Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

Aportaciones al estudio de la Propiedad del Punto de Continuidad en espacios de Banach.

Por

Ginés López Pérez.

Granada, 1.996

Tesis doctoral dirigida por el Doctor D. Juan Francisco Mena Jurado, Profesor del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. Ginés López Pérez el día 23 de Enero de 1.996, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Fernando Bombal Gordon (Presidente), D. Gilles Godefroy, D. Angel Rodríguez Palacios, D. Juan Carlos Navarro Pascual (Vocales) y D. Rafael Payá Albert (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto *"cum laude"* por unanimidad.

A Salomé: por estar a mi lado en los momentos difíciles.

A mis padres: lo poco o mucho que pueda llegar a ser se lo debo a ellos.

A mi hermana: por su constante ánimo.

CONTENIDO.

Notación.

$\emptyset$ – conjunto vacío.

$\mathbb{N}$ – conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$ – conjunto de los números reales.

$\mathbb{K}$ – denotará indistintamente el cuerpo de los números reales o complejos.

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ – bola abierta de centro x_0 y radio r, en el espacio métrico (X, d).

$\|x\|_X$ – norma de x, como elemento del espacio normado X. Cuando no haya lugar a confusión no se hará referencia al espacio X.

$L_p(\mu)$ – espacios de Lebesgue usuales $(1 \leq p \leq \infty)$, dotados de su norma natural, siendo μ una medida sobre algún espacio medible (Ω, Σ).

c_0 – espacio de las sucesiones de escalares con límite cero, dotado de norma del máximo.

$co(A)$ – envolvente convexa de A, siendo A un subconjunto de algún espacio vectorial X.

$s - co(A)$ – conjunto formado por todas las series convexas convergentes de elementos de A, siendo A un subconjunto de algún espacio normado X.

$\overline{co}(A)$ – envolvente convexa y cerrada de A, siendo A un subconjunto de algún espacio normado X.

$lin(A)$ – subespacio vectorial generado por A.

$\overline{lin}(A)$ – subespacio vectorial cerrado generado por A.

X^* – dual topológico del espacio normado X.

B_X – bola unidad cerrada del espacio normado X.

S_X – esfera unidad del espacio normado X.

$Ext(A)$ – conjunto de puntos extremos de A, siendo A un subconjunto de algún espacio vectorial X.

Introducción.

El contenido de esta memoria se enmarca dentro de la teoría de los espacios de Banach. Más concretamente, en un área que ha sido objeto de un intensivo estudio en los últimos años, como es la propiedad de Radon-Nikodym en espacios de Banach. En relación con esta propiedad juega un papel fundamental, como se pondrá de manifiesto más adelante, la propiedad del punto de continuidad en un espacio de Banach, que da título a esta tesis por ser el objeto principal de estudio en ella.

El ya clásico teorema de Radon-Nikodym puede encontrarse en cualquier texto de Teoría de la Medida. Entre muchas de las importantes aplicaciones que se le atribuyen destacan la identificación de los duales de los espacios $L_p(\mu)$, la descomposición polar de una medida compleja y el no menos relevante teorema fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue, esto es, el hecho de que toda función absolutamente continua sea derivable casi por doquier y se exprese como la integral de su derivada. Con el desarrollo de la integral de Bochner, se dispone formalmente de las herramientas precisas para tener al menos el enunciado del teorema de Radon-Nikodym en el ambiente de los espacios de Banach infinito-dimensionales.

J. A. Clarkson demuestra en [12] que todo espacio de Banach uniformemente convexo verifica el teorema de Radon-Nikodym, resultado que es considerado como el primer teorema de Radon-Nikodym para espacios de Banach de dimensión infinita.

Posteriormente, como puede verse en [9, *Exam.* 2.1.2], aparece el primer ejemplo de espacio de Banach de dimensión infinita que no verifica el teorema de Radon-Nikodym, el espacio c_0 de las sucesiones de escalares con límite cero. De esta forma nace la propiedad de Radon-Nikodym para un espacio de Banach.

Tras el incesante trabajo desarrollado por numerosos investigadores, ([6], [9], [13], [14], [15], [29], [41], [46]), la propiedad de Radon-Nikodym se puede formular hoy en día en términos de dentabilidad, sin hacer mención para nada a los términos medida e integral.

Se dice que un subconjunto acotado C de un espacio de Banach X es dentable si para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse un punto $x_\varepsilon \in C$ de forma que

$$x_\varepsilon \notin \overline{co}(C \setminus B(x_\varepsilon, \varepsilon)).$$

Se dice que C tiene la propiedad de Radon-Nikodym (RNP) si cada subconjunto no vacío, cerrado y convexo de C es dentable.

Por último, se dice que X tiene la RNP si su bola unidad cerrada B_X verifica dicha propiedad.

La importancia de la RNP se pone de manifiesto en la obtención de los teoremas ya mencionados en el caso finito-dimensional, es decir, la representación del dual del espacio $L_p(\mu, X)$ y el teorema fundamental del Cálculo para la integral de Bochner.

Pasamos ya a describir el contenido de cada uno de los capítulos que constituyen esta memoria.

En el capítulo I, se parte del teorema de Radon-Nikodym, como enunciado formalmente equivalente a la identificación de los duales de los espacios $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$, para pasar después a presentar las definiciones y resultados más relevantes en este tema que nos serán de utilidad en el posterior desarrollo de esta memoria. Especial mención ha de hacerse a uno de los problemas más importantes que permanecen abiertos en la teoría de los espacios de Banach, el de la equivalencia entre las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman. Desde que J. Lindenstrauss demostró en [43] que la RNP implica la propiedad de Krein-Milman (KMP) se han dedicado grandes esfuerzos por parte de diversos autores a intentar demostrar la veracidad de la implicación recíproca. En esta línea, cabe destacar un resultado debido a W. Schachermayer [50] para cuya presentación se requiere el siguiente concepto.

Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de X. Se dice que C tiene la propiedad del punto de continuidad (PCP) si para cada subconjunto A no vacío y cerrado de C existe $x \in A$ tal que la aplicación identidad

$$I_A : (A, w) \to (A, \| \ \|)$$

es continua en x.

Pues bien, el resultado de Schachermayer asegura que, en presencia de la PCP, las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman son equivalentes.

Naturalmente este resultado justifica nuestro comentario anterior sobre la importancia de la PCP.

En este primer capítulo, de carácter introductorio, aparecen dos aportaciones puramente anecdóticas, que no se encuentran en la literatura. Una de ellas es otra demostración del teorema de Radon-Nikodym a partir de la identificación de los duales de los espacios $L_p(\mu)$ y la segunda muestra que no existe ninguna relación entre las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman, en espacios no completos.

El capítulo II es el más importante de esta memoria. El objetivo principal es hacer un estudio pormenorizado de la PCP en espacios de Banach con una base. Con este propósito se comienza recopilando los conceptos y resultados sobre bases en un espacio de Banach que nos serán de utilidad.

