Algebra II

Relación 1

Curso 2019-2020

Teoría de Grafos

Ejercicio 1. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa circular. Cada persona estrecha la mano a todos los demás excepto a la persona sentada directamente enfrente de la mesa. Dibuja un grafo que modele la situación.

Ejercicio 2. Seis hermanos (Alonso, Bernardo, Carlos, Daniel, Enrique y Fernando) tiene que emparejarse para compartir habitación en el próximo curso escolar. Cada uno de ellos ha elaborado una lista con los nombres de aquellos con los que quiere emparejarse:

Lista de Alonso: Daniel.

Lista de Bernardo: Alonso, Enrique.

Lista de Carlos: Daniel, Enrique.

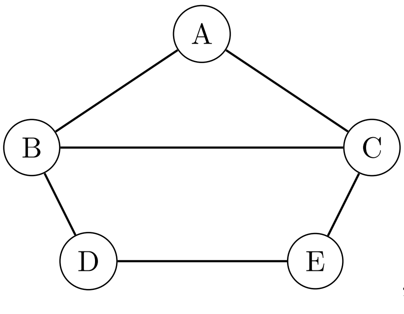
Lista de Daniel: Carlos.

Lista de Enrique: Daniel, Bernardo, Fernando.

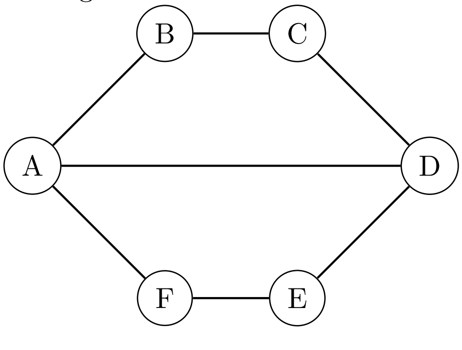
Lista de Fernando: Alonso, Bernardo.

Dibuja el grafo dirigido que modela esta situación.

Ejercicio 3. Expresa en forma matricial los grafos



,



Ejercicio 4. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismo.

Ejercicio 5. ¿Son isomorfos los grafos de la figura 1? ¿Y los de la figura 2? ¿Y los de la 3?.

Figura 1

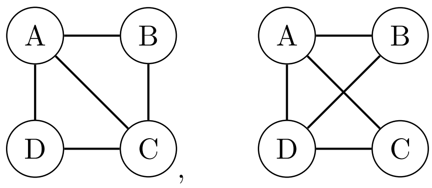


Figura 2:

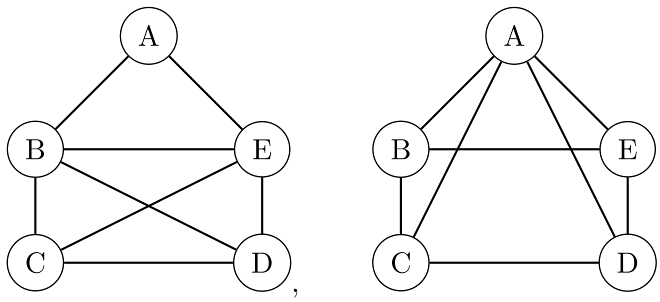
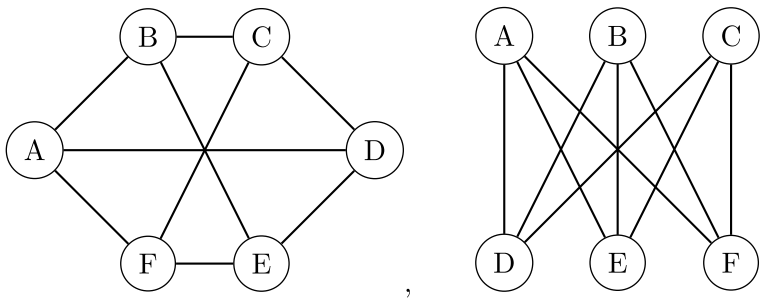


Figura 3:



