la asignación de los tiempos de reposo a los lotes de materia prima, como las concentraciones de ácido, y las temperaturas, se hizo de forma aleatoria. En este estudio el científico considera que tanto los lotes de materia prima, las concentraciones y las temperaturas pueden influir en el rendimiento del proceso, por lo que los considera como variables de bloque cada una con cinco niveles y decide plantear un diseño por cuadrados greco-latinos como el que muestra en la siguiente tabla.

Rendimiento					
	Concentraciones de ácido				
Lote	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Lote 1	26 A α	21 B β	19 C γ	13 D δ	21 E η
Lote 2	22 B γ	26 C δ	24 D η	16 E α	20 A β
Lote 3	29 C η	26 D α	19 E β	18 A γ	16 B δ

Lote 4	32 D β	15 E γ	14 A δ	19 B η	27 C α
Lote 5	25 E δ	18 A η	19 B α	25 C β	21 D γ

La variable respuesta que vamos a estudiar es el rendimiento del proceso químico. El factor principal es tiempo de reposo que se presenta con cinco niveles.

Variable respuesta: ***Rendimiento***

Factor: ***Tiempos de reposo*** que tiene cinco niveles. Es un factor de efectos fijos ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar.

Bloques: ***Lotes, Concentraciones y Temperaturas***, cada uno con cinco niveles y de efectos fijos.

Tamaño del experimento: Número total de observaciones **(25).**

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

Nombre: ***Rendimiento*****; Tipo:** ***Numérico*****; Anchura:** ***2*****; Decimales:** ***0***

Nombre: ***Tiempo_reposo*****; Tipo:** ***Numérico*****; Anchura:** ***1*****; Decimales:** ***0*****; Valores:** ***{1, alpha; 2, beta; 3, gamma; 4, delta; 5, eta}***

Nombre: ***Temperatura*****; Tipo:** ***Numérico;*** **Anchura:** ***1*****; Decimales:** ***0;*** **Valores:** ***{1, A; 2, B; 3, C; 4, D; 5, E}***

Nombre: ***Lotes*****; Tipo:** ***Numérico*****; Anchura:** ***1*****; Decimales:** ***0*****; Valores:** ***{1, Lote1; 2, Lote2; 3, Lote 3; 4, Lote 4; 5, Lote 5}***

Nombre: ***Concentraciones;*** **Tipo:** ***Numérico*****; Anchura:** ***1*****; Decimales:** ***0*****.**

Para resolver los contrastes, se selecciona, en el menú principal, Analizar/Modelo lineal general/ Univariante… En la salida correspondiente, se introduce en el campo Variable dependiente: Rendimiento y en el campo Factores fijos: Tiempo_reposo, Lotes Concentraciones y Temperaturas. Para indicar que se trata de un modelo sin interacción entre los tratamientos y los bloques, se debe pinchar en Modelo e indicar en la salida correspondiente que es un modelo aditivo.

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Rendimiento

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	487,040[a]	16	30,440	2,916	,064
Intersección	11278,440	1	11278,440	1080,310	,000
Tiempos_reposo	94,960	4	23,740	2,274	,150
Temperatura	156,160	4	39,040	3,739	,053
Lotes	9,760	4	2,440	,234	,912
Concentraciones	226,160	4	56,540	5,416	,021
Error	83,520	8	10,440		
Total	11849,000	25			
Total corregida	570,560	24			

a. R cuadrado = ,854 (R cuadrado corregida = ,561)

Observando los valores de los p-valores, 0.150, 0.053, 0.912 y 0.021, deducimos que el único efecto significativo, al nivel de significación del 5%, es el efecto de la distintas concentraciones sobre el rendimiento del proceso químico.

8. Diseño en Cuadrados de Youden

Hemos estudiado que en el diseño en cuadrado latino se tiene que verificar que los tres factores tengan el mismo número de niveles, es decir que hay el mismo número de filas, de columnas y de letras latinas. Sin embargo, puede suceder que el número de niveles disponibles de uno de los factores de control sea menor que el número de tratamientos, en este caso estaríamos ante un diseño en cuadrado latino incompleto. Estos diseños fueron estudiados por W.J. Youden y se conocen con el nombre de cuadrados de Youden.

Este diseño lo estudiaremos a continuación mediante el supuesto práctico 7.

Supuesto práctico 7

Consideremos de nuevo el experimento sobre el rendimiento de un proceso químico en el que se está interesado en estudiar seis tiempos de reposo, A, B, C, D, E y F y se desea eliminar estadísticamente el efecto de los lotes materia prima y de las concentraciones de ácido distintas. Pero supongamos que sólo se dispone de cinco tipos de concentraciones. Para analizar este experimento se decidió utilizar un cuadrado de Youden con seis filas (los lotes de materia prima), cinco columnas (las distintas concentraciones) y seis letras latinas (los tiempos de reposo). Los datos correspondientes se muestran en la siguiente tabla.

Rendimiento					
	Concentraciones de ácido				
Lote	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Lote 1	12 A	24 B	10 C	18 D	21 E
Lote 2	21 B	26 C	24 D	16 E	20 F
Lote 3	20 C	16 D	19 E	18 F	16 A
Lote 4	22 D	15 E	14 F	19 A	27 B
Lote 5	15 E	13 F	17 A	25 B	21 C
Lote 6	17 F	11 A	12 B	22 C	14 D

Observamos que este diseño se convierte en un cuadrado latino si se le añade la columna F, A, B, C, D y E. En general, un cuadrado de Youden podemos considerarlo como un cuadrado latino al que le falta al menos una columna. Sin embargo, un cuadrado latino no se convierte en un cuadrado de Youden eliminando arbitrariamente más de una columna.

Un cuadrado de Youden se puede considerar como un diseño en bloques incompletos balanceado y simétrico en el que las filas corresponden a los bloques. En efecto, si asignamos

- el factor principal a las letras latinas,
- un factor secundario, el que tiene el mismo número de niveles que el factor principal, a las filas,

- un factor secundario, el que tiene menor número de niveles que el factor principal, a las columnas,

entonces, un cuadrado de Youden es un diseño en bloques incompletos balanceado y simétrico en el que

a) Cada tratamiento ocurre una vez en cada columna.
b) La posición del tratamiento dentro de un bloque indica el nivel del factor secundario correspondiente a las columnas.
c) El número de réplicas de un tratamiento dado es igual al número de tratamientos por bloque.

Recordamos que los parámetros que caracterizan este modelo son:

- I, J y K son el número de tratamientos, el número de bloques y el número de tratamientos por bloque, respectivamente.
- R, número de veces que cada tratamiento se presenta en el diseño, es decir el número de réplicas de un tratamiento dado.
- λ , número de bloques en los que un par de tratamientos ocurren juntos.
- N, número de observaciones.

Los valores de los parámetros del modelo en este ejemplo son:

N = I R = J K. En efecto, ya que N= 30; I = 6 = J; R = K = 5.

$$\lambda = R\frac{K-1}{I-1} = 5\times\frac{4}{5} = 4$$

El objetivo principal es estudiar la influencia de seis tiempos de reposo en el rendimiento de un proceso químico, por lo que se trata de un factor con seis niveles. Sin embargo, como los lotes de materia prima y las concentraciones son dos fuentes de variabilidad potencial, consideramos dos factores de bloque con seis y cinco niveles, respectivamente.

Variable respuesta: *Rendimiento*

Factor: Tiempo de reposo que tiene seis niveles. Es un factor de efectos fijos ya que viene decidido que niveles concretos se van a utilizar.

Bloques: *Lotes* y *Concentraciones*, con seis y cinco niveles, respectivamente y ambos son factores de efectos fijos.

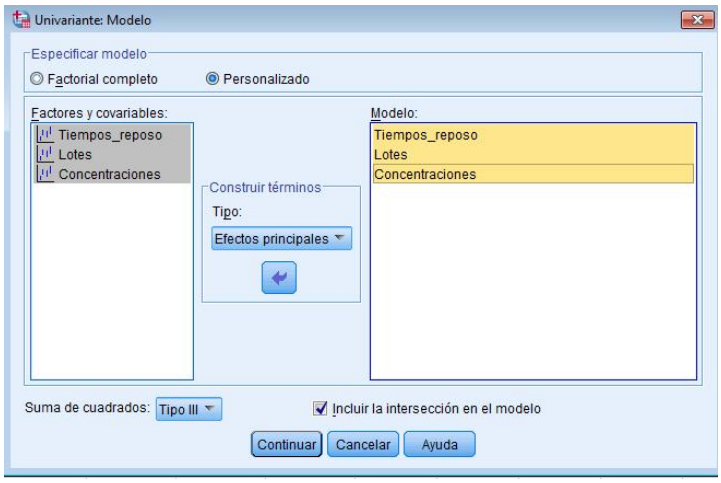
Tamaño del experimento: Número total de observaciones **(*30*).**

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

- **Nombre: *Rendimiento* ; Tipo: *Numérico* ; Anchura: *2* ; Decimales: *0***

- **Nombre:** ***Tiempo_reposo*** **; Tipo: Numérico ; Anchura:** ***1*** **; Decimales:** ***0*** **; Valores:** ***{1, A; 2, B; 3, C; 4, D; 5, E; 6, F}***
- **Nombre:** ***Lotes*** **; Tipo:** ***Numérico*** **; Anchura:** ***1*** **; Decimales:** ***0*** **; Valores:** ***{1, Lote1; 2, Lote2; 3, Lote 3; 4, Lote 4; 5, Lote 5; 6, Lote 6}***
- **Nombre:** ***Concentraciones*** **; Tipo:** ***Numérico*** **; Anchura:** ***1*** **; Decimales:** ***0.***

Para resolver los contrastes, se selecciona, en el menú principal, Analizar/Modelo lineal general/ Univariante… En la salida correspondiente, se introduce en el campo Variable dependiente: Rendimiento y en el campo Factores fijos: Tiempo_reposo, Lotes y Concentraciones. Para indicar que se trata de un modelo sin interacción entre los tratamientos y los bloques, se debe pinchar en Modelo e indicar en la salida correspondiente que es un modelo aditivo. Así mismo hay que indicar que el diseño en cuadrado de Youden es un diseño en bloques incompletos balanceado, por lo que hay que seleccionar la suma de cuadrados de tipo I.