Nuestro punto de partida, y de inspiración, es un trabajo de Argyros, Odell y Rosenthal [1] en el que se caracterizan los subconjuntos cerrados, acotados y convexos de c_0 que no tienen la PCP. Dicha caracterización involucra la construcción de un conjunto que, en cierto sentido, es universal para la clase de los subconjuntos de c_0 sin la PCP. Concretamente ellos demuestran que un conjunto de dicha clase siempre "*contiene*" al conjunto universal.

Pretendemos generalizar el resultado antes mencionado de Argyros, Odell y Rosenthal en el ambiente de los espacios de Banach con base.

Para ello empezamos construyendo una familia de subconjuntos en cada espacio de Banach con base que, como después se verá, es universal en algún sentido.

Denotamos por Γ el conjunto de todas las sucesiones finitas de enteros positivos, e incluimos también en Γ la sucesión vacía, que denotaremos por 0. Se define un orden parcial en Γ mediante: $\alpha \leq \beta$ si $|\alpha| \leq |\beta|$ y $\alpha_i = \beta_i$ para $1 \leq i \leq |\alpha|$, para cualesquiera α, $\beta \in \Gamma$, donde para cada elemento $\alpha \in \Gamma$, $|\alpha|$ denota la longitud de la sucesión finita de enteros α. Por supuesto, convenimos que $|0| = 0$ y que $0 \leq \alpha \ \forall \alpha \in \Gamma$.

Se puede definir una aplicación biyectiva $\phi : \Gamma \to \mathbb{N}$ que conserva el orden recién definido en Γ. Para construir dicha aplicación, denotemos por $\{p_n\}$ la numeración estrictamente creciente de los enteros primos positivos y definamos $\phi_1 : \Gamma \to \mathbb{N}$ mediante

$$\phi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} \ \forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma, \ \phi_1(0) = 1.$$

Así ϕ_1 es una aplicación creciente e inyectiva y, como $\phi_1(\Gamma)$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, existe una biyección creciente $\phi_2 : \phi_1(\Gamma) \to \mathbb{N}$.

Basta ahora definir $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$.

Sea X un espacio de Banach con base $\{e_n\}$ y funcionales asociados $\{f_n\}$.

Para cada $\alpha \in \Gamma$ denotamos por x_α el elemento de X dado por: $f_\gamma(x_\alpha) = 1$ si $\gamma \leq \alpha$ y $f_\gamma(x_\alpha) = 0$ en otro caso, donde $f_\alpha = f_{\phi(\alpha)} \ \forall \alpha \in \Gamma$.

Ahora definimos $A = \overline{co}\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$.

Es claro que A es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X.

La definición de A depende de la base que se tenga en el espacio.

Aún más, si $\{v_n\}$ es un bloque básico de X, tenemos un nuevo espacio de Banach con base que es un subespacio de X, e igualmente se puede repetir la construcción, para obtener un nuevo conjunto como el anterior.

De esta forma para cada bloque básico de X, $\{v_n\}$, tenemos, mediante la anterior construcción, un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X, que denotaremos $A_{\{v_n\}}$, para hacer referencia al bloque básico con el que se hace la construcción, y evitar confusiones.

Una vez presentada la construcción de los conjuntos $A_{\{v_n\}}$ obtenemos el siguiente resultado fundamental de este capítulo.

Sea X un espacio de Banach con base y K un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X sin la PCP. Entonces, existen $\{v_n\}$, bloque básico de la base de X, Y subespacio cerrado de X, F subconjunto de K con $F \subset Y$ y $T : Y \to X$ un isomorfismo sobre su imagen, tales que $T(F) = A_{\{v_n\}}$.

El teorema anterior nos dice, informalmente hablando, que cualquier subconjunto cerrado, acotado, convexo y sin la PCP de un espacio de Banach con base contiene a algún $A_{\{v_n\}}$.

Este resultado generaliza al obtenido por Argyros, Odell y Rosenthal en c_0. Sin embargo, en los espacios de Banach con base sin la PCP, no podemos asegurar que los conjuntos $A_{\{v_n\}}$ carecen de la PCP, cosa que sí ocurre en c_0.

Si exigimos a la base del espacio que sea *"shrinking"*, podemos obtener el siguiente resultado, que caracteriza la PCP para espacios de Banach con base *"shrinking"*, en términos de la propia base.

Sea X un espacio de Banach con base "shrinking". Entonces son equivalentes:

(i) X tiene la propiedad del punto de continuidad.

(ii) $\{\sum_{\gamma\leq\alpha} v_\gamma : \alpha \in \Gamma\}$ no está acotado para cada bloque básico $\{v_n\}$ de la base de X, con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, donde $v_\gamma = v_{s(\gamma)}\ \forall\gamma \in \Gamma$.

J. Bourgain plantea en [6] la necesidad de disponer, en el ambiente de los espacios de Banach con base, de una condición necesaria y suficiente para la PCP, en términos de la propia base. Desde este punto de vista, el resultado anterior caracteriza la PCP, en el sentido propuesto por J. Bourgain, al menos en el ambiente de los espacios con base *"shrinking"*.

El estudio realizado de la PCP en espacios de Banach con base *"shrinking"* lo utilizamos para conseguir uno de los resultados más llamativos, y a nuestro juicio más importantes, de esta memoria, por cuanto supone una nueva aportación al problema de la equivalencia entre las propiedades de Krein-Milman y Radon-Nikodym.

Sea X un espacio de Banach con base "shrinking" *y normalizada $\{e_n\}$ verificando que para cada sucesión de escalares $\{c_j\}$ tales que*

$$\sup_n \|\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\| < +\infty \text{ y } \lim_j c_j = 0,$$

se tiene que $\sum_j c_j e_j$ converge en la topología de la norma en X. Entonces las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman son equivalentes, para cada subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X.

Se finaliza este capítulo ilustrando con dos ejemplos que el resultado anterior es independiente de dos resultados previamente obtenidos por R. C. James [30] y W. Schachermayer [50] en los que se concluye la equivalencia entre la RNP y la KMP suponiendo algún tipo de incondicionalidad en la descomposición del espacio.

En el capítulo III se plantea, como primer objetivo, generalizar los resultados obtenidos en el capítulo anterior para espacios de Banach con una descomposición finito-dimensional (FDD). Para conseguir este objetivo, el concepto de FDD se pone en equivalencia con el de base con paréntesis, concepto, éste último, prácticamente desconocido, pero que nos será de gran utilidad para adaptar algunas de las demostraciones del capítulo II a nuestro nuevo ambiente. En concreto obtenemos los dos siguientes resultados:

Sea X un espacio de Banach con una FDD y sea K un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X sin la PCP. Entonces existen $\{v_n\}$ sucesión básica de X, Y subespacio cerrado con base de X, F subconjunto de K, con $F \subset Y$ y un isomorfismo sobre su imagen $T : Y \to X$, tales que

$$T(F) = \Lambda_{\{v_n\}}.$$

Sea X un espacio de Banach con una FDD $\{G_n\}$, y supongamos que ésta es "shrinking". Entonces son equivalentes:

(i) X tiene la PCP.

