Ejercicios de Análisis Matemático II
Relación 3: Cálculo diferencial en varias variables (II)

1. Probar que las siguientes ecuaciones definen a y como función implícita de x en un abierto que contiene al punto indicado y calcular $y'(x)$.

   a) $x^y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0,\ (1,1)$.

   b) $\operatorname{sen} x + \cos y + 2y - \pi = 0,\ (0, \pi/2)$.

   c) $y \ln(x^2 + y^2) - 2xy = 0,\ (0,1)$.

   d) $xe^x + ye^y - 2x - 2y = 0,\ (0,0)$.

   e) $x^y + y^x - 2xy = 0,\ (2,2)$.

2. Probar que las siguientes ecuaciones definen a z como función implícita de x e y en un abierto que contiene al punto indicado y calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

   a) $x \ln(1+y) + z\, e^{4z} = 0,\ (0,0,0)$.

   b) $z \operatorname{arc\,tg}(1 - z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0,\ (1,1,1)$.

   c) $xyz\, e^z \ln z - 3x + 3y = 0,\ (1,1,1)$.

   d) $x \operatorname{tg} y - z\, e^z = 0,\ (0, \pi/4, 0)$.

3. Probar que el sistema de ecuaciones:

$$uv - 3x + 2y = 0$$

$$u^4 - v^4 = x^2 - y^2$$

   define implícitamente a u y v como funciones de x e y en el punto $(1,1,1,1)$. Determinar las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ en el punto $(1,1)$.

4. Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones. Estudiar si son absolutos o no cuando sea posible.

   a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

   b) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

   c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y),\ 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi$.

   d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

e) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.

f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy \quad (a > 0)$.

g) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$.

h) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

i) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.

j) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.

k) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$.

l) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$.

5. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estudiar la existencia de extremos relativos de f en función de los parámetros a y b.

6. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{ax+y^2} + b\operatorname{sen}(x^2+y^2)$. Discutir los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en $(0,0)$.

7. Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la placa triangular cerrada acotada por las rectas $x = 0,\ y = 4,\ y = x$.

8. Una placa circular plana tiene la forma del disco $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluyendo el borde, se calienta de manera que la temperatura en un punto (x,y) es

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Determinar los puntos con mayor y menor temperatura de la placa, así como la temperatura en cada uno de ellos.

9. Determinar el punto $P(x,y,z)$ en el plano $2x + y - z = 5$ que está más cerca del origen.

10. Calcular la distancia mínima del origen a la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 - z^2 - 1 = 0$.

11. Hallar dos números reales positivos cuya suma de cuadrados sea 18 y la suma de sus cubos sea máxima. Hacer lo mismo con tres números reales positivos con suma de cuadrados 12.

12. Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del

planeta sea más débil (aunque por supuesto, en la superficie). El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades; la fuerza del campo magnético viene dada por

$$M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$$

basado en un sistema coordenado cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá de ser ubicado el radiotelescopio?.

13. Determinar el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde a,b son reales positivos.

14. Sean $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x,y \geq 0, \ x+y \leq 3\}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y, \ \forall (x,y) \in A.$$

Encontrar los puntos donde la función f alcanza sus extremos absolutos.

15. Encontrar los puntos del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2x, \ y \geq 0\}$ donde la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

16. Estudiar los extremos de la función $f : (\mathbb{R}^+)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \ln x + \ln y + \ln z$$

en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5\pi$.

17. Hallar la mínima distancia entre la recta $x + y = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

18. Calcular la distancia mínima entre la recta $x - y = 2$ y la parábola $y = x^2$.

19. Calcular el mínimo relativo de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionado a que

$$2x + y + z = 2 \ , \quad x - y - 3z = 4.$$

Dar una interpretación geométrica del resultado.

20. Hallar los extremos condicionados de la función $f(x,y) = x^3 + xy^2$, donde $xy - a^2 = 0 \quad (a \neq 0)$.

21. El área de una caja rectangular sin tapa es de $108u^2$. Hallar qué dimensiones debe tener para conseguir el máximo volumen.

22. Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z) = xyz$ cuando el punto (x,y,z) pertenece a la curva definida por la intersección del plano $x+y+z=0$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-1=0$.

23. El plano $x+y+z=24$ corta al paraboloide $z=x^2+y^2$ en una elipse. Calcular los puntos más altos y más bajos de dicha elipse.

24. Estudiar los extremos relativos de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y,z) = x^2+2y^2+6z^2-4xy-12z$$
condicionados a que
$$x-y=0\ , \quad x-z+3=0.$$

25. Hallar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,u,v) = x^2+y^2$ con las condiciones
$$x^2+u^2+v^2-4=0\ , \quad y^2+2u^2+3v^2-9=0.$$