Ejercicio 6. Demostrar que, en cualquier grafo, el número de vértices de grado impar es par (Así, en un grupo de personas, el número total de personas que estrechan la mano de un número impar de otras personas es siempre par)

Ejercicio 7. Demostrar que si cada vértice de un grafo G es de grado 2, cada componente conexa de G es un ciclo

Ejercicio 8. Los siguientes hechos se conocen de las personas A,B,C,D,E,F,G. A habla inglés; B habla inglés y español; C habla inglés italiano y ruso; D habla japonés y español; E habla alemán e italiano; F habla francés, japonés y ruso; G habla francés y alemán. Demostrar que cada par de personas entre estas siete puede comunicarse (con la ayuda de intérpretes, si es necesario, tomados de los cinco restantes)

Ejercicio 9. Demuestra que en todo grafo con mas de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 10. Prueba que si un grafo G contiene solo dos vértices de grado impar entonces ambos han de encontrarse en la misma componente conexa.

Ejercicio 11. ¿Existe algún grafo regular de grado 5 con 25 vértices?

Ejercicio 12. ¿Existe un grafo completo con 595 lados?

Ejercicio 13. ¿Existe un grafo con 6 vértices cuyos grados sean 1,2,2,3,4 y 4 respectivamente?

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos, dibuja un grafo de Euler que verifique las condiciones, o prueba que tal grafo no existe:

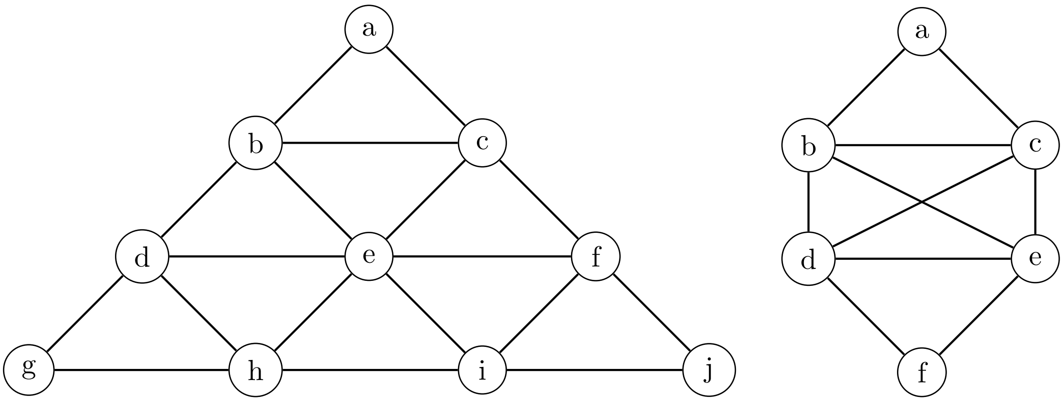
(a) Con un número par de vértices y un número par de lados.

(b) Con un número par de vértices y un número impar de lados.

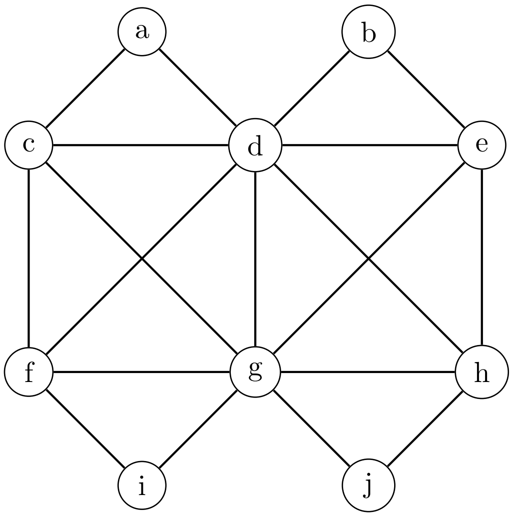
(c) Con un número impar de vértices y un número par de lados.