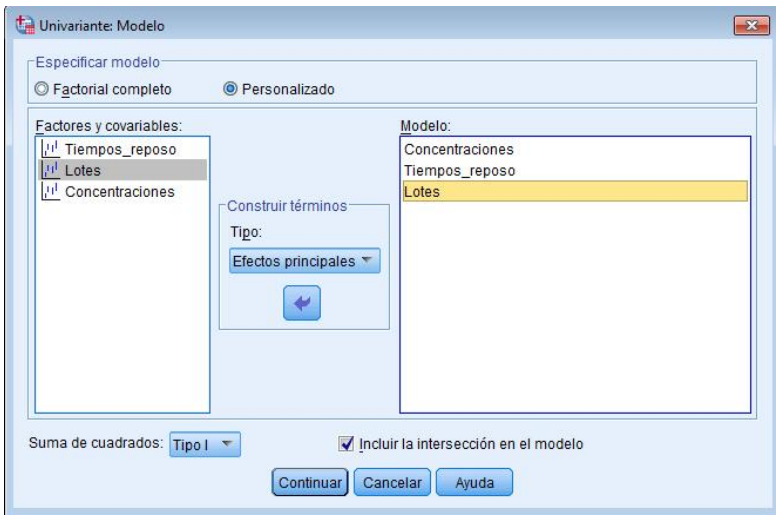


Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Rendimiento

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	326,167[a]	14	23,298	1,239	,342
Intersección	9900,833	1	9900,833	526,640	,000
Tiempos_reposo	153,133	5	30,627	1,629	,213
Lotes	112,733	5	22,547	1,199	,356
Concentraciones	61,667	4	15,417	,820	,532
Error	282,000	15	18,800		
Total	10509,000	30			
Total corregida	608,167	29			

a. R cuadrado = ,536 (R cuadrado corregida = ,104)

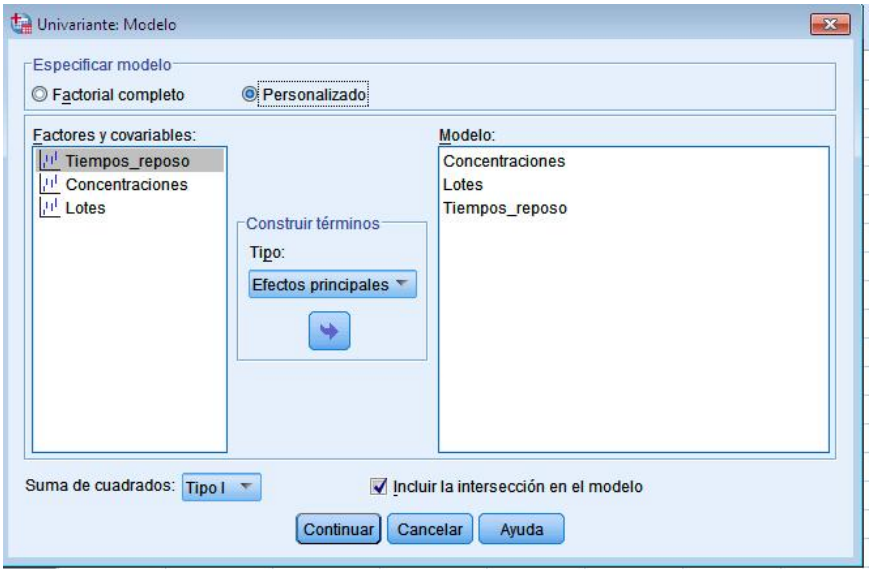


Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Rendimiento

Origen	Suma de cuadrados tipo I	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	326,167[a]	14	23,298	1,239	,342
Intersección	9900,833	1	9900,833	526,640	,000
Concentraciones	61,667	4	15,417	,820	,532
Tiempos_reposo	151,767	5	30,353	1,615	,216
Lotes	112,733	5	22,547	1,199	,356
Error	282,000	15	18,800		
Total	10509,000	30			
Total corregida	608,167	29			

a. R cuadrado = ,536 (R cuadrado corregida = ,104)



Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Rendimiento

Origen	Suma de cuadrados tipo I	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	326,167[a]	14	23,298	1,239	,342
Intersección	9900,833	1	9900,833	526,640	,000
Concentraciones	61,667	4	15,417	,820	,532
Lotes	111,367	5	22,273	1,185	,362
Tiempos_reposo	153,133	5	30,627	1,629	,213
Error	282,000	15	18,800		
Total	10509,000	30			
Total corregida	608,167	29			

a. R cuadrado = ,536 (R cuadrado corregida = ,104)

Observando los p-valores, 0.532, 0.356 y 0.213; mayores respectivamente que el nivel de significación del 5%, deducimos que ningún efecto es significativo.

9. Diseños Factoriales

En muchos experimentos es frecuente considerar dos o más factores y estudiar el efecto conjunto que dichos factores producen sobre la variable respuesta. Para resolver esta situación se utiliza el Diseño Factorial.

Se entiende por diseño factorial aquel diseño en el que se investigan todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores en cada réplica del experimento.

En estos diseños, los factores que intervienen tienen la misma importancia a priori y se supone por tanto, la posible presencia de interacción.

En este epígrafe vamos a considerar únicamente modelos de efectos fijos.

9.1 Diseños factoriales con dos factores

En primer lugar vamos a estudiar los diseños más simples, es decir aquellos en los que intervienen sólo dos factores. Supongamos que hay a niveles para el factor A y b niveles del factor B, cada réplica del experimento contiene todas las posibles combinaciones de tratamientos, es decir contiene los ab tratamientos posibles.

9.1.2 El modelo sin replicación

El modelo estadístico para este diseño es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + u_{ij}\ ,\ i = 1, \cdots, a\ ;\ \ j = 1, \cdots, b \quad , \text{ donde}$$

- y_{ij}: Representa la observación correspondiente al nivel (i) del factor A y al nivel (j) del factor B.

- μ: Efecto constante, común a todos los niveles de los factores, denominado media global.
- τ_i: Efecto producido por el nivel i-ésimo del factor A, ($\sum_i \tau_i = 0$).
- β_j: Efecto producido por el nivel j-ésimo del factor B, ($\sum_j \beta_j = 0$).
- $(\tau\beta)_{ij}$: Efecto producido por la interacción entre A×B, ($\sum_i (\tau\beta)_{ij} = \sum_j (\tau\beta)_{ij} = 0$).
- u_{ij} son vv aa. independientes con distribución $N(0,\sigma)$.

Supondremos que se toma una observación por cada combinación de factores, por tanto, hay un total de N=ab observaciones.

Parámetros a estimar:

Parámetros	Número
μ	1
τ_i	a - 1
β_j	b - 1
$(\tau\beta)_{ij}$	(a – 1)(b – 1)
σ^2	1
Total	ab + 1

A pesar de las restricciones impuestas al modelo,

$\sum_i \tau_i = \sum_j \beta^j = \sum_i (\tau\beta)_{ij} = \sum_j (\tau\beta)_{ij} = 0$,

el número de parámetros (ab+1) supera al número de observaciones (ab).

Por lo tanto, algún parámetro no será estimable.

Los residuos de este modelo son nulos, $e_{ij} = 0$, por lo tanto no es posible estimar la varianza del modelo y no se pueden contrastar la significatividad de los efectos de los factores. Dichos contrates sólo pueden realizarse si:

a) Suponemos que la interacción entre A×B es cero.

b) Replicamos el experimento (Tomamos varias observaciones por cada combinación de factores).

Supuesto práctico 8

En unos laboratorios se está investigando sobre el tiempo de supervivencia de unos animales a los que se les suministra al azar tres tipos de venenos y cuatro antídotos distintos. Se pretende estudiar si los tiempos de supervivencia de los anímales varían en función de las combinaciones veneno-antídoto. Los datos que se recogen en la tabla adjunta son los tiempos de supervivencia en horas.

	Antidoto			
Veneno	Antidoto 1	Antidoto 2	Antidoto 3	Antidoto 4
Veneno 1	4.5	11.0	4.5	7.1

Veneno 2	2.9	6.1	3.5	10.2
Veneno 3	2.1	3.7	2.5	3.6

El objetivo principal es estudiar la influencia de tres tipos de venenos y 4 tipos de antídotos en el tiempo de supervivencia de unos determinados animales, por lo que se trata de un modelo con dos factores: el veneno (con tres niveles) y el antídoto (con cuatro niveles). La variable que va a medir las diferencias entre los tratamientos es el tiempo que sobreviven los animales. Se combinan todos los niveles de los dos factores por lo que tenemos en total doce tratamientos.

Variable respuesta: *Tiempo de supervivencia*

Factor: *Tipo de veneno* que tiene tres niveles. Es un factor de efectos fijos ya que viene decidido qué niveles concretos se van a utilizar.

Factor: *Tipo de antídoto* que tiene cuatro niveles. Es un factor de efectos fijos ya que viene decidido qué niveles concretos se van a utilizar.

Tamaño del experimento: Número total de observaciones *(12).*

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

- **Nombre: *Tiempo_supervivencia*; Tipo: *Numérico*; Anchura: 2; Decimales: *0***
- **Nombre: *Tipo_veneno*; Tipo: *Numérico*; Anchura: *1*; Decimales: *0*; Valores: {*1, Veneno1; 2, Veneno2; 3, Veneno3*}**
- **Nombre: *Tipo_antídoto*; Tipo: *Numérico* ; Anchura: *1*; Decimales: *0*; Valores: {*1, Antídoto1; 2, Antídoto2; 3, Antídoto3; 4, Antídoto4*}**

Para resolver los contrastes, se selecciona, en el menú principal, Analizar/Modelo lineal general/ Univariante… En la salida correspondiente, se introduce en el campo Variable dependiente: Tiempo_supervivencia y en el campo Factores fijos: Tipo_veneno y Tipo_antídoto. Es un modelo de dos factores con 3 y 4 niveles cada uno y un total de 12 observaciones por lo que no puede haber interacción entre los factores ya que si la hubiera el número de parámetros del modelo superaría al número de observaciones y como consecuencia los residuos del modelo serían nulos y no se podrían contrastar la significatividad de los efectos de los factores. Indicamos que se trata de un modelo sin interacción entre los factores, para ello se debe pinchar en Modelo e indicar en la salida correspondiente que es un modelo aditivo. Se pulsa Continuar y Aceptar

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Tiempo_supervivencia

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	69,996[a]	5	13,999	3,515	,079
Intersección	317,241	1	317,241	79,664	,000
Tipo_veneno	30,587	2	15,293	3,840	,084
Tipo_antídoto	39,409	3	13,136	3,299	,099
Error	23,893	6	3,982		
Total	411,130	12			
Total corregida	93,889	11			

a. R cuadrado = ,746 (R cuadrado corregida = ,533)

Esta Tabla ANOVA recoge la descomposición de la varianza considerando como fuente de variación los doce tratamientos o grupos que se forman al combinar los niveles de los dos factores. Mediante esta tabla se puede estudiar sí varían los tiempos que sobreviven los animales en función de las combinaciones veneno-antídoto. Es decir, se pueden estudiar si existen diferencias significativas entre los tiempos medios de supervivencia con los distintos tipos de venenos y antídotos, pero no se puede estudiar si la efectividad de los antídotos es la misma para todos los venenos. Observando los p-valores, 0.084 y 0.099; mayores respectivamente que el nivel de significación del 5%, deducimos que ningún efecto es significativo. Por lo tanto, no existen diferencias en los tiempos medios de supervivencia de los animales, en función de la pareja veneno-antídoto que se les suministra.