(ii) El conjunto $\{\sum_{\gamma\leq\alpha} v_\gamma : \alpha \in \Gamma\}$ *es no acotado, para cada sucesión básica de* X, $\{v_n\}$, $v_n \in G_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *con* $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, *donde* $v_\alpha = v_{\phi(\alpha)}$ $\forall \alpha \in \Gamma$.

Nótese que el resultado anterior es una caracterización de la PCP en función de las propiedades de los subespacios con base. De hecho es un problema abierto si la PCP (resp. la RNP) está determinada por los subespacios con base. En esta línea Ghoussoub y Maurey prueban en [23] que la PCP está determinada por los subespacios con base en los espacios de Banach que no contienen a l_1. Cabe señalar que la PCP y la RNP están determinadas por los subespacios con una FDD, como puede verse en [5]. Aprovechando este último hecho y nuestra caracterización de la PCP, en espacios con FDD, conseguimos una condición suficiente para la PCP, en un espacio de Banach, a través del hecho de que los subespacios con base verifiquen una versión más restrictiva de la PCP, la PCP respecto de la topología débil de la base, topología que pasamos a definir:

Sea X *un espacio de Banach con base* $\{e_n\}$ *y funcionales asociados* $\{f_n\}$. *Llamaremos topología débil de la base en* X *a la topología débil en* X *definida por* $\sigma(X, \overline{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Para finalizar esta introducción, y como consecuencia de lo hecho hasta ahora, presentamos la siguiente caracterización en el ambiente de los espacios de Asplund.

Sea X *un espacio de Asplund. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) Cada subespacio con base de X tiene la PCP.

(iii) Cada subespacio con base "shrinking" *de X tiene la PCP.*

Es claro que si X es un espacio de Asplund no puede contener a l_1, con lo que la equivalencia de i) y ii) es un caso particular del trabajo de Ghoussoub y Maurey, ya comentado anteriormente. Sin embargo, la equivalencia entre i) y iii) es nueva y, a nuestro juicio, de interés.

Parte del contenido de esta memoria se encuentra recogida en las referencias [36], [37], [38] y [39].

Agradecimientos.

Antes de finalizar esta introducción quisiera expresar mi más profundo agradecimiento al director de esta tesis, D. Juan Francisco Mena Jurado, por su labor y paciencia y por haberme iniciado en el campo de la investigación hasta llevarme al momento en que esta tesis vio la luz.

Agradezco también al profesor D. Rafael Payá Albert su disponibilidad y atención en los momentos en los que necesité de su sabiduría y buen hacer.

Quiero igualmente mostrar mi sincera gratitud al profesor Gilles Godefroy, de la Universidad Pierre et Marie Curie, París VI, por el interés mostrado en mis investigaciones y sus valiosas indicaciones.

Por último quiero dar las gracias, por haber leído buena parte de esta memoria, indicando oportunas sugerencias, a la profesora Dª. María Acosta Vigil, por la ayuda en la preparación informática a los profesores D. Jerónimo Alaminos Prats y D. José Luis Gámez Ruiz y por el importante apoyo prestado a mis compañeros de despacho, los profesores D. J. Aurelio Montero y D. Eduardo Nieto, y a todos los compañeros del departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada por su interés mostrado.

Ginés López Pérez.

Capítulo I

DEL TEOREMA A LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM.

Este capítulo es una introducción a los temas que nos van a ocupar en esta memoria y la mayoría de los resultados que en él se presentan son, como las referencias oportunas indican, conocidos. Partiendo del teorema de Radon-Nikodym como herramienta indispensable para la identificación de $L_p(\mu)^*$, $1 \leq p < +\infty$, *se pasa después a definir la propiedad de Radon-Nikodym de forma natural. A partir de aquí se mostrarán los resultados más importantes e ilustradores del interés del tema que nos ocupa y que serán claves para el desarrollo y la comprensión de los siguientes capítulos. Para finalizar, recopilaremos lo conocido hasta el momento sobre el famoso problema de la equivalencia entre las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman, mostrando que dicho problema no tiene interés en ambiente no completo y desembocando en la propiedad del punto de continuidad, propiedad que da título a esta tesis.*

Tradicionalmente, el ya clásico teorema de Radon-Nikodym se suele presentar para poder identificar, después, el dual del espacio de Banach $L_p(\mu)$, donde $1 \leq p < +\infty$ y μ es una medida sobre algún espacio medible (Ω, Σ), con algunas restricciones sobre la medida que especificaremos más tarde. Por ejemplo, esta estrategia se puede ver en [3], [4] y [28].

Sin embargo, es posible también deducir el teorema de Radon-Nikodym de la identificación de los duales de $L_p(\mu)$, donde $1 \leq p < +\infty$ quedando así los dos resultados formalmente equivalentes. Esta misma estrategia fue seguida por Von Neumann, ver [48, *Th.* 6.9], quien obtiene, con una demostración diferente a la que nosotros daremos en el teorema I.1.2, el teorema de Radon-Nikodym a partir del hecho de que el espacio de Hilbert $L_2(\mu)$ es autodual, lo que se conoce con el nombre de teorema de Riesz-Fréchet. De hecho, basta hacer ligeras modificaciones en la demostración de Von Neumann, para obtener el teorema de Radon-Nikodym a partir de la identificación de $L_p(\mu)^*$ para cualquier $1 \leq p < +\infty$.

Se hagan las cosas como se quieran, es preciso decir que el dual de $L_p(\mu)$ se puede identificar siempre con $L_q(\mu)$ sin ninguna hipótesis sobre la medida, cuando $1 < p < +\infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, como puede verse en [56, *Tema* 36].

I.1 El teorema de Radon-Nikodym

Si se quiere introducir una gama de espacios de Banach amplia, que cubra lo que imprecisamente se conoce como espacios de Banach clásicos, una forma cómoda de hacerlo es considerar los espacios $L_p(\mu)$, donde $1 \leq p < +\infty$ y μ es una medida sobre algún espacio medible (Ω, Σ), además, claro está, de los espacios $L_\infty(\mu)$ y $C(K)$.

Precisamente, una familia de espacios que se obtienen de esta forma son los espacios de sucesiones ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$, tomando $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ la medida que cuenta el número de elementos para conjuntos finitos y toma el valor $+\infty$ en otro caso. Esta familia de espacios de Banach además de contener al *"único"* espacio de Hilbert separable, contiene también los ejemplos más sencillos de espacios reflexivos de dimensión infinita. De hecho, el dual de un espacio del tipo ℓ_p con $1 < p < +\infty$ sigue siendo del mismo tipo.