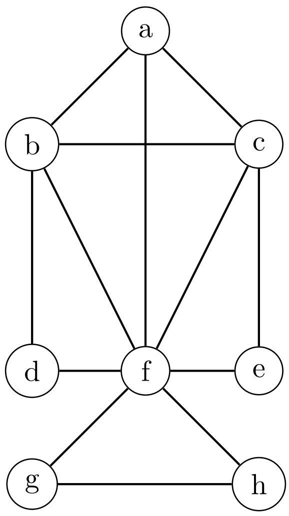
(d) Con un número impar de vértices y un número impar de lados.

Ejercicio 15. Encuentra un circuito de Euler para los grafos

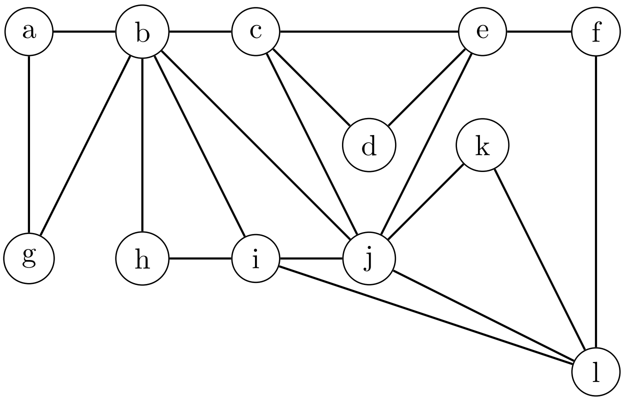


Ejercicio 16. Encuentra un camino de Euler para los grafos

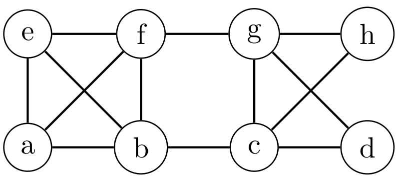




Ejercicio 17. Encontrar un circuito de Euler en el grafo



y un camino de Euler en el grafo



Ejercicio 18. ¿Para qué valores de n el grafo $\mathcal{K}_n$ es un circuito de Euler?

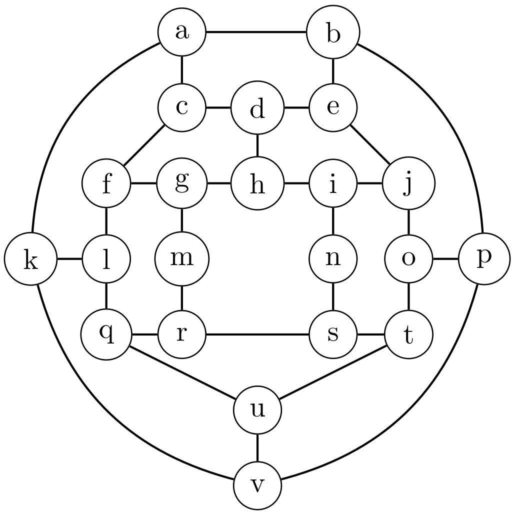
Ejercicio 19. Un viajante vive en la ciudad A y se supone que visita las ciudades B, C y D antes de volver a A. Encontrar la ruta mas corta que consuma este viaje si las distancias entre las cuatro ciudades son, en Km., 120 entre A y B, 70 entre B y C, 140 entre A y C, 180 entre A y D, 100 entre B y D y 110 entre C y D.

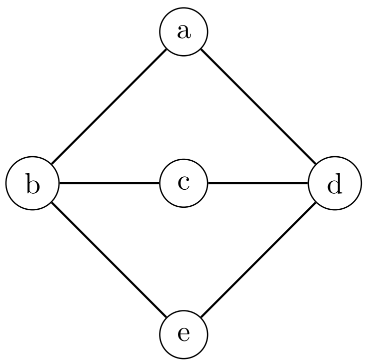
Ejercicio 20. El *grafo línea* $L(G)$ de un un grafo G se define como sigue: Los vértices de $L(G)$ son los lados de G, $V(L(G)) = E(G)$; y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si y sólamente si los lados correspondientes en G comparten un vértice. Demostrar:

(a) Si G es un grafo conexo regular de grado r, entonces $L(G)$ es un grafo de Euler.