9.1.3 El modelo con replicación

El modelo estadístico para este diseño es:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + u_{ijk}\ ,\ \ i = 1,\cdots,a\ ;\ \ j = 1,\cdots,b\ ;\ \ k = 1,\cdots,r \quad ,$$

donde r es el número de replicaciones y N = abr es el número de observaciones.

El número de parámetros de este modelo es, como en el modelo de dos factores sin replicación, ab+1 pero en este caso el número de observaciones es abr.

La descripción del diseño así como la terminología subyacente la vamos a introducir mediante el siguiente supuesto práctico.

Supuesto práctico 9

Consideremos el supuesto práctico anterior en el que realizamos dos réplicas por cada tratamiento. Los datos que se recogen en la tabla adjunta son los tiempos de

supervivencia en horas de unos animales a los que se les suministra al azar tres venenos y cuatro antídotos. El objetivo es estudiar qué antídoto es el adecuado para cada veneno.

	Antídoto			
Veneno	Antídoto 1	Antídoto 2	Antídoto 3	Antídoto 4
Veneno 1	4.5 4.3	11.0 7.2	4.5 7.6	7.1 6.2
Veneno 2	2.9 2.3	6.1 12.4	3.5 4.0	10.2 3.8
Veneno 3	2.1 2.3	3.7 2.9	2.5 2.2	3.6 3.3

El modelo matemático que planteamos es el siguiente:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + u_{ijk} \ , \ i = 1,2,3 \ ; \ j = 1,2,3,4 \ ; \ k = 1,2 \quad , \text{ donde}$$

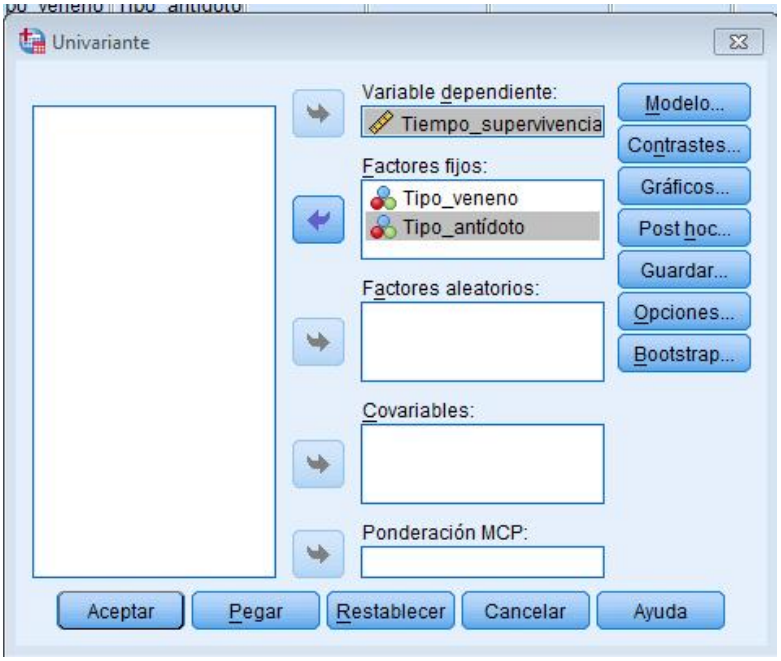
- y_{ijk}: Representa el tiempo de supervivencia del animal k al que se le suministró el veneno i y el antídoto j.
- μ: Efecto constante, común a todos los niveles de los factores, denominado media global.
- τ_i: Efecto medio producido por el veneno i, ($\sum_i \tau_i = 0$).
- β_j: Efecto medio producido por antídoto j, ($\sum_j \beta_j = 0$).
- $(\tau\beta)_{ij}$: Efecto medio producido por la interacción entre el veneno i y el antídoto j, ($\sum_i (\tau\beta)_{ij} = \sum_j (\tau\beta)_{ij} = 0$).
- u_{ijk}: Vv aa. independientes con distribución $N(0,\sigma)$.

Variable respuesta: *Tiempo de supervivencia*; Factor: *Tipo de veneno* (tres niveles). **Factor: *Tipo de antídoto*** (cuatro niveles). Ambos factores de efectos fijos.

Tamaño del experimento: Número total de observaciones (***24***).

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza introduciendo las variables definidas anteriormente en el supuesto práctico 8.

Para resolver los contrastes, se selecciona, en el menú principal, Analizar/Modelo lineal general/ Univariante… En la salida correspondiente, se introduce en el campo Variable dependiente: Tiempo_supervivencia y en el campo Factores fijos: Tipo_veneno y Tipo_antídoto. Es un modelo de dos factores donde se quiere estudiar la posible interacción entre ambos factores, por lo que se realiza el modelo completo donde aparezca dicha interacción. Así que no es necesario especificar nada en la opción Modelo y se pulsa directamente Aceptar:



Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Tiempo_supervivencia

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	141,068[a]	11	12,824	2,876	,041
Intersección	602,002	1	602,002	135,003	,000
Tipo_veneno	60,443	2	30,222	6,777	,011
Tipo_antídoto	60,262	3	20,087	4,505	,024
Tipo_veneno * Tipo_antídoto	20,363	6	3,394	,761	,614
Error	53,510	12	4,459		
Total	796,580	24			
Total corregida	194,578	23			

a. R cuadrado = ,725 (R cuadrado corregida = ,473)

La Tabla ANOVA muestra las filas de Tipo_veneno, Tipo_antídoto y Tipo_veneno*Tipo_antídoto que corresponde a la variabilidad debida a los efectos de cada uno de los factores y de la interacción entre ambos.

Las preguntas que nos planteamos son: ¿Son los venenos igual de peligrosos? ¿Y los antídotos son igual de efectivos? La efectividad de los antídotos, ¿es la misma para todos los venenos? Para responder a estas preguntas, comenzamos comprobando si el efecto de los antídotos es el mismo para todos los venenos. Para ello observamos el valor del estadístico (F_{exp}= 0.761) que contrasta la hipótesis correspondiente a la interacción entre ambos factores (H0: $(\tau\beta)_{ij} = 0$). Dicho valor deja a la derecha un Sig. = 0.614, mayor que el nivel de significación 0.05. Por lo tanto la interacción entre ambos factores no es significativa y debemos eliminarla del modelo. Construimos de nuevo la

Tabla ANOVA en la que sólo figurarán los efectos principales. Para ello en la ventana Univariante, pinchamos en Modelo e indicamos en la salida correspondiente que es un modelo aditivo. Se pulsa Continuar y Aceptar y se muestra la siguiente Tabla

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Tiempo_supervivencia

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	120,705[a]	5	24,141	5,882	,002
Intersección	602,002	1	602,002	146,684	,000
Tipo_veneno	60,443	2	30,222	7,364	,005
Tipo_antídoto	60,262	3	20,087	4,894	,012
Error	73,873	18	4,104		
Total	796,580	24			
Total corregida	194,578	23			

a. R cuadrado = ,620 (R cuadrado corregida = ,515)

Esta tabla muestra dos únicas fuentes de variación, lo efectos principales de los dos factores (Tipo_veneno y Tipo_antídoto), y se ha suprimido la interacción entre ambos. Se observa que el valor de la Suma de Cuadrados del error de este modelo (73.873) se ha formado con los valores de las Sumas de cuadrados del error y de la interacción del modelo anterior (20.363 + 53.510 = 73.873). Observando los valores de los p-valores, 0.005 y 0.012 asociados a los contrastes principales, se deduce que los dos efectos son significativos a un nivel de significación del 5%. Deducimos que ni la gravedad de los venenos es la misma, ni la efectividad de los antídotos, pero dicha efectividad no depende del tipo de veneno con el que se administre ya que la interacción no es significativa.

Como hemos dicho en el enunciado, el objetivo del estudio es determinar qué antídoto es el adecuado para cada veneno. Con el fin de determinar qué antídoto es el mejor utilizamos el método de Tukey, para ello en la ventana Univariante seleccionamos Post_hoc…y, se pasa la variable Tipo_antídoto al campo Pruebas posthoc para: y seleccionamos la prueba de Tukey. Se pulsa Continuar y Aceptar.

Tiempo_supervivencia

DHS de Tukey[a,b]

Tipo_antídoto	N	Subconjunto 1	Subconjunto 2
Antídoto1	6	3,0667	
Antídoto 3	6	4,0500	4,0500
Antídoto 4	6	5,7000	5,7000
Antídoto 2	6		7,2167
Sig.		,190	,094

Se muestran las medias de los grupos de subconjuntos homogéneos.
Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática (Error) = 4,459.

a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 6,000
b. Alfa = 0,05.

La tabla nos muestra dos subconjuntos homogéneos, el primero está formado por los antídotos 1, 3 y 4; esto nos indica que no se aprecian diferencias significativas entre ellos. El segundo subconjunto homogéneo está formado por los antídotos 3, 4 y 2 indicándonos, como en el caso anterior que no hay diferencias significativas entre estos tres tipos de antídotos. Sin embargo si hay diferencias significativas entre ambos subconjuntos, siendo el Antídoto2 significativamente más efectivo que el Antídoto1 (su tiempo medio de supervivencia es 7.2167, superior a los obtenidos con los otros antídotos), y significativamente superior al del Antídoto1.

