Algebra I (Doble Grado Matemáticas-Informática)

Relación 4. Anillos de polinomios.

Curso 2019-2020

Ejercicio 1 *Encontrar un polinomio* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *de grado 3 tal que:*
$f(0) = 6,\ f(1) = 12$ *y* $f(x) \equiv (3x+3)\ mod\,(x^2+x+1)$.

Ejercicio 2 *Encontrar los polinomios irreducibles de grados 2 y 3 en* $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ *y* $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 3 *Estudiar si los siguientes polinomios son reducibles ó irreducibles en* $\mathbb{Z}[x]$ *y en* $\mathbb{Q}[x]$*:*

a) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$

b) $x^4 + 15x^3 + 7$

c) $x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$

ch) $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

d) $x^4 - 22x^2 + 1$

e) $x^3 + 17x + 36$

f) $x^5 - x^2 + 1$

g) $x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 2x - 3$

h) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

i) $x^4 - x^2 - 2x - 1$

j) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 11$

k) $x^5 - 10x^4 + 36x^3 - 53x^2 + 26x + 1$

l) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

ll) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 1$

m) $x^6 + 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

n) $x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x + 1$

ñ) $x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 2x - 1$

o) $2x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4$

p) $3x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

q) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 4x - 1$

r) $x^7 + 5x^6 + x^2 + 6x + 5$

s) $3x^5 + 42x^3 - 147x^2 + 21$

t) $x^5 + 3x^4 + 10x^2 - 2$

u) $x^4 + 3x^2 - 2x + 5$

v) $3x^6 + x^5 + 3x^2 + 4x + 1$

w) $2x^4 + x^3 + 5x + 3$

x) $2x^5 - 2x^2 - 4x - 2$

y) $3x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 6$

z) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

α) $6x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 1$

β) $2x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 2$

γ) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$

δ) $x^6 - x^5 + 3x^4 + x + 2$ *sabiendo que reducido módulo 7, es producto de un polinomio de grado 1 por un irreducible de grado 5.*

Ejercicio 4 *Dado un anillo conmutativo y un elemento $a \in R$ demuestra que la aplicación $\Phi : R[x] \to R[x]$ dada por $\Phi(f(x)) = f(x+a)$ es un isomorfismo de anillos. Aplica este resultado y el criterio de Eisenstein para ver que el polinomio $f(x) = x^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ estudiando el polinomio $f(x+1)$.*

Ejercicio 5 *Sea I el ideal de $\mathbb{Z}_3[x]$ generado por $x^2 + 2x + 2$. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/I$ es un cuerpo y hallar el inverso de $(ax+b) + I$.*

Ejercicio 6 *Hallar el m.c.d. y el m.c.m. en $\mathbb{Z}_5[x]$ de los polinomios $x^7+2x^6+3x^5+3x^4+3x^3+3x^2+2x+1$ y $3x^6 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.*

Ejercicio 7 *Calcular, si es posible, el inverso de la clase de x en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + x + 1)$.*

Ejercicio 8 *Demostrar que $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4+x+1)}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x^2 + 1$.*

Ejercicio 9 *Considerar el polinomio $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$:*

- *Probar que $f(x)$ es irreducible.*
- *Calcular el inverso de la clase $[x^2 + x + 2]$ en el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/f(x)\mathbb{Z}_3[x]$.*
- *¿Es el polinomio $x^3 + 9x^2 - x + 244$ irreducible sobre $\mathbb{Z}[x]$?.*

Ejercicio 10 *Probar que el anillo cociente* $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3-2x-3)}$ *es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de* $x+1$.

Ejercicio 11 *Calcular las unidades de los anillos cociente* $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$, $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1)$ *y* $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+2)$.

Ejercicio 12 *Hallar la intersección, la suma y el producto de los ideales de* $\mathbb{Q}[x]$ *generados por los polinomios* x^2+x-2 *y* x^2-1.

Ejercicio 13 *Factoriza los siguientes polinomios como producto de irreducibles en* $\mathbb{Z}[x]$.

1. $x^6-x^5-10x^2+15x-5$.
2. $3x^4-5x^3-101$.
3. $2x^4+4x-1$.

Ejercicio 14 *Factoriza en irreducibles de* $\mathbb{Q}[x]$ *los siguientes polinomios.*

1. $2x^4+3x^3+3x^2+3x+1$.
2. $x^4+3x^3+5x^2+1$.
3. x^5-4x+1.