En efecto, es bien conocido que si $1 \leq p < +\infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entendiendo que si $p = 1$, entonces $q = +\infty$, se tiene que ℓ_p^* y ℓ_q pueden ser perfectamente identificados. Si se intenta hacer algo similar en general, es decir, identificar $L_p(\mu)^*$ con $L_q(\mu)$, en el mismo sentido y de forma análoga a como se hace con ℓ_p^* y ℓ_q, es fácil obtener una aplicación lineal y continua, que es isométrica si $p > 1$, dada por

$$\Psi_p : L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$$

$$\Psi_p([f])([g]) = \int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu(\omega) \ \forall [g] \in L_p(\mu), \ [f] \in L_q(\mu).$$

Sin embargo, la sobreyectividad de Ψ_p no es nada clara. De hecho, no siempre se puede esperar tener perfectamente identificados los espacios $L_p(\mu)^*$ y $L_q(\mu)$, como muestra el siguiente ejemplo.

Consideremos $\Omega = \{a, b\}$ un conjunto formado por dos elementos distintos y Σ la $\sigma-$álgebra de todos los subconjuntos de Ω. Definamos

$$\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\mu(\{a\}) = 1,\ \mu(\{b\}) = +\infty,\ \mu(\Omega) = +\infty,\ \mu(\emptyset) = 0.$$

Así, (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida en el que

$$L_1(\mu) = (\mathbb{R}, |\ |),\ L_\infty(\mu) = (\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty).$$

Este ejemplo tan inocente hace ver que no siempre se puede esperar la identificación deseada.

Lo que no tiene el espacio de medida del ejemplo anterior que sí tienen los espacios de medida finita y el espacio de medida que se consideró para obtener los espacios de sucesiones ℓ_p, es una propiedad que pasamos a definir.

Definición I.1.1 . *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que la medida μ es $\sigma-$finita, en el espacio medible (Ω, Σ), si existe $\{A_n\}$, familia numerable de conjuntos de medida finita en Σ tales que $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$.*

Si nos concentramos, por el momento en el caso $p = 1$ y μ finita, se puede comprobar que Ψ_p es isométrica y decir que la aplicación Ψ_p es sobreyectiva es decir que:

$$\forall \phi \in L_1(\mu)^* \ \exists [f] \in L_\infty(\mu) : \ \phi([g]) = \int_\Omega f(\omega) g(\omega) d\mu(\omega) \ \forall [g] \in L_1(\mu).$$

Si ahora definimos

$$\rho(E) = \int_E f(\omega) d\mu(\omega) \ \forall E \in \Sigma,$$

tendremos una nueva medida ρ sobre (Ω, Σ).

Nuestro problema, entonces, es que dada ρ, medida sobre (Ω, Σ), queremos encontrar $[f] \in L_\infty(\mu)$, de forma que se verifique

$$\rho(E) = \int_E f(\omega) d\mu(\omega) \ \forall E \in \Sigma.$$

Una condición trivialmente necesaria para que esto sea posible es que si $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0$, entonces $\rho(E) = 0$, lo que se suele expresar diciendo que ρ es absolutamente continua respecto de μ.

Antes de observar otra condición necesaria para la sobreyectividad de Ψ_p recordamos que la variación de una medida μ, denotada por $|\mu|$, es la medida definida por

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{B \in \Pi} |\mu(B)| : \Pi \in \mathcal{P_F}(A)\} \ \forall A,$$

donde $\mathcal{P_F}(A)$ denota el conjunto de particiones finitas de A por conjuntos medibles.

La variación de una medida juega, de alguna manera, el papel del módulo de la medida de partida que, en general, no es una medida.

No es difícil comprobar que otra condición necesaria para la sobreyectividad de Ψ_p es que la variación de ρ sea finita, puesto que si $\rho(E) = \int_E f(\omega) d\mu(\omega) \ \forall E \in \Sigma$, entonces se tiene que

$$|\rho|(E) = \int_E |f(\omega)| d\mu(\omega) \ \forall E \in \Sigma.$$

Después de esta pequeña motivación damos una caracterización de la sobreyectividad de Ψ_p, al menos para el caso en que μ es finita.

Teorema I.1.2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Para cada $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entendiendo que si $p = 1$ entonces $q = \infty$, consideremos la aplicación lineal e isométrica dada por*

$$\Psi_p : L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$$

$$\Psi_p([f])([g]) = \int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu(\omega) \ \forall [g] \in L_p(\mu), \ [f] \in L_q(\mu).$$

Entonces son equivalentes:

(i) Ψ_p es sobreyectiva para cualquier $p \geq 1$.

(ii) Existe algún $p \geq 1$ tal que Ψ_p es sobreyectiva.

(iii) Para cada λ medida sobre (Ω, Σ) absolutamente continua respecto de μ y de variación acotada, existe $[f] \in L_1(\mu)$ tal que

$$\lambda(A) = \int_A f(\omega)d\mu(\omega) \ \forall A \in \Sigma.$$

Demostración. La implicación i) $\Rightarrow$ *ii*) es clara.

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Sea λ una medida sobre (Ω, Σ) absolutamente continua respecto de μ y de variación acotada. Es claro que nos podemos restringir al caso en que λ es real.

En un primer paso vamos a demostrar que para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, existe $B \in \Sigma$ con $B \subset A$, $\mu(B) > 0$ y existe un natural n tales que

$$|\lambda|(E) \leq n\mu(E) \ \forall E \in \Sigma, E \subset B. \tag{1.1}$$

Para esto, sea $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y definamos

$$\Sigma' = \{A \cap C : C \in \Sigma\}.$$

Ahora, (A, Σ') es un espacio medible y, en este primer paso de la demostración, será nuestro espacio ambiente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $A = A_n^+ \cup A_n^-$ una descomposición de Hahn de la medida signada $\mu - n^{-1}|\lambda|$ sobre (A, Σ'), ver [56, *T.* 1.2.29]. Hacemos ahora $K = \cup_n A_n^+$ y, por tanto, $K^c = \cap_n A_n^-$.

Como $K^c \subset A_n^-$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu(K^c) \leq n^{-1}|\lambda|(K^c)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así $\mu(K^c) = 0$ y, por la continuidad absoluta de λ respecto de μ, obtenemos que $|\lambda|(K^c) = 0$.

Si fuese $|\lambda|(K) = 0$ se tendría que $|\lambda|(A) = 0$ y, entonces 1.1 es trivial, pues basta tomar $B = A$.

En otro caso, $|\lambda|(K) > 0$ y, otra vez la continuidad absoluta de λ respecto de μ, nos dice que $\mu(K) > 0$. En consecuencia, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\mu(A_n^+) > 0$, lo que demuestra 1.1, haciendo $B = A_n^+$.

Consideremos ahora

$$\Delta = \{A \in \Sigma : \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } |\lambda|(E) \leq n\mu(E)\ \forall E \in \Sigma, E \subset A\}.$$

Por 1.1, sabemos que cada elemento de Σ con medida μ positiva contiene un elemento de Δ con medida μ positiva. Además es fácil comprobar que Δ es estable por uniones finitas y contiene los elementos de Σ con medida μ cero.