9.2 Diseños factoriales con tres factores

Supongamos que hay a niveles para el factor A, b niveles del factor B y c niveles para el factor C y que cada réplica del experimento contiene todas las posibles combinaciones de tratamientos, es decir contiene los abc tratamientos posibles.

9.2.1 El modelo sin replicación

El modelo estadístico para este diseño es:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + u_{ijk}\ ,\ i = 1,2,...,a\ ;\ j = 1,2,...,b\ ;\ k = 1,2,...,c \quad \text{, donde}$$

- y_{ijk}: Representa la observación correspondiente al nivel (i) del factor A, al nivel (j) del factor B y al nivel (k) del factor C.
- μ: Efecto constante, común a todos los niveles de los factores, denominado media global.
- τ_i: Efecto producido por el nivel i-ésimo del factor A, ($\sum_i \tau_i = 0$).
- β_j: Efecto producido por el nivel j-ésimo del factor B, ($\sum_j \beta_j = 0$).
- γ_k: Efecto producido por el nivel k -ésimo del factor C, ($\sum_k \gamma_k = 0$).

Ana María Lara Porras
Profesora del Dpto. Estadística e IO
Universidad de Granada (España)

- $(\tau\beta)_{ij}$: Efecto producido por la interacción entre A×B, ($\sum_i (\tau\beta)_{ij} = \sum_j (\tau\beta)_{ij} = 0$).
- $(\tau\gamma)_{ik}$: Efecto producido por la interacción entre A×C, ($\sum_i (\tau\gamma)_{ik} = \sum_k (\tau\gamma)_{ik} = 0$).
- $(\beta\gamma)_{jk}$: Efecto producido por la interacción entre B×C, ($\sum_j (\beta\gamma)_{jk} = \sum_j (\beta\gamma)_{jk} = 0$).
- $(\tau\beta\gamma)_{ijk}$: Efecto producido por la interacción entre A×B×C, ($\sum_i (\tau\beta\gamma)_{ijk} = \sum_j (\tau\beta\gamma)_{ijk} = \sum_k (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$).
- u_{ijk}: Vv aa. independientes con distribución $N(0,\sigma)$.

Supondremos que se toma una observación por cada combinación de factores, por tanto, hay un total de N=abc observaciones.

Parámetros a estimar:

Parámetros	Número
μ	1
τ_i	a - 1
β_j	b - 1
$(\tau\beta)_{ij}$	(a – 1)(b – 1)
$(\tau\gamma)_{ik}$	(a– 1)(c – 1)
$(\beta\gamma)_{jk}$	(b – 1)(c – 1)
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	(a – 1)(b – 1)(c – 1)
σ^2	1
Total	abc + 1

A pesar de las restricciones impuestas al modelo,

$\sum_i \tau_i = \sum_j \beta^j = \sum_i (\tau\beta)_{ij} = \ldots = \ldots = \sum_k (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$,

el número de parámetros (abc+1) supera al número de observaciones (abc).

Por lo tanto, algún parámetro no será estimable.

En este modelo la variabilidad total se descompone en:

SCT=SCA+SCB+SCC+SC(AB)+SC(AC)+SC(BC)+SC(ABC)+SCR

Que representan la Suma de Cuadrados Total, S.C. entre los niveles de A, S.C. entre los niveles de B, S.C. entre los niveles de C, S.C. de las interacciones A×B, A×C, B×C, A×B×C y la S.C. del error, respectivamente.

A partir de la ecuación básica del Análisis de la Varianza se pueden construir los cuadrados medios definidos como:

Cuadrado medio total: CMT=(SCT)/(n-1)

Cuadrado medio de A: CMA=(SCA)/(a-1)

Cuadrado medio de B: CMB=(SCB)/(b-1)

Cuadrado medio de C: CMC=(SCC)/(c-1)

Cuadrado medio de las interacciones: A×B: CM(AB)=(SC(AB))/((a-1)(b-1)); A×C: CM(AC)=(SC(AC))/((a-1)(c-1)); B×C: CM(BC)=(SC(BC))/((b-1)(c-1)); A×B×C: CM(ABC)=(SC(ABC))/((a-1)(b-1(c-1))

Cuadrado medio residual: CMR=(SCR)/((a-1)(b-1(c-1))

Al tratarse de un modelo sin replicación, los contrastes sólo se pueden realizar si se supone que la interacción de tercer orden es cero. En esta hipótesis, CM(ABC)=CMR y los contrastes de cada uno de los factores e interacciones comparan su cuadrado medio correspondiente con la varianza residual para construir el estadístico de contraste.

El objetivo del análisis es realizar los contrastes sobre los efectos principales y las interacciones de orden dos.

Supuesto práctico 10

En una fábrica de refrescos está haciendo unos estudios en la planta embotelladora. El objetivo es obtener más uniformidad en el llenado de las botellas. La máquina de llenado teóricamente llena cada botella a la altura correcta, pero en la práctica hay variación, y la embotelladora desea entender mejor las fuentes de esta variabilidad para eventualmente reducirla. En el proceso se pueden controlar tres factores durante el proceso de llenado: El % de carbonato (factor A), la presión del llenado (factor B) y el número de botellas llenadas por minuto que llamaremos velocidad de la línea (factor C). Se consideran tres niveles para el factor A (10%, 12%, 14%), dos niveles para el factor B (25psi, 30psi) y dos niveles para el factor C (200bpm, 250bpm). Los datos recogidos de la desviación de la altura objetivo se muestran en la tabla adjunta

	Presión (B)			
	25 psi		30 psi	
	Velocidad (C)		Velocidad (C)	
% Carbono (A)	200	250	200	250
10	10	3	5	-1
12	11	2	5	-3
14	2	4	-3	1

Analizar los resultados y obtener las conclusiones apropiadas.

El modelo matemáticos que planteamos es el siguiente:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + u_{ijk}\ ,\ i = 1,2,3\ ;\ j = 1,2\ ;\ k = 1,2 \quad \text{, donde}$$

y_{ijk}: Representa la desviación de la altura objetivo en la botella al porcentaje i de carbono, a la concentración j y a la velocidad k.

μ: Efecto constante, común a todos los niveles de los factores, denominado media global.

τ_i: Efecto medio producido por el tanto por ciento i de carbono.

β_j: Efecto medio producido por la presión j.

γ_k: Efecto producido por la velocidad k.

$(\tau\beta)_{ij}$: Efecto medio producido por la interacción entre el porcentaje i de carbono y la presión j.

$(\tau\gamma)_{ik}$: Efecto producido por la interacción entre el porcentaje i de carbono y la velocidad k.

$(\beta\gamma)_{jk}$: Efecto producido por la interacción entre la presión j y la velocidad k.

$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$: Efecto producido por la interacción entre el porcentaje i de carbono, la presión j y la velocidad k.

Estos efectos son parámetros a estimar, con las condiciones $\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = \sum_i (\tau\beta)_{ij} = \sum_j (\tau\beta)_{ij} = , ..., = \sum_k (\beta\gamma)jk = 0$,

u_{ijk} son vv aa. independientes con distribución $N(0,\sigma)$.

La variable respuesta de este experimento es la Desviación que se produce en la altura de llenado en las botellas de refresco, siendo dichas botellas las unidades experimentales. En estas desviaciones de la altura de llenado marcada como objetivo intervienen tres factores: Porcentaje de carbono que presenta tres niveles 10%, 12% y 14%; Presión, con dos niveles 25 psi y 30 psi y Velocidad, con dos niveles 200 y 250. Los niveles de los factores han sido fijados por el experimentador, por lo que todos los factores son de efectos fijos. Se trata de un diseño trifactorial de efectos fijos, donde el número de tratamientos es 3×2×2 = 12.

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza definiendo las variables e introduciendo los datos:

Nombre: *Desviación*; Tipo: *Numérico* ; Anchura: *2* ; Decimales: *0*

Nombre: *Carbono*; Tipo: *Numérico* ; Anchura: *1*; Decimales: *0*; Valores: {*1, 10 por ciento; 2, 12 por ciento; 3, 14 por ciento*}

Nombre: *Presión*; Tipo: *Numérico* ; Anchura: *1*; Decimales: *0*; Valores: {*1, 25 psi; 2, 30 psi*}

Nombre: *Velocidad*; Tipo: *Numérico*; Anchura: 1; Decimales: *0*; Valores: {*1, Velocidad (200); 2, Velocidad (250)*}

Para resolver los contrastes, se selecciona, en el menú principal, Analizar/Modelo lineal general/ Univariante… En la salida correspondiente, se introduce en el campo Variable dependiente: Desviación y en el campo Factores fijos: Carbono, Presión y Velocidad. Es un modelo de tres factores con 3, 2 y 2 niveles cada uno y un total de 12 observaciones por lo que no puede haber interacción entre los tres factores ya que si la hubiera el número de parámetros del modelo superaría al número de observaciones y como consecuencia los residuos del modelo serían nulos y no se podrían contrastar la significatividad de los efectos de los factores. Indicamos que se trata de un modelo sin

interacción entre los tres factores, para ello se debe pinchar en Modelo e indicar en la salida correspondiente que consta de efectos principales y de interacciones de orden dos. Se pulsa Continuar y Aceptar.

