Algebra I (Doble Grado Matemáticas-Informática)

Relación 1

Curso 2019-2020

Conjuntos y aplicaciones

Ejercicio 1. Construir todas las aplicaciones del conjunto $X = \{a, b, c\}$ en el conjunto $Y = \{1, 2\}$ y clasificarlas según sean inyectivas, sobreyectivas, biyectivas ó de ninguno de estos tipos.

Ejercicio 2. Sea $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar:

i) $f_*(f^*(B)) \subseteq B$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

ii) $A \subseteq f^*(f_*(A))$ y se da la igualdad si f es inyectiva.

Ejercicio 3. Se consideran las aplicaciones

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad \text{y} \quad X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{k} Z\ .$$

Demostrar que f y h inducen una única aplicación $f \times h : A \times X \to B \times Y$ verificando que

$$f pr_A = pr_B(f \times h) \ \text{ y } \ h pr_X = pr_Y(f \times h)$$

donde pr denota en cada caso la aplicación proyección. Demostrar que

$$(g \times k)(f \times h) = (gf) \times (kh).$$

Ejercicio 4. Sea $f : X \to Y$ una aplicación, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Demostrar

$$f_*[A \cap (f^*(B))] = (f_*(A)) \cap B$$

Ejercicio 5. Dada una aplicación $f : X \to Y$ y $A \subseteq X$, se llama saturación de A al conjunto $f^*(f_*(A))$. Se dice que A es saturado si $A = f^*(f_*(A))$.

i) Caracterizar los subconjuntos saturados de f si $X = Y = \mathbb{R}$ y f es la aplicación definida por $f(x) = x^2 + 1$.

ii) Hallar la saturación del conjunto $\{\pi\}$ si $X = Y = \mathbb{R}$ y f es la aplicación coseno.

Ejercicio 6. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f es inyectiva

ii) $\forall A, B \in P(X)$, $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$.

Ejercicio 7. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones y sea $h = gf$ la composición de dichas aplicaciones. Demostrar:

i) Si h es inyectiva entonces f es inyectiva.

ii)Si h es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

iii)Si h es inyectiva y f es sobreyectiva entonces g es inyectiva.

iv)Si h es sobreyectiva y g es inyectiva entonces f es sobreyectiva.

Ejercicio 8. Sean las aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to X$ tales que hgf es inyectiva, gfh es inyectiva y fhg es sobreyectiva. Demostrar que las aplicaciones f, g y h son biyectivas.

Ejercicio 9. Demostrar que las siguientes relaciones en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son de equivalencia y describir geométricamente las clases de equivalencia:

i) $(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

ii) $(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow ab = cd$

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x) = x^2$. Determinar R_f y el conjunto cociente de R bajo esta relación.

Ejercicio 11. Se considera la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = E(+\sqrt{x})$ donde E denota "parte entera".

i) Demostrar que la relación

$$x \sim y \Longleftrightarrow E(+\sqrt{x}) = E(+\sqrt{y})$$

es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}$.

ii) Calcular la clase de equivalencia de los elementos 1,2 y 5.

iii) Calcular la clase de equivalencia de $n \in \mathbb{N}$.

iv) Demostrar que f es sobreyectiva.

v) Hallar la descomposición canónica de f.

Ejercicio 12. Sea $X = \{0,1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$ y $f : X \to Y$ la aplicación dada por: $f(0) = c$; $f(1) = f(2) = a$; $f(3) = b$. Considerar la aplicación $f^* : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ que a cada subconjunto $B \subseteq Y$ le hace corresponder su imagen inversa por f.

i) ¿Es f^* inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?

ii) Calcular la relación $\sim_{f^*}$ en $\mathscr{P}(Y)$ asociada a f^* y el conjunto cociente $\mathscr{P}(Y)/\sim_{f^*}$.

iii) Hallar la descomposición canónica de f^*.

Ejercicio 13. Sean X e Y dos conjuntos tales que $Y \subseteq X$. En el conjunto $\mathscr{P}(X)$ se define la siguiente relación binaria:

$$A \sim B \Longleftrightarrow A \cap Y = B \cap Y$$

Demostrar que dicha relación es de equivalencia y describir el conjunto cociente.

Ejercicio 14. i) Calcular cuantas relaciones de equivalencia distintas se pueden definir en un conjunto de 3 elementos y construir todos los conjuntos cocientes.

ii) Demostrar que un conjunto de 4 elementos admite exactamente 15 conjuntos cociente.

