Algebra I (Doble Grado Matemáticas-Informática)

Relación 2

Curso 2019-2020

Anillos. Subanillos. Ideales

Ejercicio 1. Demostrar que en un anillo la conmutatividad de la suma es consecuencia de los restantes axiomas.

Ejercicio 2. Sea X un conjunto no vacío y $R = P(X)$, el conjunto de partes de X. Si se consideran en R las operaciones:

$$A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$$A \times B = A \cap B,$$

demostrar que $(R, +, \times)$ es un anillo con elemento 1 igual a X.

Ejercicio 3. Sea A un grupo abeliano y consideremos el producto cartesiano $R = \mathbb{Z} \times A$. Si en R definimos las siguientes operaciones:

$$(n, a) + (m, b) = (n + m, a + b),$$

$$(n, a)(m, b) = (nm, ma + nb),$$

demostrar que $(R, +, .)$ es un anillo conmutativo con elemento 1 igual a (1,0).

Ejercicio 4. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros se definen las siguientes operaciones:

$$a \oplus b = a + b - 1 \ y \ a \otimes b = a + b - ab.$$

Demuestra que $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ es un dominio de integridad.

Ejercicio 5. En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de las parejas de enteros se definen las siguientes operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \ y \ (a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

Demuestra que $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, . \rangle$ es un anillo conmutativo. Prueba que no es dominio de integridad y calcula sus unidades y sus divisores de cero.

Ejercicio 6. En un anillo R un elemento a es idempotente si $a^2 = a$. Demuestra que en un dominio de integridad los únicos idempotentes son 0 y 1.

Ejercicio 7. Calcular los divisores de cero en el anillo $\mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 8. Demostrar que un cuerpo es un dominio de integridad.

Ejercicio 9. Estudia que tipo de anillos son $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Z}_9$. Halla sus unidades y sus divisores de cero. Si n es impar, prueba que $\bar{2} \in \mathscr{U}(\mathbb{Z}_n)$.

Ejercicio 10. Sea X el conjunto de los elementos no nulos del anillo $\mathbb{Z}_{10}$. En X se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \ R \ y \ \Leftrightarrow x \mid y \ \wedge \ y \mid x.$$

Describir el conjunto cociente X/R determinando cuantas clases de equivalencia hay y que elementos hay en cada clase.

Ejercicio 11. El conjunto $R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ es cerrado para la suma y el producto.

1. Demostrar que R es un cuerpo.
2. Demostrar que R no es un subanillo de $\mathbb{Z}_{10}$.

Ejercicio 12. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subanillos del cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales? (Siempre que aparece $\frac{n}{m}$ suponemos que $m.c.d.(n,m)=1$).

$$X_1=\left\{\frac{n}{m}\mid m \text{ es impar}\right\};\ X_2=\left\{\frac{n}{m}\mid m \text{ es par}\right\}; X_3=\left\{\frac{n}{m}\mid 4\nmid m\right\};\ X_4=\left\{\frac{n}{m}\mid m.c.d.(m,6)=1\right\}.$$

¿Es alguno de los subconjuntos anteriores un ideal de $\mathbb{Q}$?

Ejercicio 13. Sea $f: R\to R$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que $S=\{a\in R/ f(a)=a\}$ es un subanillo de R.

Ejercicio 14. Sea R un anillo y sea $a\in R$ un elemento invertible. Demostrar que la aplicación $f_a: R\to R$ dada por $f_a(x)=axa^{-1}$ es un automorfismo de R.

Ejercicio 15. Dado un anillo R, demostrar que existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en R.

Ejercicio 16. Demostrar que si R es un anillo de característica n entonces existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en R y que además este homomorfismo es inyectivo.

Ejercicio 17. Dados dos números naturales n y m, dar condiciones para que exista un homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Ejercicio 18. Determinar los ideales del anillo cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Describir el retículo de ideales de este anillo cuando $n=pq$ siendo p y q primos positivos distintos.

Ejercicio 19. Si R y S son dos anillos conmutativos demostrar que todos los ideales del anillo producto $R\times S$ son de la forma $\alpha\times\beta$ donde α es un ideal de R y β es un ideal de S.

Ejercicio 20. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) El anillo $\frac{\mathbb{Z}}{(6\mathbb{Z}+4\mathbb{Z})\cap 5\mathbb{Z}}\times\mathbb{Q}$ tiene 4 unidades e infinitos divisores de cero.

ii) Existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ que es sobreyectivo.

iii)$\mathbb{Z}_{1457}$ es un cuerpo.

iv) De $\mathbb{Z}_7$ en $\mathbb{Z}_{14}$ hay exactamente 7 homomorfismos de anillos.