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Desviación

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	215,833[a]	9	23,981	287,778	,003
Intersección	108,000	1	108,000	1296,000	,001
Carbono	24,500	2	12,250	147,000	,007
Presión	65,333	1	65,333	784,000	,001
Velocidad	48,000	1	48,000	576,000	,002
Carbono * Presión	1,167	2	,583	7,000	,125
Carbono * Velocidad	75,500	2	37,750	453,000	,002
Presión * Velocidad	1,333	1	1,333	16,000	,057
Error	,167	2	,083		
Total	324,000	12			
Total corregida	216,000	11			

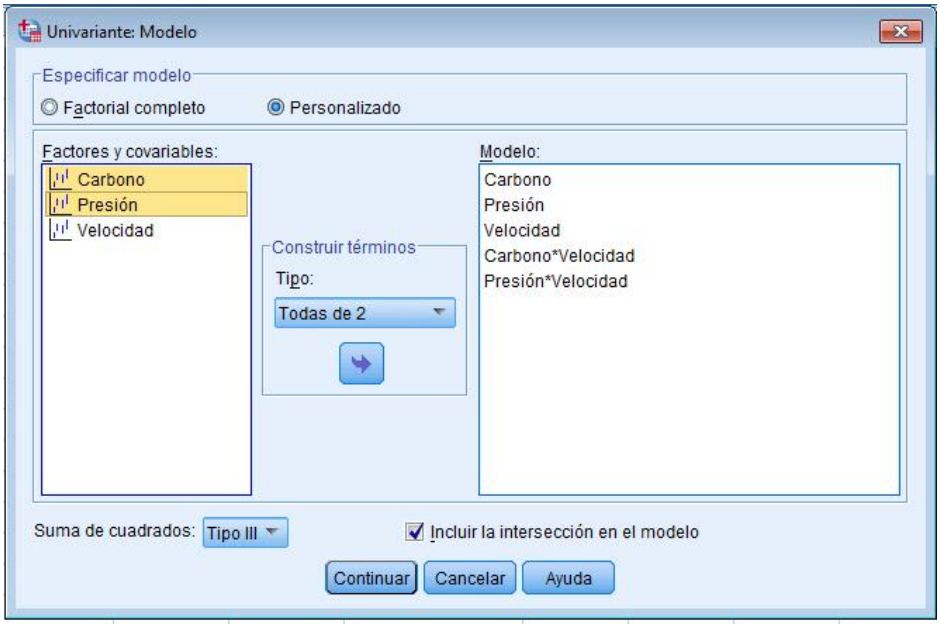
a. R cuadrado = ,999 (R cuadrado corregida = ,996)

La Tabla ANOVA muestra las filas de Carbono, Presión, Velocidad, Carbono*Presión, Carbono*Velocidad y Presión*Velocidad que corresponden a la variabilidad debida a los efectos de cada uno de los factores y a las interacciones de orden dos entre ambos. En dicha Tabla se indica que para un nivel de significación del 5% los efectos que no son significativos del modelo planteado son las interacciones entre los factores Carbono*Presión y Presión*Velocidad ya que los p-valores correspondientes a estos efectos son 0.125 y 0.057 mayores que el nivel de significación.

Como consecuencia de este resultado, replanteamos el modelo suprimiendo en primer lugar el efecto Carbono*Presión, cuya significación es mayor, y resulta el siguiente modelo matemático:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + u_{ijk}\ ,\ i = 1,2,3;\ \ j = 1,2;\ \ k = 1,2$$

donde los efectos deben cumplir las condiciones expuestas anteriormente. Para resolverlo mediante SPSS, en la ventana Univariante: Modelo suprimimos la interacción Carbono*Presión. Se pulsa Continuar y Aceptar. La tabla ANOVA que corresponde a este modelo es la siguiente



Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Desviación

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	214,667[a]	7	30,667	92,000	,000
Intersección	108,000	1	108,000	324,000	,000
Carbono	24,500	2	12,250	36,750	,003
Presión	65,333	1	65,333	196,000	,000
Velocidad	48,000	1	48,000	144,000	,000
Carbono * Velocidad	75,500	2	37,750	113,250	,000
Presión * Velocidad	1,333	1	1,333	4,000	,116
Error	1,333	4	,333		
Total	324,000	12			
Total corregida	216,000	11			

a. R cuadrado = ,994 (R cuadrado corregida = ,983)

El efecto Presión*Velocidad sigue siendo no significativo por lo que lo suprimimos del modelo y replanteamos el siguiente modelo matemático

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\gamma)_{ik} + u_{ijk}\ ,\ i = 1,2,3;\ \ j = 1,2;\ \ k = 1,2$$

donde los efectos deben cumplir las condiciones expuestas anteriormente. Para resolverlo mediante SPSS, en la ventana Univariante: Modelo suprimimos la interacción

Presión*Velocidad. Se pulsa Continuar y Aceptar. La tabla ANOVA que corresponde a este modelo es la siguiente:

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Desviación

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	213,333[a]	6	35,556	66,667	,000
Intersección	108,000	1	108,000	202,500	,000
Carbono	24,500	2	12,250	22,969	,003
Presión	65,333	1	65,333	122,500	,000
Velocidad	48,000	1	48,000	90,000	,000
Carbono * Velocidad	75,500	2	37,750	70,781	,000
Error	2,667	5	,533		
Total	324,000	12			
Total corregida	216,000	11			

a. R cuadrado = ,988 (R cuadrado corregida = ,973)

Todos los efectos de este último modelo planteado son significativos y por lo tanto es en este modelo donde vamos a realizar el estudio. Existen diferencias significativas entre los distintos porcentajes del Carbono, los dos tipos de presión, las dos velocidades de llenado y la interacción entre el porcentaje de Carbono y la Velocidad de llenado.

En primer lugar estudiamos qué porcentajes de carbono son significativamente diferentes mediante el método de Tukey. Para ello en la ventana Univariante seleccionamos Post_hoc…y, se pasa la variable Carbono al campo Pruebas posthoc para: y seleccionamos la prueba de Tukey. Se pulsa Continuar y Aceptar.

Comparaciones múltiples

Desviación
DHS de Tukey

(I)Carbono	(J)Carbono	Diferencia de medias (I-J)	Error típ.	Sig.	Intervalo de confianza 95%	
					Límite inferior	Límite superior
10 por ciento	12 por ciento	,50	,516	,626	-1,18	2,18
	14 por ciento	3,25*	,516	,003	1,57	4,93
12 por ciento	10 por ciento	-,50	,516	,626	-2,18	1,18
	14 por ciento	2,75*	,516	,007	1,07	4,43
14 por ciento	10 por ciento	-3,25*	,516	,003	-4,93	-1,57
	12 por ciento	-2,75*	,516	,007	-4,43	-1,07

Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática(Error) = ,533.

*. La diferencia de medias es significativa al nivel 0,05.

Subconjuntos homogéneos

Desviación

DHS de Tukey[a,b]

Carbono	N	Subconjunto	
		1	2
14 por ciento	4	1,00	
12 por ciento	4		3,75
10 por ciento	4		4,25
Sig.		1,000	,626

Se muestran las medias de los grupos de subconjuntos homogéneos.
Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática (Error) = ,533.

a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 4,000
b. Alfa = 0,05.

Comprobamos que el porcentaje de Carbono que produce mayores desviaciones en el llenado de las botellas es el 10% y el que produce la menor desviación es el 14%. También se observa que hay dos grupos muy diferenciados, siendo el porcentaje de Carbono del 14% el que presenta diferencias significativas con los otros dos porcentajes. No habiendo diferencias significativas entre los porcentajes 12% y 10%.

Los factores Presión y Velocidad tienen cada uno dos niveles por lo tanto no se puede aplicar ningún método de comparaciones múltiples para comprobar qué tipo de Presión y qué Velocidad de llenado produce mayor/menor desviación en el llenado de las botellas. Podemos resolverlo calculando los llenados medios de cada uno de los niveles de los factores, para ello seleccionamos Analizar/Estadísticos descriptivos/Explorar... y en la ventana resultante, se introduce en el campo Lista de dependiente: Desviación, en el campo Lista de f actores: Presión y Velocidad y en Visualizar se selecciona Estadísticos

Explorar
Carbono
Lista de dependientes:
Desviación
Lista de factores:
Presión
Velocidad
Etiquetar los casos mediante:
Estadísticos...
Gráficos...
Opciones...
Bootstrap...
Visualización
Ambos
Estadísticos
Gráficos
Aceptar
Pegar
Restablecer
Cancelar
Ayuda

Ana María Lara Porras
Profesora del Dpto. Estadística e IO
Universidad de Granada (España)

Descriptivos

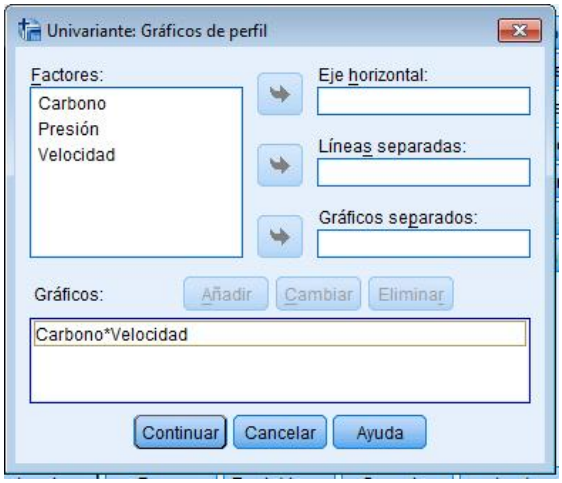
	Presión			Estadístico	Error típ.
Variación	25 psi	Media		5,33	1,667
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	1,05	
			Límite superior	9,62	
		Media recortada al 5%		5,20	
		Mediana		3,50	
		Varianza		16,667	
		Desv. típ.		4,082	
		Mínimo		2	
		Máximo		11	
		Rango		9	
		Amplitud intercuartil		8	
		Asimetría		,857	,845
		Curtosis		-1,752	1,741
	30 psi	Media		,67	1,498
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	-3,18	
			Límite superior	4,52	
		Media recortada al 5%		,63	
		Mediana		,00	
		Varianza		13,467	
		Desv. típ.		3,670	
		Mínimo		-3	
		Máximo		5	
		Rango		8	
		Amplitud intercuartil		8	
		Asimetría		,362	,845
		Curtosis		-2,103	1,741

