Ejercicios de Análisis Matemático II
Relación 4: Cálculo integral en varias variables

1. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\, d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   b) $\displaystyle\int_I y\ \ln x\, d(x,y),\ I=[1,e]\times[1,e].$

   c) $\displaystyle\int_I x^3\, y^3\, d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   d) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2}\, d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

   e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, d(x,y,z),\ I=[0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

   f) $\displaystyle\int_I x\ \ln(xy)\, d(x,y),\ I=[2,3]\times[1,2].$

   g) $\displaystyle\int_I y\ \cos(xy)\, d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,\pi].$

2. Calcular $\displaystyle\int_A f$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x,y)=1-x-y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]:\ x+y\leq 1\}$

   b) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, siendo A la región limitada por $y=\frac{x^2}{2},\ y=x.$

   c) $f(x,y)=xy^2$, siendo A la región limitada por $y^2=2x,\ x=1.$

   d) $f(x,y)=x+y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]:\ x^2\leq y\leq 2x^2\}$

   e) $f(x,y)=x^2\, y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$

   f) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$

   g) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 2,\ x^2\leq y\}$

3. Calcular $\displaystyle\int_A f$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\},\ a,b>0$

   b) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2\leq 2x\}$

   c) $f(x,y)=y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq r^2\},\ r>0$

   d) $f(x,y)=\cos(x^2+y^2),\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq \pi/2\}$

   e) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2),\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq r^2,\ x\geq 0\},\ r>0$

f) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$

g) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1\}$

h) $f(x,y) = x\,y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

i) $f(x,y) = x^2\,y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$

j) $f(x,y) = x$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2-2x \geq 0\}$

k) $f(x,y) = x^2+y^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq 2y\}$

l) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y,\ x+y \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

n) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$

4. Calcular el volumen de la región A en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ \ x^2+y^2-ry \leq 0\},\ r > 0.$

   b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ z(x^2+y^2) \leq 1,\ z \geq 0\}.$

   c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z^2 \leq x^2+y^2 \leq z\}.$

   d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}.$

   e) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2rz\},\ r > 0.$

   f) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq x^2+y^2,\ x+y \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0\}.$

5. Calcular $\displaystyle\int_A f$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x,y,z) = z\,e^{-(x^2+y^2)}$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2(x^2+y^2) \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}.$

   b) $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$

   c) $f(x,y,z) = x^2$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\ 3(x^2+y^2) \leq 4z^2,$ $x \geq 0\}$

   d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4\}.$

   e) $f(x,y,z) = x+y-2z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3\}.$

   f) $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \leq z\}.$

   g) $f(x,y,z) = z$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9} \leq 1,\ z \geq 0\right\}.$

   h) $f(x,y,z) = yz\sqrt{x^2+y^2}$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2+y^2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}.$