Hagamos $\alpha = \sup\{\mu(A) : A \in \Delta\}$. Entonces existe $\{B_n\}$, sucesión de elementos de Δ con $\lim_n \mu(B_n) = \alpha$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $H_m = \cup_{k=1}^m B_k$. Entonces $\{H_m\}$ es una sucesión creciente de elementos de Δ con $\lim_m \mu(H_m) = \alpha$.

Si fuese $\mu(\Omega \setminus \cup_{k=1}^{+\infty} H_k) > 0$, por 1.1, existiría $K \in \Delta, \mu(K) > 0$ con $K \subset \Omega \setminus \cup_{k=1}^{+\infty} H_k$ y, por tanto, $\lim_m \mu(H_m \cup K) > \alpha$, lo que contradice la elección de α.

En consecuencia, $\mu(\Omega \setminus \cup_{k=1}^{+\infty} H_k) = 0$, y de esta forma se obtiene que $\Omega = \cup_{k=1}^{+\infty} H_k \cup F$, donde $H_k \in \Delta\ \forall k \in \mathbb{N}$ y $F \in \Sigma, \mu(F) = 0$. Por último, es fácil obtener una descomposición de la forma $\Omega = \cup_{k=1}^{+\infty} E_k$, donde $\{E_k\}$ es una familia de elementos disjuntos dos a dos de Δ.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea ϕ_n el único elemento de $L_p(\mu)^*$ verificando que

$$\phi_n([\mathcal{X}_A]) = \lambda(A \cap E_n)\ \forall A \in \Sigma,$$

siendo $\mathcal{X}_A$ la función característica de A.

La existencia de ϕ_n se debe al siguiente hecho: si $A \in \Sigma$ y $A_1, \ldots, A_k$ son elementos disjuntos de Σ, entonces para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ se tiene

$$|\phi_n([\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{X}_{A_j}])| = |\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda(A_j \cap E_n)| \leq$$

$$\leq K_n \|[\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{X}_{A_j}]\|_1 \leq K_n \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \|[\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{X}_{A_j}]\|_p,$$

donde $K_n \in \mathbb{N}$ viene dado por 1.1 y en la última estimación se ha utilizado la desigualdad de Hölder.

Por hipótesis, tenemos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $[f_n] \in L_q(\mu)$ verificando

$$\lambda(A \cap E_n) = \int_A f_n(\omega) d\mu(\omega)\ \forall A \in \Sigma, n \in \mathbb{N}.$$

Definimos ahora $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por $f(\omega) = f_n(\omega)$ si $\omega \in E_n$.

Es claro que f es una aplicación bien definida y $\mu-$medible. Para ver que $[f] \in L_1(\mu)$ basta observar que la sucesión $\{|f|\mathcal{X}_{\cup_{k=1}^m E_k}\}_m$ es creciente, converge puntualmente a $|f|$ y que se tiene la siguiente estimación

$$\int_{\cup_{k=1}^m E_k} |f| d\mu = \sum_{k=1}^m \int_{E_k} |f_k| d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^m |\lambda|(E_k) \leq |\lambda|(\cup_{k=1}^m E_k) \leq |\lambda|(\Omega).$$

Además, como $[f\mathcal{X}_{\cup_{k=1}^m E_k}] = [\sum_{k=1}^m f_k \mathcal{X}_{E_k}] \in L_q(\mu) \subset L_1(\mu)$, por el teorema de convergencia monótona obtenemos que $[f] \in L_1(\mu)$. Por último, el teorema de la convergencia dominada nos dice que

$$\lim_m \int_{\cup_{k=1}^m (E_k \cap A)} f d\mu = \int_A f d\mu \ \forall A \in \Sigma.$$

Por tanto

$$\lim_m \sum_{k=1}^m \int_{E_k \cap A} f_k d\mu = \int_A f d\mu \ \forall A \in \Sigma.$$

En consecuencia,

$$\lim_m \sum_{k=1}^m \lambda(E_k \cap A) = \int_A f d\mu \ \forall A \in \Sigma,$$

lo que nos permite concluir que

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu \ \forall A \in \Sigma. \blacksquare$$

iii) $\Rightarrow$ *i)* Esta implicación es conocida y puede encontrarse en [17, *Th. IV.8.1*, *IV.8.5*].

Hemos de decir que el resultado anterior es cierto cuando se supone sólo que la medida μ es $\sigma-$finita. El paso del caso finito, al caso $\sigma-$finito es un proceso conocido en el ambiente de la Teoría de la Medida.

La condición ii) del teorema anterior es una versión del ya clásico teorema de Radon-Nikodym, ver [9, *Th.* 1.0.1], que a pesar de sus hipótesis restrictivas, contiene todos los elementos necesarios para su posible generalización sobre la que hablaremos en la siguiente sección. Una de las versiones más generales y conocidas del teorema de Radon-Nikodym que puede encontrarse en el texto de Valdivia [56, *Teor.* 1.2.30] es la siguiente:

Teorema I.1.3. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$finita y λ una medida compleja sobre el espacio medible (Ω, Σ), absolutamente continua respecto de μ. Entonces existe una función compleja f definida en Ω y $\mu-$integrable, de manera que*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \ \forall E \in \Sigma.$$

Queda así expuesto el teorema de Radon-Nikodym, como herramienta indispensable o resultado equivalente a la identificación de los duales de los espacios $L_p(\mu)$, con $1 \leq p < +\infty$, al menos cuando la medida μ es finita. Exposición, ésta última, que creemos original, aunque como ya dijimos en la introducción de esta sección, una estrategia similar, pero con diferente demostración, para obtener el teorema de Radon-Nikodym, fue seguida por Von Neumann, como puede verse en [48, *Th.* 6.9].

Por último, quisiéramos poner de manifiesto que además de la utilidad presentada del teorema de Radon-Nikodym también se deben a él resultados tan importantes como la descomposición polar de una medida compleja, y lo que se puede llamar el teorema fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue, es decir, el hecho de que toda función absolutamente continua en un intervalo cerrado sea derivable casi por doquier, y se pueda expresar como la integral de su derivada.

I.2 La propiedad de Radon-Nikodym

Dada la importancia del teorema de Radon-Nikodym, según se ha puesto de manifiesto en la sección anterior, no parece necesario motivar un intento de obtener un resultado similar en el ambiente de los espacios de Banach de dimensión infinita.

Empezamos presentando algunos conceptos sobre medidas vectoriales que no son más que trasladar sus análogos conocidos en el caso escalar.

A partir de este momento consideraremos sólo espacios de medida real finita y positiva.

Definición I.2.4 . *Sea X un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.*

(i) Una aplicación $F : \Sigma \to X$ se llamará una medida vectorial en X si es una función de conjunto numerablemente aditiva, esto es, si $F(\emptyset) = 0$ y

$$F(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} F(A_n),$$

para cada sucesión de elementos disjuntos $\{A_n\} \subset \Sigma$.