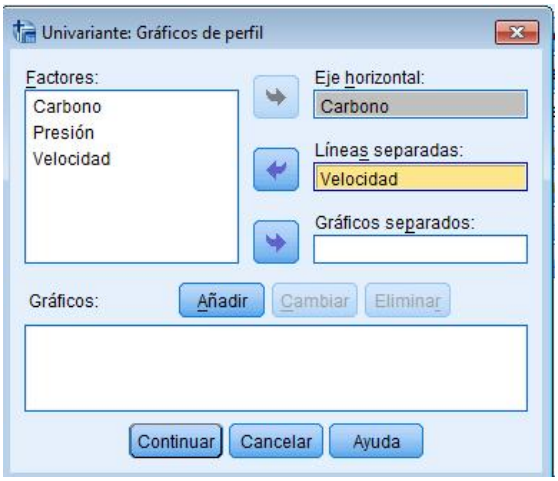
Descriptivos

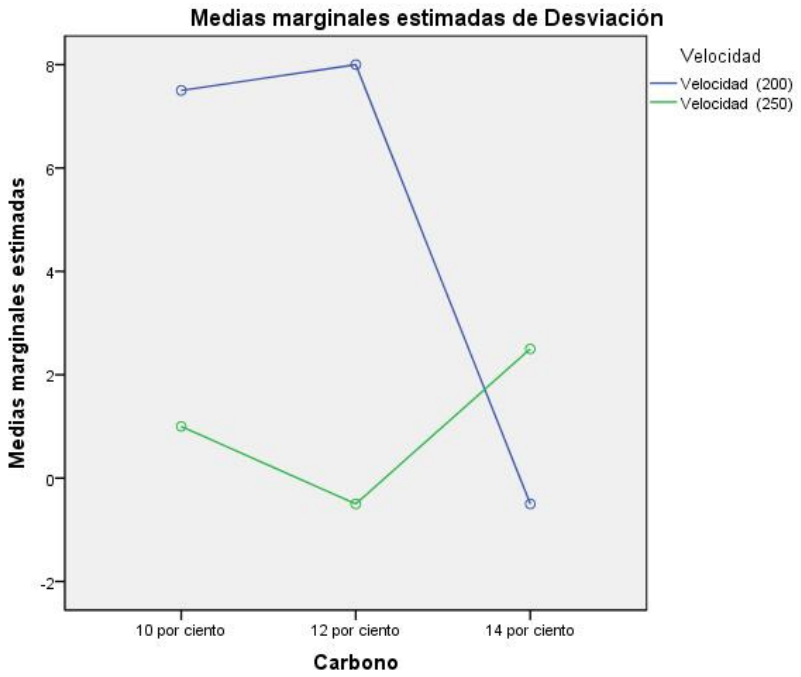
	Velocidad			Estadístico	Error típ.
Variación	Velocidad (200)	Media		5,00	2,113
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	-,43	
			Límite superior	10,43	
		Media recortada al 5%		5,11	
		Mediana		5,00	
		Varianza		26,800	
		Desv. típ.		5,177	
		Mínimo		-3	
		Máximo		11	
		Rango		14	
		Amplitud intercuartil		10	
		Asimetría		-,428	,845
		Curtosis		-,307	1,741
	Velocidad (250)	Media		1,00	1,065
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	-1,74	
			Límite superior	3,74	
		Media recortada al 5%		1,06	
		Mediana		1,50	
		Varianza		6,800	
		Desv. típ.		2,608	
		Mínimo		-3	
		Máximo		4	
		Rango		7	
		Amplitud intercuartil		5	
		Asimetría		-,609	,845
		Curtosis		-,649	1,741

La Presión a 25 psi produce mayor desviación de llenado que a 30 psi ya que su desviación media es de 5.33 fente a 0.67 y respecto a la Velocidad observamos que a una Velocidad de 200 se produce mayor desviación en el llenado de las botellas de refresco (valor medio de desviación es de 5 frente a un valor medio de 1 para la Velocidad de 250).

A continuación analizamos el efecto de la interacción de los factores Carbono*Velocidad mediante el gráfico de medias. Para ello, en la ventana Univariante se selecciona Gráficos… En la salida correspondiente se especifica cuál de los dos factores se representa en el eje de abscisas y cuál se utiliza para dibujar las rectas. Seleccionamos en el campo Eje horizontal: la variable Carbono y en Líneas separadas: la variable Velocidad. Pinchamos Añadir y pulsando Continuar y Aceptar se obtiene el siguiente gráfico de medias.







Al cruzarse las medias de las distintas velocidades se confirma la presencia de interacción entre los factores Carbono*Velocidad se observa que:

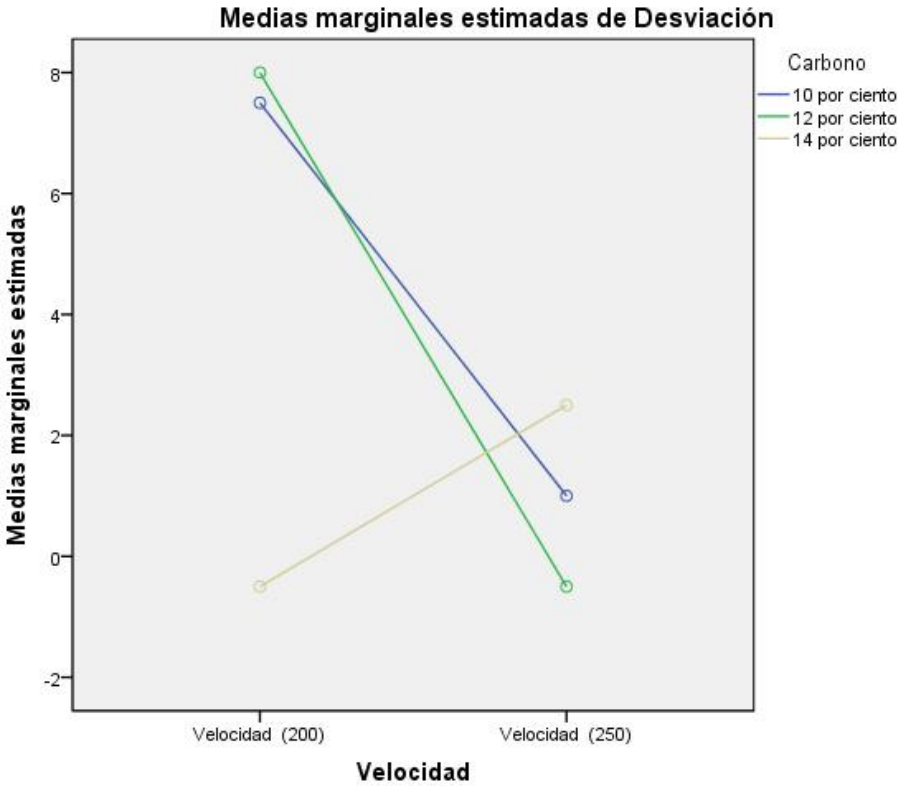
Al variar el porcentaje de Carbono de 12 % al 14% y manteniendo una Velocidad de 200, la Desviación de llenado varía dependiendo del porcentaje de Carbono, produciéndose la mayor Desviación Media de llenado al porcentaje de Carbono del 12% y la menor al 14%.

Manteniendo la Velocidad a 200, la Desviación de llenado aumenta levemente del porcentaje del 10% al 12% y disminuye bruscamente al 14%.

Manteniendo la Velocidad a 250 la Desviación de llenado disminuye del porcentaje del 10% al 12% y aumenta al 14%.

Lo que se desea averiguar en cuando se producen las menores Desviaciones de llenado y observando la gráfica comprobamos que dichas Desviaciones se producen al porcentaje del 12% y 250 de Velocidad y al 14% y Velocidad de 200.

También se puede realizar gráfico de medias Velocidad*Carbono, para ello seleccionamos en el campo Eje horizontal: la variable Velocidad y en Líneas separadas: la variable Carbono. Pinchamos Añadir y pulsando Continuar y Aceptar se obtiene el siguiente gráfico de medias



Al variar la Velocidad de 200 a 250 y manteniendo el porcentaje de Carbono al 10%, la desviación de llenado varía dependiendo de la Velocidad, produciéndose la mayor Desviación media de llenado a la Velocidad de 200 y la menor a la Velocidad de 250.

La Desviación de llenado desciende bruscamente de la Velocidad 200 a 250 tanto con el porcentaje de Carbono de 10% y de 12%. En cambio el comportamiento es diferente al 14 % de Carbono. A este último porcentaje la Desviación de llenado de las botellas es menor a una Velocidad de 200 y va aumentando a una Velocidad de 250.

Concluyendo, la menor Desviación de llenado se produce a una Velocidad de 250 y una Concentración del 12%.

9.2.2 El modelo con replicación

El modelo estadístico para este diseño es:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + u_{ijkl} \ , \ i = 1, 2, ..., a \ ; \ j = 1, 2, ..., b \ ; \ k = 1, 2, ..., c \ ; \ l = 1, 2, ..., r$$

donde r es el número de replicaciones y N = abcr es el número de observaciones.

El número de parámetros de este modelo es, como en el modelo de tres factores sin replicación, abc+1 pero en este caso el número de observaciones es abcr.

El objetivo del análisis de este modelo es realizar los contrastes sobre los efectos principales, las interacciones de orden dos y la interacción de orden tres.

Supuesto práctico 11

Consideremos el supuesto práctico anterior en el que realizamos dos réplicas por cada tratamiento. En la Tabla adjunta se muestran los datos recogidos de la desviación de la altura objetivo de las botellas de refresco. En el proceso de llenado, la embotelladora puede controlar tres factores durante el proceso: El porcentaje de carbonato (factor A) con tres niveles (10%, 12%, 14%), la presión del llenado (factor B) con dos niveles (25psi, 30psi) y el número de botellas llenadas por minuto que llamaremos velocidad de la línea (factor C) con dos niveles (200bpm, 250bpm).

	Presión (B)			
	25 psi		30 psi	
	Velocidad (C)		Velocidad (C)	
% Carbono (A)	200	250	200	250
10	10 20	3 5	5 9	-1 -3
12	11 9	2 5	5 4	-3 2
14	2 -1	4 7	-3 -2	1 3

El modelo matemático del experimento que planteamos es el siguiente:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + u_{ijkl}\ ,\ i = 1,2,3;\ \ j = 1,2;\ \ k = 1,2;\ \ l = 1,2$$

La variable respuesta y los efectos de los factores se definieron en el Supuesto práctico 10. Las restricciones para este modelo son: $\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = \sum_i (\tau\beta)_{ij} = \sum_j (\tau\beta)_{ij} =$, ..., $= \sum_k (\beta\gamma)jk = 0$,

La variable respuesta de este experimento es la Desviación que se produce de la altura objetivo en el llenado en las botellas de refresco. Los factores son: Porcentaje de Carbono que presenta tres niveles 10% 12% y 14%; Presión, con dos niveles 25 psi y 30 psi y Velocidad, con dos niveles 200 y 250. Los niveles de los factores han sido fijados por el experimentador, por lo que todos los factores son de efectos fijos. Se trata de un diseño trifactorial de efectos fijos, donde el número de tratamientos es 3×2×2 = 12 y el número de observaciones 24.

Para realizar este experimento mediante SPSS, se comienza introduciendo las variables definidas anteriormente en el Supuesto práctico 10.

