Algebra II

Relación de ejercicios de Teoría de Grupos
(propuestos en exámenes del curso 2017-18 y 2018-19)

Curso 2019-2020

Ejercicio 1. (Parcial Octubre 2017)

1. Demostrar que en un grupo de orden par el número de elementos de orden 2 es impar.
2. Describe dos grupos de orden 6 que sean isomorfos y otros dos que no lo sean. Razona la respuesta.

Ejercicio 2. (Parcial Octubre 2017)
Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Dados grupos G y H:
   a) Si tienen el mismo orden son isomorfos.
   b) Si son isomorfos tienen el mismo orden.
   c) Si se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.
2. *a*) En D_4 todos los elementos tienen orden par.
   b) D_4 y S_4 son grupos isomorfos.
   c) Salvo isomorfismo, D_4 es el único grupo no abeliano de orden 8.
3. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, y $o(-)$ denota el orden de un elemento de un grupo, entonces:
   a) $o(x)$ divide a $o(f(x))$ $\forall x \in G$.
   b) $o(f(x))$ divide a $o(x)$ $\forall x \in G$.
   c) $o(x) = o(f(x))$ $\forall x \in G$.

4. Dadas las permutaciones $\sigma = (2\,3\,6)(6\,5\,7\,1\,3\,4), \tau = (2\,4\,7\,3) \in S_{10}$ se tiene que $\tau\sigma\tau^{-1}$:

   a) Es par.

   b) Su orden es 12.

   c) Es un ciclo de longitud 7.

5. Si μ_6 denota el grupo de las raíces sextas de la unidad, entonces:

   a) $\mu_6 \cong C_6$.

   b) $\mu_6 \cong S_3$.

   c) $\mu_6 \cong D_6$.

6. En S_4 se tiene que:

   a) $\{(1\,2), (3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.

   b) $\{(1\,2\,3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.

   c) $\{(1\,2), (2\,3), (3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.

7. Sea G un grupo y $f : G \to G$ la aplicación dada por $f(x) = x^{-1}$. Entonces:

   a) f es un homomorfismo de grupos.

   b) f es un automorfismo.

   c) Si f es un homomorfismo entonces G es abeliano.

8. Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $sign(\sigma)$ denota su signo o paridad, se tiene:

   a) $sign(\sigma) = sign(\sigma^{-1})$.

   b) $sign(\sigma) = -sign(\sigma^{-1})$.

   c) Ninguna de las anteriores.

9. Cualquier permutación $\sigma \in S_n$:

   a) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones.

   b) Es producto de trasposiciones.

   c) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones disjuntas.

10. El grupo $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}_2$:

    a) Es un grupo no abeliano de orden 8.

    b) Es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

c) Es un grupo isomorfo a S_3.

Ejercicio 3. (Final Enero 2018) Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $\sigma = (1\,2\,4\,3)(5\,2) \in S_5$ entonces $\sigma^{106} = \sigma$.

2. Usando las presentaciones usuales de D_{14} y D_7 se puede definir un homomorfismo sobreyectivo de D_{14} en D_7.

3. Los grupos $D_3 \times D_4$ y D_{24} son isomorfos.

4. En $D_6 =< r, s \,|\, r^6 = 1 = s^2, sr = r^{-1}s >$ se tiene que el subgrupo $H =< r^3 >$ es normal y el cociente D_6/H tiene un único subgrupo de orden 2 y otro de orden 3.

5. Si $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ y $\tau = (2\,7)(3\,6)(4\,5)$ son dos permutaciones de S_7, se tiene que $G =< \sigma, \tau >\cong D_7$.

Ejercicio 4. (Final Enero 2018)

1. Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t \,|\, \begin{array}{c} 12y + 24z = 0 \\ 4x + 10y + 12z + 6t = 0 \\ 4x + 8y + 4t = 0 \end{array} >$$

   Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A.

2. Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos de orden 504.

3. Razona que no hay grupos simples de orden 992.

Ejercicio 5. (Final Enero 2018)
Considera el grupo de orden 24

$$Q_6 =< x, y \,|\, x^{12} = 1, x^6 = y^2, yx = x^{-1}y >,$$

cuyos elementos son todos de la forma $x^j y^k$ con $j = 0, \ldots, 11$ y $k = 0, 1$ y sus subgrupos $P =< x^3, y >$ y $H =< x^4 >$.

1. Demuestra que $P \cong Q_2$ y que $H \cong C_3$.

2. ¿Son P y H subgrupos normales de Q_6?

3. Calcula el número de p-subgrupos de Sylow para cada primo que divide al orden de Q_6. ¿Es Q_6 el producto directo de sus subgrupos de Sylow?