(b) Si G es un grafo de Euler entonces $L(G)$ es Hamiltoniano.

Ejercicio 21. ¿Cuáles de los siguientes grafos contienen un circuito de Hamilton?





Ejercicio 22. (Parcial Oct 2017)

1. Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión $4 \geq 4 \geq 4 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 2 \geq 1$ es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo que la tenga a ella como sucesión de grados.

2. El grafo con matriz de adyacencia

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es de Euler o en él hay un camino de Euler entre dos vértices. Razona cual es la situación y encuentra, en su caso, el circuito o el camino de Euler que existe.

Ejercicio 23. (Final Enero 2018)

1. En el grafo G cuya matriz de adyacencia es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   determina el número de aristas y la sucesión de grados de los vértices y, caso de que G sea de Euler, describe un circuito de Euler en él usando el algoritmo apropiado.

2. Calcula el número de vértices de un grafo plano, conexo y regular de grado 5 con 20 caras.

Ejercicio 24. (Extraord Febrero 2018)

1. La siguiente matriz es la matriz de incidencia o adyacencia de un grafo. Razona que caso es y dibuja el correspondiente grafo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   ¿Es el grafo anterior de Euler o Hamilton? Razona la respuesta y da un circuito de Euler o Hamilton en caso de que los haya.

2. Aplica el algoritmo para comprobar si la siguiente sucesión

$$6 \geq 4 \geq 4 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3$$

   es, o no es, una sucesión gráfica y, en caso de serlo, también aplica el algoritmo para encontrar un grafo que la tenga como sucesión de grados.

Ejercicio 25. (Parcial Oct 2017) Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones (todos los grafos a los que se hace referencia son simples, no tienen lazos ni lados paralelos):

1. El grafo completo K_n

   a) Es siempre de Euler,

   b) Es siempre de Hamilton

   c) Dependiendo de n puede ser, o no, de Hamilton o de Euler.

2. He encontrado un grafo plano y conexo con 200 vértices y:

   a) Un número par de caras y un número impar de lados.

   b) Un número par de lados y un número impar de caras.

   c) Un número par de lados y caras.

3. Tengo un grafo con un solo vértice de grado impar v:

   a) Puedo encontrar un camino que empiece en ese vértice v, recorra todos los lados del grafo sólo una vez y vuelva a él.

   b) Si añado un lado que conecte ese vértice con otro cualquiera del grafo, pongamos w, puedo encontrar un camino que empiece en v, recorra todos los lados del grafo (incluido el que he añadido) sólo una vez y termine en w.

   c) Es imposible tener un grafo como ese.

4. En un grafo plano con cinco componentes conexas y 24 lados:

   a) El número de vértices y el número de caras son opuestos módulo 30.

   b) El número de vértices y el número de caras son congruentes módulo 30.

   c) Ninguna de las anteriores es cierta.

5. Dado un grafo regular de grado 1, entonces:

   a) El grafo no puede ser conexo.

   b) El grafo tiene tantas componentes conexas como vértices.

   c) El grafo tiene tantas componentes conexas como lados.

6. Un grafo regular conexo de grado 11 con veinte vértices:

   a) Es siempre de Euler.

   b) Es siempre de Hamilton.

   c) Ninguna de las dos respuestas anteriores es cierta.

7. *a*) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos.

b) Todos los grafos con cuatro vértices y cuatro lados son isomorfos.

c) Sólo hay tres grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos.

8. Un grafo cuya matriz de adyacencia es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Es de Euler.

b) No es de Euler pero hay un camino de Euler entre dos vértices.

c) No es de Euler pero sus componentes conexas si lo son.

9. Un grafo cuya matriz de incidencia es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Es de Hamilton.

b) No es de Hamilton pero sus componente conexas si lo son.

c) No es de Hamilton y tampoco lo son sus componentes conexas.

10. La siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Puede ser la matriz de adyacencia de un grafo pero no la de incidencia.