Para resolver los contrastes, se selecciona, en el menú principal, Analizar/Modelo lineal general/ Univariante… En la salida correspondiente, se introduce en el campo Variable dependiente: Desviación y en el campo Factores fijos: Carbono, Presión y Velocidad. Es un modelo de tres factores donde se quiere estudiar las posibles interacciones entre los factores, por lo que se realiza el modelo completo donde aparezcan todas las interacciones. Así que no es necesario especificar nada en la opción Modelo y se pulsa directamente Aceptar

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Desviación

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	566,833[a]	11	51,530	6,649	,001
Intersección	368,167	1	368,167	47,505	,000
Carbono	88,083	2	44,042	5,683	,018
Presión	150,000	1	150,000	19,355	,001
Velocidad	80,667	1	80,667	10,409	,007
Carbono * Presión	14,250	2	7,125	,919	,425
Carbono * Velocidad	230,583	2	115,292	14,876	,001
Presión * Velocidad	1,500	1	1,500	,194	,668
Carbono * Presión * Velocidad	1,750	2	,875	,113	,894
Error	93,000	12	7,750		
Total	1028,000	24			
Total corregida	659,833	23			

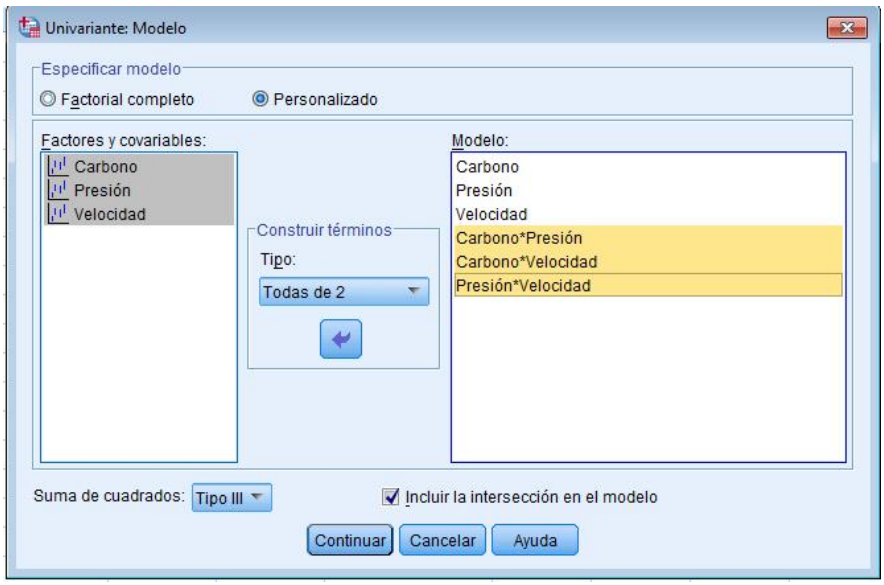
a. R cuadrado = ,859 (R cuadrado corregida = ,730)

La Tabla ANOVA muestra las filas de Carbono, Presión, Velocidad, Carbono*Presión, Carbono*Velocidad, Presión*Velocidad y Carbono*Presión*Velocidad que corresponden a la variabilidad debida a los efectos de cada uno de los factores, a las interacciones de orden dos y orden tres entre los factores. En dicha Tabla se indica que para un nivel de significación del 5% los efectos que no son significativos del modelo planteado son las interacciones entre los factores, Carbono*Presión y Presión*Velocidad y Carbono*Presión*Velocidad ya que los p-valores correspondientes a estos efectos son 0.425, 0.668 y 0.894 mayores que el nivel de significación.

Como consecuencia de este resultado, replanteamos el modelo suprimiendo en primer lugar el efecto Carbono*Presión*Velocidad, cuya significación es mayor, y resulta el siguiente modelo matemático:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + u_{ijkl}\ ,\ i = 1,2,3;\ \ j = 1,2;\ \ k = 1,2;\ \ l = 1,2$$

donde los efectos deben cumplir las condiciones expuestas anteriormente. Para resolverlo mediante SPSS, en la ventana Univariante: Modelo suprimimos la interacción Carbono*Presión*Velocidad,. Se pulsa Continuar y Aceptar. La tabla ANOVA que corresponde a este modelo es la siguiente



Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Desviación

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	565,083[a]	9	62,787	9,277	,000
Intersección	368,167	1	368,167	54,399	,000
Carbono	88,083	2	44,042	6,507	,010
Presión	150,000	1	150,000	22,164	,000
Velocidad	80,667	1	80,667	11,919	,004
Carbono * Presión	14,250	2	7,125	1,053	,375
Carbono * Velocidad	230,583	2	115,292	17,035	,000
Presión * Velocidad	1,500	1	1,500	,222	,645
Error	94,750	14	6,768		
Total	1028,000	24			
Total corregida	659,833	23			

a. R cuadrado = ,856 (R cuadrado corregida = ,764)

Los efectos Carbono*Presión y Presión*Velocidad siguen siendo no significativos. Suprimimos el efecto Presión*Velocidad que tiene una significatividad más alta y replanteamos el siguiente modelo matemático

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + u_{ijkl}\ ,\ i = 1,2,...,a\ ;\ \ j = 1,2,...,b\ ;\ \ k = 1,2,...,c\ ;\ \ l = 1,2,...,r$$

donde los efectos deben cumplir las condiciones expuestas anteriormente. Para resolverlo mediante SPSS, en la ventana Univariante: Modelo suprimimos la interacción Presión*Velocidad. Se pulsa Continuar y Aceptar. La tabla ANOVA que corresponde a este modelo es la siguiente:

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Desviación

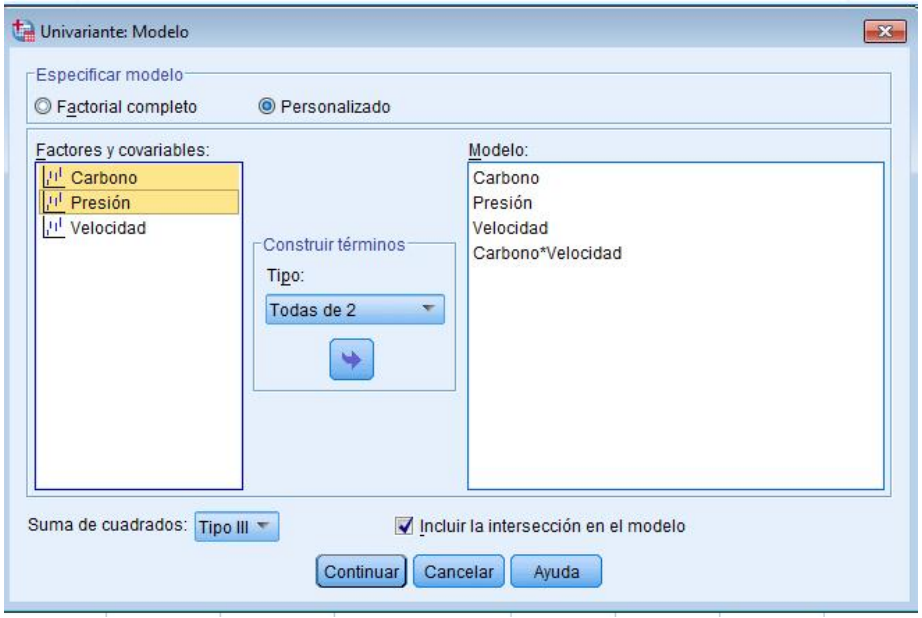
Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	563,583[a]	8	70,448	10,979	,000
Intersección	368,167	1	368,167	57,377	,000
Carbono	88,083	2	44,042	6,864	,008
Presión	150,000	1	150,000	23,377	,000
Velocidad	80,667	1	80,667	12,571	,003
Carbono * Presión	14,250	2	7,125	1,110	,355
Carbono * Velocidad	230,583	2	115,292	17,968	,000
Error	96,250	15	6,417		
Total	1028,000	24			
Total corregida	659,833	23			

a. R cuadrado = ,854 (R cuadrado corregida = ,776)

El efecto Carbono*Presión sigue siendo no significativo por lo tanto lo suprimimos y replanteamos el siguiente modelo matemático

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\gamma)_{ik} + u_{ijk}\ ,\ i = 1,2,3,4\ ;\ \ j = 1,2\ ;\ \ k = 1,2,3,4$$

donde los efectos deben cumplir las condiciones expuestas anteriormente. Para resolverlo mediante SPSS, en la ventana Univariante: Modelo suprimimos la interacción Carbono*Presión. Se pulsa Continuar y Aceptar. La tabla ANOVA que corresponde a este modelo es la siguiente:



Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente:Desviación

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	549,333[a]	6	91,556	14,085	,000
Intersección	368,167	1	368,167	56,641	,000
Carbono	88,083	2	44,042	6,776	,007
Presión	150,000	1	150,000	23,077	,000
Velocidad	80,667	1	80,667	12,410	,003
Carbono * Velocidad	230,583	2	115,292	17,737	,000
Error	110,500	17	6,500		
Total	1028,000	24			
Total corregida	659,833	23			

a. R cuadrado = ,833 (R cuadrado corregida = ,773)

Todos los efectos de este último modelo planteado son significativos y por lo tanto es en este modelo donde vamos a realizar el estudio. Existen diferencias significativas entre los distintos porcentajes del Carbono, los dos tipos de presión, las dos velocidades de llenado y la interacción entre el porcentaje de Carbono y la Velocidad de llenado.

En primer lugar estudiamos qué porcentaje de carbono son significativamente diferentes mediante el método de Duncan. Para ello en la ventana Univariante seleccionamos Post_hoc…y, se pasa la variable Carbono al campo Pruebas posthoc para: y seleccionamos la prueba de Duncan. Se pulsa Continuar y Aceptar.

Subconjuntos homogéneos

Desviación

Duncan[a,b]

Carbono	N	Subconjunto 1	Subconjunto 2
14 por ciento	8	1,38	
12 por ciento	8		4,38
10 por ciento	8		6,00
Sig.		1,000	,220

Se muestran las medias de los grupos de subconjuntos homogéneos.
Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática (Error) = 6,500.

a. Usa el tamaño muestral de la media armónica = 8,000
b. Alfa = 0,05.

Comprobamos que el porcentaje de Carbono que produce mayores desviaciones en el llenado de las botellas es el 10% y el que produce la menor desviación es el 14%. También se observa que hay dos grupos muy diferenciados, siendo el porcentaje de Carbono del 14% el que presenta diferencias significativas con los otros dos porcentajes. No habiendo diferencias significativas entre los porcentajes 12% y 10%.