Ejercicio 6. (Extra Febrero 2018)

Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Podemos definir un homomorfismo de grupos $f : D_4 \to S_3$ que lleve los generadores r y s de D_4 en $f(r) = (1\,2)$ y $f(s) = (2\,3)$.

2. Si H es un subgrupo normal de un grupo G entonces todo subgrupo K de H es también normal en G.

3. Si X es un conjunto con 11 elementos sobre el que actúa el grupo de Klein, entonces en X hay un elemento fijo bajo dicha acción.

4. D_4 no es producto directo interno de dos subgrupos propios suyos.

Ejercicio 7. (Extra Febrero 2018)

1. Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t \,|\, \begin{array}{c} 14x + 4y + 4z + 14t = 0 \\ -6x + 4y + 4z + 10t = 0 \\ -16x - 4y - 4z - 20t = 0 \end{array} >$$

   Calcula el rango (de la parte libre) y todos los grupos abelianos no isomorfos de orden igual al de la torsión de A. ¿Tiene A algún elemento de orden ∞? ¿Y de orden 12?

2. Ordena de mayor a menor los enteros positivos n_1, n_2, n_3, n_4 donde n_1 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 252, n_2 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 585, n_3 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 1683 y n_4 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 440. Describe a continuación las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de los grupos abelianos no isomorfos de orden el mayor de los n_i, $i = 1, 2, 3, 4$. ¿Hay algún n_i de los anteriores de forma que no existen grupos simples de ese orden?

Ejercicio 8. (Extra Febrero 2018)

Sean, p un número primo, G un grupo finito, H un subgrupo normal de G y P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuéstrese que:

1. $H \cap P$ es p-subgrupo de Sylow de H.

2. HP/H es un p-subgrupo de Sylow de G/H.

Ejercicio 9. (Parcial Octubre 2018)

Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Sean C_8 y C_{12} los grupos cíclicos de órdenes 8 y 12 respectivamente. El número de homomorfismos de grupos de C_8 en C_{12} es:

   a) Dos.
   b) Tres.
   c) Cuatro.

2. Si $\sigma = (2\,5\,8\,4\,1\,3)(4\,6\,7\,8\,5)(8\,10\,11) \in S_{11}$, entonces la permutación σ^{1000}:

   a) Es impar.
   b) Tiene orden 3.
   c) Es un 6-ciclo.

3. La ecuación $x(1\,2\,3)x^{-1} = (1\,3)(5\,7\,8)$ en S_8:

   a) No tiene solución.
   b) Tiene una única solución.
   c) Tiene solución pero no es única.

4. La ecuación $x(1\,2)(3\,4)x^{-1} = (5\,6)(1\,3)$ en S_6:

   a) No tiene solución.
   b) Tiene una única solución.
   c) Tiene solución pero no es única.

5. Si $G \neq 1$ es un grupo cíclico que tiene un solo generador entonces:

   a) G es infinito.
   b) No existe G en esas condiciones.
   c) G tiene como mucho 2 elementos.

6. Sea $G \neq 1$ un grupo. Entonces:

   a) G puede tener un subgrupo propio isomorfo a G.
   b) Si todos los subgrupos propios de G son abelianos entonces G es abeliano.
   c) Si todos los subgrupos propios de G son cíclicos entonces G es cíclico.

7. El grupo simétrico S_4:

   a) Es cíclico.
   b) No es cíclico pero se puede generar por dos elementos.

c) No tiene subgrupos de orden 6.

8. Si se consideran los grupos aditivos $\mathbb{Z}$ de los enteros, $\mathbb{Q}$ de los racionales y $\mathbb{Z}_n$ de los enteros módulo n=2,5,10, se tiene que:

   a) Los grupos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}$ son isomorfos.

   b) Los grupos $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_{10}$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_5$ son isomorfos.

   c) Los grupos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_2$ son isomorfos.

9. El subgrupo $SL_3(\mathbb{Z}_2) < GL_3(\mathbb{Z}_2)$ de las matrices invertibles 3×3 con entradas en $\mathbb{Z}_2$ y de determinante 1:

   a) Es un subgrupo impropio.

   b) Es un grupo abeliano de orden 168.

   c) Es un grupo no abeliano de orden 84.

10. a) El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ es cíclico.

    b) El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ tiene todos sus elementos de orden infinito.

    c) El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ es finitamente generado.

11. Sea $C_{120} =< x \,|\, x^{120} = 1 >$ y se consideran sus subgrupos $H =< x^{42} >$ y $K =< x^{36} >$. Entonces se tiene que:

    a) $K < H$.

    b) $H < K$.

    c) $H = K$.

12. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces:

    a) Si f es inyectivo y G es abeliano entonces H es abeliano.

    b) Si f es inyectivo y H es abeliano entonces G es abeliano.

    c) Ninguno de los enunciados anteriores es cierto.

