# Algebra I (Doble Grado Matemáticas-Informática)

Relación 3

Curso 2018-2019

**1.** Sea $D$ un DFU y $a, b \in D$. Demostrar que si $ab \neq 0$ y $d \in D$ es un divisor de $ab$ primo relativo con $a$, entonces $d$ es un divisor de $b$.

**2.** Comprobar que los elementos $2, 3, 4+\sqrt{10}, 4-\sqrt{10}$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, pero no son primos. Deducir que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ no es un DFU, exhibiendo un elemento con dos factorizaciones distintas como producto de irreducibles.

**3.** Decidir razonadamente si existen isomorfismos de anillos

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{\langle 1+i\rangle} \cong \mathbb{Z}_2, \qquad \frac{\mathbb{Z}[i]}{\langle i\rangle} \cong \mathbb{Z}.$$

**4.** Para cada una de las siguientes parejas de enteros $(a, b)$, calcula el máximo común divisor $d = m.c.d(a, b)$ y enteros $u, v$ que satisfagan la relación de Bezout, esto es, tales que $d = ua + vb$

$$\begin{array}{ll} a = -99\,, & b = 17, \\ a = 6643\,, & b = 2873, \\ a = -7655\,, & b = 1001 \\ a = 24230\,, & b = 586. \end{array}$$

**5.** Se dispone de 4050 euros para gastar en bolígrafos de 10 euros y en plumas de 46 euros. Calcular cuantos bolígrafos y plumas se pueden comprar si se quiere el menor número posible de bolígrafos.

**6.** En $\mathbb{Z}[i]$, para cada par $(x, y)$. Factoriza $x$ e $y$ como producto de irreducibles. Calcular su máximo común divisor, los coeficientes de Bezout y su mínimo común múltiplo.

- $x = 1+3i, y = 3+4i$.
- $x = 15+42i, y = 9-2i$.

**7.** Calcular en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ el m.c.d. y el m.c.m. de los elementos 3 y $2+\sqrt{-2}$.

**8.** Da la solución general, si existe, de la ecuación diofántica en $\mathbb{Z}[i]$,

$$4x + (3+3i)y = -1+5i\ .$$

Encuentra una solución con módulo de $y$ mayor que 1234.

**9.** Calcular el resto de dividir $279^{323}$ entre 17. Análogamente, si se divide $320^{207}$ entre 13.

**10.** El valor de $x$ ha sido codificado usando RSA con las llaves públicas $n$ y $b$ y hemos obtenido el valor $y$. Calcular el valor de $x$ en cada uno de los siguientes casos (comprueba los resultados).

1. $n = 5103, b = 125, y = 3835$.
2. $n = 1568, b = 125, y = 193$.
3. $n = 18711, b = 1231, 7 = 9797$.

**11.** Resolver el siguiente sistema de congruencias, da la solución general y una que sea mayor que 12345.

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{9}, \\ x &\equiv 2 \pmod{16}, \\ 3x &\equiv 22 \pmod{95}, \end{aligned}$$

**13.** Un grupo de 12 ladrones decidieron robar un cofre lleno de monedas de oro, que según un informe fidedigno contenía entre 2000 y 3000 monedas. El día del robo, uno de ellos resultó apresado, los 11 restantes decidieron repartir las monedas a partes iguales. Al hacer el reparto resultó que sobraron 8 monedas que decidieron daríán a María, la mujer del ladrón apresado. María, no contenta con el reparto, delató a los dos ladrones que lo habían propuesto, después de lo cual quedaron 9 ladrones en libertad que volvieron a repartirse el botín. En este caso solo sobraron 2 monedas, que en su momento darían a Maria. Indignada María con el comportamiento de los compinches de su marido, decidió acabar con todos ellos y quedarse con todo el botín. Para ello, colocó una bomba en el lugar de reunión de la banda, desafortunadamente para María, la bomba hizo explosión cuando solo se encontraban 4 ladrones en el local. Los que quedaron, volvieron a decidir repartir el botín a partes iguales y dar a María la única moneda que sobraba del reparto. Esto indignó aún más a María, que mediante intrigas consiguió que disputaran los ladrones entre ellos, muriendo 3 en la disputa. Los dos que quedaron con vida repartieron el botín a partes iguales y no sobró moneda alguna. ¿Que cantidad de monedas tenía el cofre?

**14.** Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$:

$$\begin{aligned} x &\equiv i \pmod{3}, \\ x &\equiv 2 \pmod{(2+i)}, \\ x &\equiv 1+i \pmod{(3+2i)}, \\ x &\equiv 3+2i \pmod{(4+i)}. \end{aligned}$$

**13.** En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv 1+2\sqrt{-2} \pmod{2-3\sqrt{-2}}, \\ x &\equiv 3 \pmod{1+\sqrt{-2}}. \end{aligned}$$