Ejercicios de Análisis Matemático II
Relación 2: Cálculo diferencial en varias variables (I)

1. Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, $n > 1$, que sea continua en un punto pero que no sea diferenciable en él.

2. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + \cos(xy),\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

   b) $f(x,y,z) = x^{y+z},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ y,z \in \mathbb{R}$.

   c) $f(x,y,z) = (x+y)^z,\ \forall x,y \in \mathbb{R}^+,\ z \in \mathbb{R}$.

   d) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y),\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

3. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y) = e^{x+y},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

   d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

   e) $f(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

   f) $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

   g) $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

   h) $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

4. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(e^{x+y}, \operatorname{sen}(x-y), x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ (e^y, \operatorname{sen}(-y), 0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

b) $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(x,y,z)=\begin{cases} \left(\cos(yz), xyz, \dfrac{1}{z}\right) & \text{si} \quad z\neq 0 \\ (1,0,0) & \text{si} \quad z=0 \end{cases}$$

5. Encontrar la derivada direccional de f en a según la dirección v en los siguientes casos:

   a) $f(x,y)=xy^2,\ a=(2,1),\ v=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

   b) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3,\ a=(1,1,0),\ v=(0,0,1)$.

6. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con derivadas direccionales en $(0,0)$ en las direcciones $v_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y $v_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ que valen 1 y -1, respectivamente. Calcular $\nabla f(0,0)$.

7. Calcular el plano tangente a las siguientes superficies en el punto que se indica:

   a) $z=x^2y-xy^2+y^5-3$ en $(-1,1,0)$.

   b) $z=x^2+3xy+y^2$ en $(0,1,1)$.

   c) $z=\ln(1+x^2+y^2)$ en $(0,0,0)$.

   d) $z^2+3x-x^2-y^2=2$ en $(1,1,1)$.

   e) $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ en $(1,2,-1)$.

   f) $z(xy-1)-(x+y)=0$ en $(1,2,3)$.

8. Calcular la dirección perpendicular al plano tangente a la superficie de ecuación $x^2+y^2z-xz^2=1$ en el punto $(0,-1,1)$.

9. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=(3x-2y+z, x+3y-2z)$. Probar que f es diferenciable en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ y obtener $Df(1,1,1)$.

10. Sean $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y)=(x^2,y^2,x-y)$$

$$g(u,v,w)=u^2+2v-w$$

Definimos $h=g\circ f$. Calcular $Dh(1,-1)$.

11. Sean $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por
$$f(x,y,z) = (\operatorname{sen}(xy+z), (1+x^2)^{yz})$$
$$g(u,v) = (u+e^v, v+e^u).$$
   a) Demostrar que f es diferenciable en $(1,-1,1)$ y calcular $Df(1,-1,1)$.
   b) Demostrar que g es diferenciable en $(0,\frac{1}{2})$ y calcular $Dg(0,\frac{1}{2})$.
   c) Calcular $D(g\circ f)(1,-1,1)$.

12. Sea $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Sea $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = f(x^2y)$. Probar que
$$x\,\frac{\partial g}{\partial x} = 2y\,\frac{\partial g}{\partial y}.$$

13. Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea $h:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x,y,z) = f(x^2+2yz, y^2+2xz)$. Probar que
$$(y^2-xz)\frac{\partial h}{\partial x} + (x^2-yz)\frac{\partial h}{\partial y} + (z^2-xy)\frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

14. Calcular $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ de la función $F(u,v) = u^2+3uv+4v^2$, siendo $u = 2-2xy^2$, $v = 1+x$:
   a) Mediante la regla de la cadena.
   b) Sustituyendo u y v por sus valores.

15. Sean $f,g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables. Se define $z(x,y) = x^2yf(u)+xy^2g(v)$, con $u = \dfrac{x}{y}$, $v = \dfrac{y}{x}$. Calcular $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

16. Calcular $F'(x)$ siendo $F(u,v) = u^m v^n$ con $u = \cos(ax)$ y $v = \operatorname{sen}(ax)$.

17. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:
   a) $f(x,y,z) = x^{y+z}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $y,z \in \mathbb{R}$.
   b) $g(x,y,z) = (x+y)^z$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$.
   c) $h(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

18. Una función f se dice que es **armónica** en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$
en todo punto $(x,y) \in \Omega$. ¿Son armónicas las siguientes funciones?

a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

b) $g(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

c) $h(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

19. Sea $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(0,0) = 0$. Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. ¿Es f de clase C^2?