(ii) Una medida vectorial en X, $F : \Sigma \to X$ se llamará absolutamente continua respecto de μ si siempre que $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0$ se verifica que $F(A) = 0$.

(iii) Se define la variación de F, denotada por $\|F\|$ como la medida real $\|F\| : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\|F\|(A) = \sup\{\sum_{B \in \Pi} \|F(B)\| : \Pi \in \mathcal{P}_F(A, \Sigma)\} \ \forall A \in \Sigma,$$

donde $\mathcal{P}_F(A, \Sigma)$ denota el conjunto de todas las particiones finitas de A por elementos de Σ.

Por último, antes de presentar la propiedad de Radon-Nikodym, debemos saber integrar funciones con valores en un espacio de Banach. Para ello damos la siguiente definición que, otra vez, traslada el concepto de integral escalar conocido.

Definición I.2.5. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach y fijemos una aplicación $f : \Omega \to X$. Se dice que f es integrable Bochner si existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$, tales que*

(i) $\lim_n s_n = f$ c.p.d.(μ).

(ii) $\lim_n \int_\Omega \|s_n(\omega) - f(\omega)\| d\mu(\omega) = 0$.

En tal caso, se define la integral Bochner de f como

$$\int_\Omega f d\mu = lim_n \int_\Omega s_n d\mu. \tag{1.2}$$

La función f se dirá fuertemente medible o medible Bochner si se verifica sólo la condición i).

El límite 1.2 existe gracias a la complitud de X y no es difícil comprobar que la definición de la integral Bochner no depende de la sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ que se considere, por la condición ii).

Definición I.2.6 . *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach y $p \in [1, +\infty]$.*

(i) Se define el espacio seminormado $\mathcal{L}_p(\mu, X)$ mediante

$$\mathcal{L}_p(\mu, X) = \{f \in X^\Omega : \text{f es medible y } \int_\Omega \|f\|^p d\mu < +\infty\},$$

con la seminorma

$$\|f\|_p = (\int_\Omega \|f\|^p d\mu)^{\frac{1}{p}},$$

para cualquier $p \in [1, +\infty[$.

(ii) Análogamente se define

$$\mathcal{L}_\infty(\mu, X) = \{f \in X^\Omega : f \text{ es medible y esencialmente acotada}\},$$

con la seminorma

$$\|f\|_\infty = \operatorname{sup\,ess}\{\|f(\omega)\| : \omega \in \Omega\},$$

donde sup ess *denota el supremo esencial.*

Los espacios de Banach $L_p(\mu, X)$, para $p \in [1, +\infty]$, se definen a partir de los anteriores, como es usual, tomando cocientes por el subespacio de las funciones que son cero casi por doquier.

Estamos ya en disposición de presentar la propiedad de Radon-Nikodym.

Definición I.2.7. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X un espacio de Banach. Se dice que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, que denotaremos por RNP, respecto de (Ω, Σ, μ), si para cada medida vectorial $F : \Sigma \to X$, absolutamente continua respecto de μ y con variación acotada existe $f \in \mathcal{L}_1(\mu, X)$ tal que*

$$F(A) = \int_A f d\mu \ \forall A \in \Sigma.$$

Se dice que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si lo anterior se verifica para cada espacio de medida.

En [12], J. A. Clarkson introduce el concepto de espacio de Banach uniformemente convexo para probar que esta familia de espacios de Banach tiene la RNP. Este trabajo se puede considerar como el primer teorema de Radon-Nikodym para espacios de Banach de dimensión infinita. El interés que despierta este trabajo en el estudio de la RNP es *"instantáneo"*, ya que si se busca el trabajo de J. A. Clarkson, inmediatamente después en el mismo número de la revista aparece otro artículo de N. Dunford y M. Morse titulado *"Remarks on the preceding paper of James A. Clarkson,"* que puede verse en [16].

Los primeros espacios conocidos que no satisfacen la RNP son c_0 y $L_1(\mu)$, siendo μ no puramente atómica, ver [9, *Example* 2.1.2.].

Como cabía esperar, se puede obtener un resultado similar a I.1.2, para espacios de Banach con la RNP.

Teorema I.2.8.[*15, Th. IV.1*] *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

(i) Los espacios de Banach $L_p(\mu, X)^*$ y $L_q(\mu, X^*)$ son isométricamente isomorfos, siempre que $p \in [1, +\infty]$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entendiendo que si $p = 1$, entonces $q = \infty$.

(ii) X^* tiene la RNP, respecto de (Ω, Σ, μ).

Por supuesto, el isomorfismo isométrico anterior es el que aparece en I.1.2, en este nuevo ambiente.

Tras un estudio de la convergencia de las martingalas en relación con la RNP, realizado por S. D. Chartteji en [11], que posteriormente será crucial para el entendimiento de la RNP en espacios de Banach, H. B. Maynard demuestra en [41], el siguiente resultado.

Teorema I.2.9. *Sea X un espacio de Banach y $([0,1], \mathcal{A}, \lambda)$ el espacio de medida de Lebesgue en $[0,1]$. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la RNP.

(ii) X tiene la RNP, respecto de $([0,1], \mathcal{A}, \lambda)$.

En el mismo trabajo, H. B. Maynard, obtiene lo que R. D. Bourgin llama en [9] la primera caracterización geométrica de la RNP. Para describir brevemente esta caracterización necesitamos definir algunos conceptos.

Para un espacio de Banach X y un subconjunto acotado D de X definimos la $s-$envolvente convexa de D, $s - co(D)$, como el conjunto de todas las series convexas de elementos de D.

Definición I.2.10 . *Sea C un subconjunto acotado de un espacio de Banach X.*

(i) Se dice que C es c−dentable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ tal que

$$x_\varepsilon \notin co(C \setminus B(x_\varepsilon, \varepsilon)).$$

(ii) Se dice que C es s−dentable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ tal que

$$x_\varepsilon \notin s - co(C \setminus B(x_\varepsilon, \varepsilon)).$$

(iii) Se dice que C es dentable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ tal que

$$x_\varepsilon \notin \overline{co}(C \setminus B(x_\varepsilon, \varepsilon)).$$

La primera caracterización geométrica de la RNP, obtenida por H. B. Maynard, que puede verse en [41] es la siguiente:

Teorema I.2.11 . *Sea X un espacio de Banach. X tiene la RNP si, y sólo si, cada subconjunto acotado de X es s−dentable.*

Para este resultado, H. B. Maynard utiliza una cierta propiedad sobre la convergencia de martingalas, iniciada por S. D. Chartteji en [11] y que puede verse desarrollada con detalle en los dos primeros capítulos de [9].

Algún tiempo después, M. A. Rieffel, W. J. Davis y R. R. Phelps obtienen en [46] y [13] una nueva caracterización geométrica de la RNP.