Los factores Presión y Velocidad tienen cada uno dos niveles por lo tanto no se puede aplicar ningún método de comparaciones múltiples para comprobar qué tipo de Presión y qué Velocidad de llenado produce mayor/menor desviación en el llenado de las botellas. Podemos resolverlo calculando los llenados medios de cada uno de los niveles de los factores, para ello seleccionamos Analizar/Estadísticos descriptivos/Explorar... y en la ventana resultante, se introduce en el campo Lista de dependiente: Desviación, en el campo Lista de f actores: Presión y Velocidad y en Visualizar se selecciona Estadísticos. Se pulsa Aceptar y se muestran las siguientes salidas

Descriptivos

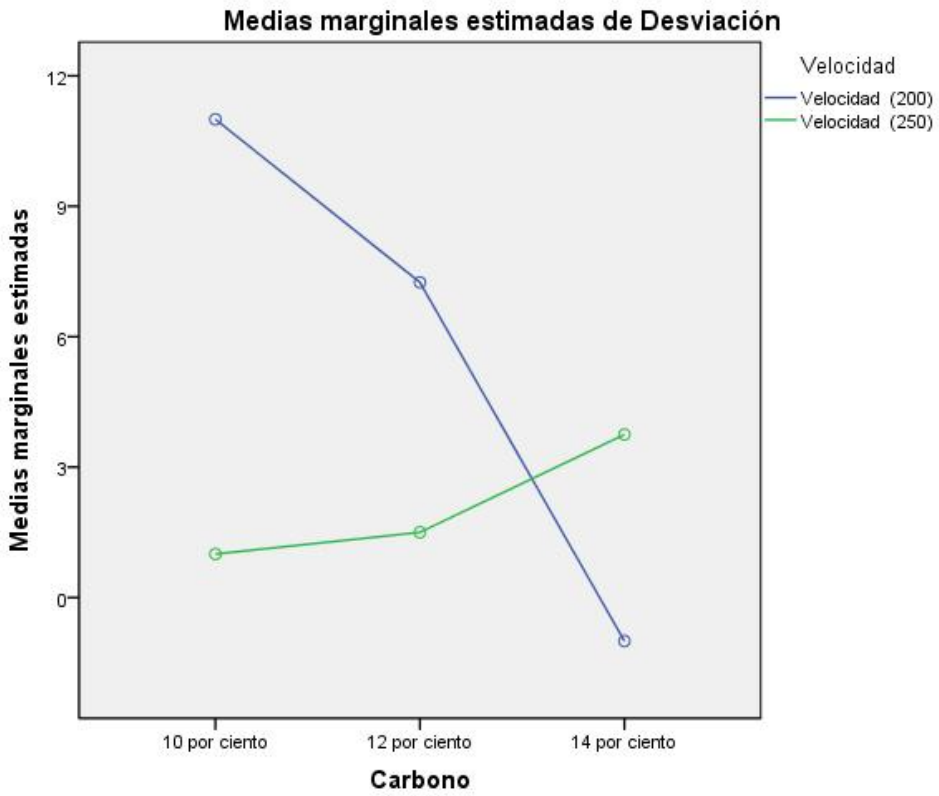
	Presión			Estadístico	Error típ.
Desviación	25 psi	Media		6,42	1,607
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	2,88	
			Límite superior	9,95	
		Media recortada al 5%		6,07	
		Mediana		5,00	
		Varianza		30,992	
		Desv. típ.		5,567	
		Mínimo		-1	
		Máximo		20	
		Rango		21	
		Amplitud intercuartil		8	
		Asimetría		1,281	,637
		Curtosis		2,309	1,232
	30 psi	Media		1,42	1,131
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	-1,07	
			Límite superior	3,91	
		Media recortada al 5%		1,24	
		Mediana		1,50	
		Varianza		15,356	
		Desv. típ.		3,919	
		Mínimo		-3	
		Máximo		9	
		Rango		12	
		Amplitud intercuartil		8	
		Asimetría		,430	,637
		Curtosis		-,692	1,232

Descriptivos

	Velocidad			Estadístico	Error típ.
Desviación	Velocidad (200)	Media		5,75	1,887
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	1,60	
			Límite superior	9,90	
		Media recortada al 5%		5,44	
		Mediana		5,00	
		Varianza		42,750	
		Desv. típ.		6,538	
		Mínimo		-3	
		Máximo		20	
		Rango		23	
		Amplitud intercuartil		10	
		Asimetría		,656	,637
		Curtosis		,648	1,232
	Velocidad (250)	Media		2,08	,908
		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	,08	
			Límite superior	4,08	
		Media recortada al 5%		2,09	
		Mediana		2,50	
		Varianza		9,902	
		Desv. típ.		3,147	
		Mínimo		-3	
		Máximo		7	
		Rango		10	
		Amplitud intercuartil		5	
		Asimetría		-,407	,637
		Curtosis		-,544	1,232

La Presión a 25 psi produce mayor desviación de llenado que a 30 psi ya que su desviación media es de 6.42 frente a 1.42 (desviación media de llenado a la presión 30 psi) y respecto a la Velocidad observamos que a una Velocidad de 200 se produce mayor desviación en el llenado de las botellas de refresco (valor medio de desviación es de 5.75 frente a un valor medio de 2.08 para la Velocidad de 250).

A continuación analizamos el efecto de la interacción de los factores Carbono*Velocidad mediante el gráfico de medias. Para ello, en la ventana Univariante se selecciona Gráficos… En la salida correspondiente se especifica cuál de los dos factores se representa en el eje de abscisas y cuál se utiliza para dibujar las rectas. Seleccionamos en el campo Eje horizontal: la variable Carbono y en Líneas separadas: la variable Velocidad. Pinchamos Añadir. De nuevo seleccionamos en el campo Eje horizontal: la variable Velocidad y en Líneas separadas: la variable Carbono. Pinchamos Añadir y pulsando Continuar y Aceptar se obtienen los siguientes gráficos de medias.



En el gráfico:

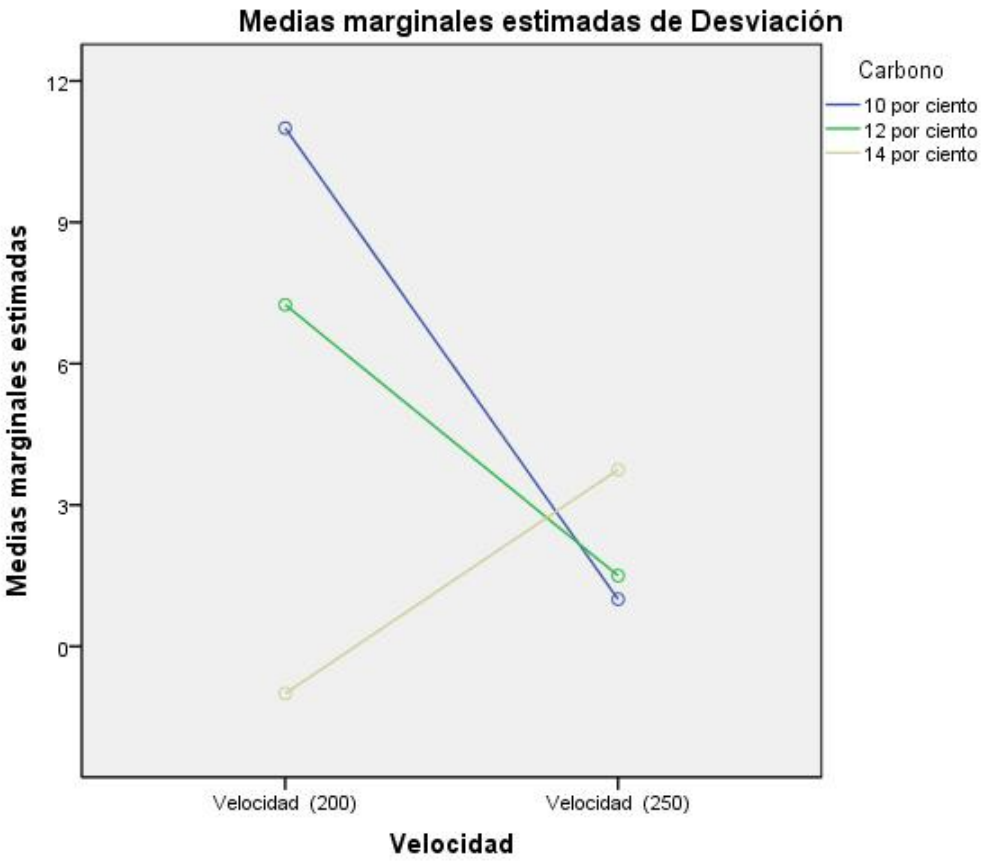
Al cruzarse las medias de las distintas velocidades se confirma la presencia de interacción entre los factores Carbono*Velocidad se observa que:

Al variar el porcentaje de Carbono de 12 % al 14% y manteniendo una Velocidad de 200, la Desviación de llenado varía dependiendo del porcentaje de Carbono, produciéndose la mayor Desviación Media de llenado al porcentaje de Carbono del 12% y la menor al 14%.

Manteniendo la Velocidad a 200, la Desviación de llenado disminuye bruscamente conforme los porcentajes aumentan.

Manteniendo la Velocidad a 250 la Desviación de llenado aumenta conforme los porcentajes aumentan.

Lo que se desea averiguar en cuando se producen las menores Desviaciones de llenado y observando la gráfica comprobamos que dichas Desviaciones se producen al 14% de Carbono y 200 de Velocidad.



En el gráfico:

Al cruzarse las medias de los distintos porcentajes se confirma la presencia de interacción entre los factores Velocidad*Carbono se observa que:

Al variar la Velocidad de 200 a 250 y manteniendo el porcentaje de Carbono al 10%, la desviación de llenado varía dependiendo de la Velocidad, produciéndose la mayor Desviación media de llenado a la Velocidad de 200 y la menor a la Velocidad de 250.

La Desviación de llenado desciende bruscamente de la Velocidad 200 a 250 tanto con el porcentaje de Carbono de 10% y de 12%. En cambio el comportamiento es diferente al 14 % de Carbono. A este último porcentaje la Desviación de llenado de las botellas es menor a una Velocidad de 200 y va aumentando a una Velocidad de 250.

Concluyendo, la menor Desviación de llenado se produce a una Velocidad de 200 y un porcentaje de Carbono del 14%.