13. Dados los grupos $C_8 =< a \,|\, a^8 = 1 >$ y $D_4 =< x, y \,|\, x^4 = 1, y^2 = 1, yx = x^{-1}y >$, se tiene que la asignación $x \mapsto a^2, y \mapsto a^4$:

    a) Determina un homomorfismo de grupos sobreyectivo.

    b) Determina un homomorfismo de grupos pero no es sobreyectivo.

    c) No determina un homomorfismo de grupos.

14. Se considera el subgrupo de S_5, $H =< (123), (4, 5) >$. Entonces:

    a) H es un grupo abeliano pero no es cíclico.

    b) H es un grupo cíclico.

   c) S_5 es un grupo no abeliano y por tanto H tampoco es abeliano.

15. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces:

   a) Si f es sobreyectivo y G es abeliano entonces H es abeliano.

   b) Si f es sobreyectivo y H es abeliano entonces G es abeliano.

   c) Ninguno de los enunciados anteriores es cierto.

Ejercicio 10. (Parcial Octubre 2018)

1. Sea $f : S_4 \to S_6$ la aplicación dada por $f(\sigma) = \overline{\sigma}$ donde $\overline{\sigma}$ actúa igual que σ sobre los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ y los elementos $\{5, 6\}$ los fija si σ es par o bien los intercambia si σ es impar. Demuestra que f es un homomorfismo inyectivo de grupos y que su imagen está contenida en A_6.

2. Considera los grupos $Q_2 =< x, y \,|\, x^4 = 1, y^2 = x^2, yx = x^{-1}y >$ y S_4. Demuestra que la asignación

$$x \mapsto (12)(34) \quad , \quad y \mapsto (34)$$

determina un homomorfismo de grupos. Calcula su imagen y su núcleo, dando todos sus elementos.

Ejercicio 11. (Final Enero 2019)

1. Si $\sigma = (1\,2\,3)(1\,3\,4\,5)(4\,5\,6)(1\,6) \in S_6$ ¿Es verdad que σ^{16} es una permutación par de orden 3?

2. Razona, utilizando el teorema de Dyck, que S_5 tiene un subgrupo isomorfo a D_5.

Ejercicio 12. (Final Enero 2019)
Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t, w \,|\, \begin{array}{c} 13x + 14z + 7t = 0 \\ 9x + 3y + 12z = 0 \\ 12x + 12z + 6t = 0 \\ 9x + 3y - 18z = 0 \end{array} >$$

1. Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. ¿Tiene A elementos de orden 5? ¿Y de orden ∞?.

2. Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos del mismo orden que $T(A)$, la torsión de A.

Ejercicio 13. (Final Enero 2019)

1. Clasifica todos los grupos (abelianos o no) de orden 6175. Da una serie de composición para cada uno de ellos.

2. Sea G un grupo de orden 1690.

   a) Demuestra que G contiene un subgrupo normal N de orden 169 que es abeliano.

   b) Demuestra que G contiene un subgrupo normal M que contiene a N con $|M| = 845$.

   c) Si G tiene un único 2-subgrupo de Sylow, demuestra que G contiene un subgrupo normal H de orden 338.

Ejercicio 14. (Extraord Febrero 2019)
Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si G es un grupo tal que $[G : Z(G)] = 15$ entonces G es abeliano.

2. Un grupo simple de orden 60 tiene 30 elementos de orden 5.

3. Si G es un grupo finito y N un subgrupo normal suyo entonces, $\forall x \in G$ se tiene que el orden del elemento xN en el cociente G/N divide al orden de x en G.

4. No hay grupos simples de orden 429 y todo grupo de este orden es resoluble.

5. Si X es un conjunto con 23 elementos sobre el que actúa el grupo diédrico D_4 entonces en X hay un punto fijo.

6. Si H y K son subgrupos normales de un grupo G tales que $H \cap K = 1$ entonces $hk = kh$ $\forall h \in H$ y $\forall k \in K$.

Ejercicio 15. (Extraord Febrero 2019)

1. Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t \mid \begin{array}{r} 35x + 12y + 12z = 0 \\ 12x - 4y - 6z - 18t = 0 \\ 18x + 6y + 6z = 0 \\ 17x + 6y + 6z - 18t = 0 \end{array} >$$

   Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. ¿Tiene A elementos de orden 6? ¿Y de orden 12? ¿Y de orden ∞? En caso afirmativo encontrar uno.

2. Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos de orden 144.

3. Si G es un grupo simple de orden 168, calcula el número de 7-subgrupos de Sylow de G. Si P es un 7-subgrupo de Sylow de G, calcula el orden del normalizador $N_G(P)$ y razona entonces que G no tiene subgrupos de orden 14.