Teorema I.2.12. *Sea X un espacio de Banach. X tiene la RNP si, y sólo si, cada subconjunto acotado de X es dentable.*

A la vista del resultado anterior, X tiene la RNP si, y sólo si, todo subconjunto acotado de B_X es dentable.

En [29] Huff demuestra:

Teorema I.2.13. *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X. Entonces son equivalentes:*

(i) Cada subconjunto de C es c−dentable.

(ii) Cada subconjunto de C es s−dentable.

(iii) Cada subconjunto de C es dentable.

En este mismo trabajo se encuentra también, por primera vez, lo que se ha dado en llamar la localización de la RNP que pasamos a definir.

Definición I.2.14. *Sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo. Se dice que C tiene la RNP si, y sólo si, cada subconjunto de C es dentable.*

Presentamos un resultado que puede encontrarse en [9, Th. 2.3.6].

Teorema I.2.15. *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes:*

(i) C tiene la RNP

(ii) Cada subconjunto cerrado, convexo y separable de C tiene la RNP.

(iii) Cada subconjunto numerable de C es c−dentable.

(iv) Cada subconjunto cerrado y convexo de C es dentable.

Quisiéramos destacar el hecho de que la RNP, como consecuencia del resultado anterior, es una propiedad topológica que está determinada por los subespacios separables.

Presentamos ahora dos propiedades de la dentabilidad que fueron cruciales para la obtención del resultado anterior y que hacen entender mejor la localización de la RNP.

Definición I.2.16. *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto acotado de X. Una sección de C es un conjunto de la forma*

$$S(C,x^*,\alpha) = \{x \in C : x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\},$$

donde $x^* \in X^*$ y $\alpha > 0$.

Proposición I.2.17.[46] *Sea X un espacio de Banach y $C \subset X$ acotado. Entonces son equivalentes:*

(i) C es dentable.

(ii) $\overline{co}(C)$ es dentable.

(iii) C contiene secciones de diámetro arbitrariamente pequeño. Esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $S(C, x^*, \alpha)$, sección de C, tal que

$$\operatorname{diam}(S(C, x^*, \alpha)) < \varepsilon.$$

Tras el teorema I.2.15, primera caracterización geométrica de la RNP, el trabajo de la mayoría de los investigadores se encamina a obtener nuevas caracterizaciones de la RNP, en función de la abundancia de ciertos tipos de puntos destacados que definimos a continuación.

Definición I.2.18 . *Sea C un subconjunto acotado de un espacio de Banach X y $x \in C$.*

(i) x es un punto extremo de C si

$$x \notin co(C \setminus \{x\}).$$

(ii) x es un punto diente débil de C si para cada entorno débil, V, de x se verifica que

$$x \notin \overline{co}(C \setminus V).$$

(iii) x es un punto diente de C si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$x \notin \overline{co}(C \setminus B(x, \varepsilon)).$$

(iv) x es un punto soporte de C si existe $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ con

$$x^*(x) = \sup x^*(C).$$

(v) *x es un punto expuesto de C si existe $x^* \in X^*$ tal que*

$$x^*(x) > x^*(y)\ \forall y \in C \setminus \{x\}.$$

(vi) *x es un punto fuertemente expuesto de C si existe $x^* \in X^*$ verificando que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ con $\operatorname{diam}(S(C, x^*, \alpha)) < \varepsilon$ y x está soportado por x^* en C.*

Las seis nociones anteriores son distintas, (ver [6, *Section* 2]), y las únicas relaciones generales entre ellas son:

iii)⇒ii)⇒i), vi)⇒v)⇒iv) y vi)⇒iii).

Teorema I.2.19.[*43*] *Sea C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio de Banach X. Si C tiene la RNP, entonces cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C es la envolvente convexo cerrada de sus puntos extremos.*

A la vista de los distintos puntos destacados, definidos anteriormente, y según las palabras de J. Bourgain, el mejor resultado, en esta línea que cabía esperar, es el siguiente.

Teorema I.2.20.[*43*] *Sea C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes:*

(i) *C tiene la RNP.*

(ii) Cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C es la envolvente convexo cerrada de sus puntos fuertemente expuestos.

(iii) Cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C es la envolvente convexo cerrada de sus puntos dientes.

Como sabemos, el teorema de Bishop-Phelps nos garantiza siempre la abundancia de puntos soporte en cualquier cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio de Banach.

En cuanto a la relación entre la RNP y la abundancia de dientes débiles, J. Bourgain demuestra el siguiente hecho.

Teorema I.2.21 [9, Th. 4] *Sea C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio de Banach X. Si C no verifica la RNP, entonces existe $C_0 \subset C$, cerrado y convexo sin dientes débiles.*

Además del resultado anterior, los dientes débiles encierran un interés en sí mismos, como se deduce del siguiente hecho.

Proposición I.2.22. *Sea C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio de Banach X y $x \in C$. Entonces son equivalentes:*

(i) x es un diente débil de C.

(ii) x es un punto extremo de $\overline{C}^{w^*}$.

Demostración. i)$\Rightarrow$ii): Supongamos que no se verifica ii). Entonces podremos encontrar $t \in]0,1[$, $x^{**}, y^{**} \in \overline{C}^{w^*}$, $x^{**} \neq x \neq y^{**}$ tales que

$$x = tx^{**} + (1-t)y^{**}. \tag{1.3}$$

Sean $\{x_\lambda\}$, $\{y_\lambda\}$ dos redes en C convergiendo, en la topología w^* de X^{**}, a x^{**} e y^{**}, respectivamente. Se tiene, entonces que $\{tx_\lambda + (1-t)y_\lambda\}$ converge, en la topología débil de X, a x.

Por 1.3 y tomando subredes, se puede suponer que existe U, entorno débil de x, de forma que x_λ, $y_\lambda \notin U$ $\forall\lambda$. En consecuencia, $x \in \overline{co}(C \setminus U)$ por 1.3, lo que contradice i). ∎

ii)$\Rightarrow$i): Supongamos que no se verifica i). En tal caso podemos encontrar U, entorno débil de x, tal que $x \in \overline{co}(C \setminus U)$. Existen entonces $h \in \mathbb{N}$ y $\{V_i : 1 \leq i \leq h\}$ entornos débiles de x de forma que $C \setminus V_i$ es convexo $\forall i$ y

$$\cap_{i=1}^{h} V_i \subset U.$$

Entonces $x \in \overline{co}(\cup_{i=1}^{h} C \setminus V_i)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $co(\cup_{i=1}^{h} C \setminus V_i)$ que converge, en la topología de la norma, a x.

Ahora, es fácil encontrar $j \in \{1,2,\ldots,h\}$ y sucesiones $\{t_n\}$ en $]0,1[$, $\{y_n\}$ en $C \setminus V_j$ y $\{z_n\}$ en C tales que

$$t_n \geq \frac{1}{h}, \quad x_n = t_n y_n + (1-t_n)z_n \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Además, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\{t_n\}$ se acumula en $t \in [\frac{1}{h}, 1]$, $\{y_n\}$ se acumula, en la topología w^* de X^{**}, en $y^{**} \in \overline{C \setminus V_j}^{w^*}$ y asímismo $\{z_n\}$ se acumula en $z^{**} \in \overline{C}^{w^*}$.