Ejercicio 15. Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sea R una relación de equivalencia en Y. Estudiar si la siguiente relación binaria S en X

$$x_1 S x_2 \Leftrightarrow f(x_1) R f(x_2)$$

es una relación de equivalencia.

Ejercicio 16. Una relación binaria R en un conjunto X se dice que es circular si satisface la siguiente propiedad:

$$x_1 R x_2 \ \wedge \ x_2 R x_3 \ \Rightarrow \ x_3 R x_1$$

Demostrar que una relación binaria en X es de equivalencia si y solo si es reflexiva y circular.

Ejercicio 17. Sea $X = Y = \{a,b,c,d\}$ y sea $f : X \to Y$ la aplicación dada por el grafo $\{(a,a),(b,a),(c,d),(d,c)\}$. Considérense las aplicaciones inducidas $f_* : P(X) \to P(Y)$ y $f^* : P(Y) \to P(X)$ y determínense entonces los conjuntos cociente de $P(X)$ y $P(Y)$ bajo las relaciones de equivalencia inducidas por f_* y f^*.

Ejercicio 18. Sean $f: X \to Y$ y $g: X \to Z$ dos aplicaciones tales que f es sobreyectiva y $R_f \subseteq R_g$. Demostrar que existe una aplicación $h: Y \to Z$ tal que $g = hf$.

Ejercicio 19. Si X e Y son dos conjuntos y R y S son relaciones de equivalencia en X e Y respectivamente, definir en el conjunto $X \times Y$ una relación de equivalencia T tal que exista una biyección

$$(X \times Y)/T \cong (X/R) \times (Y/S)$$

Ejercicio 20. Sea X un conjunto y A un subconjunto de X. Se considera la aplicación:

$$f: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(A)$$

definida, para cada $B \in \mathscr{P}(X)$, por $f(B) = B \cap A$.

i) Estudiar si la aplicación f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

ii) En el caso particular de que $X = \{a, b, c\}$ y $A = \{b, c\}$, calcular el conjunto cociente de $\mathscr{P}(X)$ bajo la relación de equivalencia R_f definida por la aplicación f.

Ejercicio 21. Sea $X = \{1,2,3,4,5\}$ y sea $A = \{1,3\}$. En $P(X)$ se define la relación binaria

$$B \mathscr{R} C \Leftrightarrow B \cap \bar{A} = C \cap \bar{A}$$

donde $\bar{A}$ denota el complementario de A en X. Demostrar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente $P(X)/\mathscr{R}$.

Ejercicio 22. Sea $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide a } 30\}$ y sea $f: D \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ la aplicación definida, para cada $a \in D$, por $f(a)$ =número de divisores de a. Estudiar si la aplicación f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Calcular la imagen de f y la imagen inversa $f^*(\{3,4\})$. Construir el conjunto cociente D/R_f donde R_f es la relación de equivalencia inducida por f.

Ejercicio 23. Sea A y B subconjuntos de un conjunto X. Se define

$$A * B = \{x \in X \mid x \notin A \ \vee \ x \in B\}.$$

i) Demostrar que si C es otro subconjunto de X se tiene que

$$C \subseteq A * B \iff A \cap C \subseteq B.$$

ii) Sea $X = \{0, 1\}$. Consideramos el conjunto $P(X)$ de partes de X y la aplicación $f: P(X) \times P(X) \to P(X)$ definida por $f(A, B) = A * B$. Calcular $f(\{0\}, \emptyset)$. Estudiar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Calcular el conjunto cociente $P(X) \times P(X)/R_f$ donde R_f es la relación de equivalencia en $P(X) \times P(X)$ inducida por la aplicación f.

Ejercicio 24. Sea $X = \{1,2,3\}$ y $I = \{f: X \to X \mid f \text{ es inyectiva}\}$. Se considera la aplicación

$$\varphi: I \to X \times \{a, b\}$$

definida por $\varphi(f) = (f(1), b)$. Listar los elementos de I y estudiar si φ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Dar explícitamente los elementos del conjunto cociente I/R_φ (donde R_φ denota la relación de equivalencia en I inducida por φ).

Ejercicio 25. Sea $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ la aplicación definida por $f(x, y) = |xy|$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ y se considera el conjunto cociente $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{R_f}$.

1. Halla la clase del par $(p, 1)$ con p primo.
2. ¿Hay alguna clase con 4 elementos?
3. ¿Cuántas hay con infinitos elementos?
4. ¿Hay alguna clase con 12 elementos?