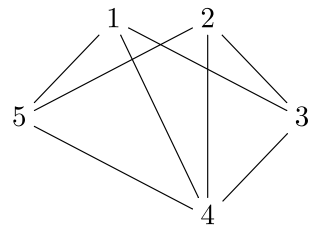
b) Puede ser la matriz de incidencia de un grafo pero no la de adyacencia.

c) No puede ser ni la matriz de incidencia de un grafo ni la de adyacencia.

Ejercicio 26. (Parcial Octubre 2018)

1. Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión $3 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2$ es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Prueba que el grafo es plano y que satisface el teorema de la característica de Euler.

2. Considera los grafos, G_1 dado por el diagrama



y G_2 con matriz de incidencia

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Estudia si son o no isomorfos, si son o no planos, si son o no de Euler o si hay un camino de Euler (en caso afirmativo aplica el algoritmo para calcular un circuito o un camino de Euler) y si son o no de Hamilton (encontrando el camino en caso afirmativo).

Ejercicio 27. (Parcial Octubre 2018) Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones (todos los grafos a los que se hace referencia son simples, no tienen lazos ni lados paralelos):

1. Si G es un grafo completo con 6 vértices entonces:

   a) G es regular de grado 5.

   b) G tiene 20 aristas.

   c) G es de Euler y de Hamilton.

2. Sea G' un subgrafo completo (pleno) de un grafo G. Entonces:

   a) Si G es de Euler también G' es de Euler.

   b) Si G es de Hamilton también G' es de Hamilton.

   c) Ninguna de las anteriores.

3. *a*) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y 5 lados no isomorfos.

b) Todos los grafos con cuatro vértices y 5 lados son isomorfos.

c) Todos los grafos con cuatro vértices y cinco lados son de Euler.

4. Sea G un grafo plano conexo regular de grado 6 con 15 caras. Entonces:

   a) G tiene 13 vértices.

   b) El número de vértices es el triple del de aristas.

   c) No existe un tal grafo.

5. Salvo isomorfismos, grafos con 50 vértices y 1225 aristas:

   a) Sólo hay 1.

   b) Hay 2.

   c) No existen grafos en esas condiciones.

Ejercicio 28. (Final Enero 2019)

1. Considera la sucesión 4,4,4,4,4.

   a) Utiliza el algoritmo dado en clase para probar que la sucesión es una sucesión gráfica y para dibujar un grafo G que la tenga como sucesión gráfica.

   b) Calcula las matrices incidencia y adyacencia del grafo G obtenido en el apartado anterior.

   c) ¿Es G de Euler o tiene un camino de Euler? En caso afirmativo, utiliza el algoritmo dado en clase para calcular el circuito o el camino de Euler.

   d) ¿Es G de Hamilton? En caso afirmativo calcula el circuito de Hamilton.

   e) ¿Es G plano? En caso afirmativo comprueba la fórmula de la característica de Euler.

2. Demuestra que si G es un grafo de Euler con n vértices que solo tiene 2 vértices de grado 2 entonces el número de aristas es $\geq 2n - 2$.

Ejercicio 29. (Extraord Febrero 2019)

1. Considera el subconjunto $X = \{(12), (13), (23)\} \subset S_3$ y el siguiente grafo G: Los vértices de G son los elementos de S_3 y hay un lado entre dos vértices x e y si $xy^{-1} \in X$.

   a) Dibuja el grafo.

   b) Calcula sus matrices de incidencia y adyacencia.

c) ¿Es de Euler o tiene un camino de Euler? En caso afirmativo aplica el algoritmo dado en clase para calcular un ciclo o un camino de Euler.

d) ¿Es de Hamilton? En caso afirmativo calcula el ciclo de Hamilton.

e) ¿Es plano? En caso afirmativo comprueba la fórmula de Euler.

2. Si G es un grafo con n vértices y m lados. Prueba que $m \leq \frac{(n(n-1))}{2}$ y que se da la igualdad si y solo si $G = K_n$ es el grafo completo.