Por 1.4, tenemos que $x = ty^{**} + (1-t)z^{**}$. Pero, por hipótesis, $x = y^{**}$ y, por tanto, $x \in \overline{C \setminus V_j}^{w^*}$, lo que nos dice que $V_j \cap (C \setminus V_j) \neq \emptyset$, puesto que V_j es un entorno débil de x. ∎

El hecho de que los puntos extremos de un débilmente compacto y convexo sean dientes débiles, (ver [6, Th. II.1]), y el teorema I.2.21 nos garantizan que los subconjuntos débilmente compactos y convexos de un espacio de Banach tienen la RNP. En consecuencia, los espacios reflexivos verifican dicha propiedad. Por otra parte, N. Dunford y B. J. Pettis demuestran en [18] que los espacios duales separables tienen RNP, ampliando así la clase de espacios con esta propiedad. De hecho, durante algún tiempo se creyó que los espacios de Banach con la RNP debían ser subespacios de espacios duales separables hasta que P. W. McCartney y R. C. O'Brien demostraron en [40] la existencia de espacios de Banach con la RNP que no son isomorfos a ningún subespacio de un espacio dual separable.

1.3 RNP y KMP: la propiedad del punto de continuidad

El ya clásico teorema de Krein-Milman asegura la abundancia de puntos extremos en los compactos de un espacio localmente convexo. Eso mismo ocurre, como sabemos en los conjuntos con la RNP de un espacio de Banach, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.23. *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X. Se dice que C tiene la propiedad de Krein-Milman, (KMP), si cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C es la envolvente convexa cerrada de sus puntos extremos. Se dice que X tiene dicha propiedad cuando la verifica la bola unidad cerrada de X.*

Ahora, el teorema 1.2.19 nos dice que los conjuntos con la RNP tienen la KMP.

J.Diestel plantea en 1973 el problema de si las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman son equivalentes. Problema éste, hasta hoy sin resolver, en el que han trabajado matemáticos de la talla de Bourgain, Bourgin, James, Schachermayer, Rosenthal, Talagrand, etc.

El propio James asegura en [30] que dicho problema es uno de los principales que quedan abiertos en el marco de la teoría de los espacios de Banach.

Pretendemos en esta sección, mostrar las respuestas parciales conocidas hasta el momento, en relación con el problema anterior. Algunas de ellas sólo son válidas cuando como conjunto cerrado, acotado y convexo se considera la bola unidad cerrada de ciertos espacios de Banach. De hecho, el problema planteado por J. Diestel está abierto también en este caso.

Teorema I.3.24.[53] *Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

(i) X^* tiene la RNP.

(ii) X^* tiene la KMP.

(iii) Cada subespacio separable de X tiene dual separable.

Como consecuencia, R. R. Stegall obtiene también en [53] la equivalencia entre la RNP y la KMP para w^*- compactos convexos de un espacio dual.

Teorema I.3.25.[49] *Sea X un espacio de Banach isomorfo a $X \times X$. Entonces X tiene la RNP si, y sólo si, X tiene la KMP.*

Otra respuesta parcial, al problema que nos ocupa, para la bola de un espacio de Banach es la siguiente.

Teorema I.3.26.[8] *Sea X un retículo de Banach. Entonces X tiene la RNP si, y sólo si, X tiene la KMP.*

Posteriormente, V. Caselles, en [10], da una fácil demostración del resultado anterior y prueba la equivalencia entre la RNP y la KMP, para preduales de álgebras de von Neumann.

El trabajo más revelador para la comprensión del problema planteado por Diestel es el realizado por W. Schachermayer en [50], que pasamos a motivar.

Definición I.3.27 . *Sea C un subconjunto acotado de un espacio de Banach X y $x \in C$. Se dice que x es un punto de $(w - \| \|)$−continuidad de C si la aplicación identidad*

$$I_C : (C, w) \to (C, \| \|)$$

es continua en x.

Bor-Luh Lin, Pei-Kee Lin y L. Troyanski obtienen la siguiente caracterización de los puntos dientes, cuya abundancia caracteriza la RNP, como sabemos.

Teorema I.3.28 .[33] *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X y $x \in C$. Entonces, x es un punto diente de C si, y sólo si, x es un punto extremo y de $(w - \| \|)$−continuidad de C.*

Definición I.3.29 . *Sea C un subconjunto acotado y no vacío de un espacio de Banach X.*

(i) Se dice que C tiene la propiedad del punto de continuidad, (PCP), si cada subconjunto cerrado y no vacío de C tiene algún punto de $(w - \| \|)$–continuidad.

(ii) Se dice que C tiene la propiedad del punto de continuidad convexa, (CPCP), si cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C tiene algún punto de $(w - \| \|)$–continuidad.

(iii) Se dice que C es fuertemente regular si cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C tiene medias aritméticas de secciones con diámetro arbitrariamente pequeño. Esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de secciones, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tales que

$$diam(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{n}) < \varepsilon.$$

(iv) Por último, se dice que X tiene alguna de las propiedades anteriores si la verifica su bola unidad cerrada.

Es claro que RNP$\Rightarrow$PCP$\Rightarrow$CPCP. Por otra parte la CPCP$\Rightarrow$ Regularidad fuerte, ya que, por [58, *Lemma* 7.3], cada abierto débil relativo a un cerrado, acotado y convexo de un espacio localmente convexo y separado contiene una media aritmética de secciones. Además estos cuatro conceptos son distintos, como se demuestra en [1].

El principal avance obtenido por W. Schachermayer, en el problema de la equivalencia entre la RNP y la KMP, al que antes nos referíamos es el siguiente.

Teorema I.3.30. *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes:*

(i) C verifica la RNP.

(ii) C es fuertemente regular y verifica la KMP.

Como el propio Schachermayer indica, el teorema anterior se puede ver como la versión global de la caracterización de los puntos dientes obtenida por Bor-Luh Lin, Pei-Kee Lin y L. Troyanski, ya que en el resultado precedente se puede cambiar la regularidad fuerte por la PCP o la CPCP.

La importancia de la PCP queda entonces puesta de manifiesto para el estudio de los espacios de Banach con la RNP y su relación con la KMP.

Además, Schachermayer también obtiene en el mismo trabajo, como consecuencia de lo anterior el siguiente hecho. (Véase la primera sección sobre bases de Schauder del capítulo II para la definición de base incondicional.)

Teorema I.3.31. *Sea X un espacio de Banach con base incondicional y C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X. Entonces C tiene la RNP si, y sólo si, C tiene la KMP.*

La demostración del resultado anterior se basa en la distinción de dos casos: C tiene o no la PCP. Distinción ésta que parece fundamental para la resolución del problema propuesto por Diestel, según palabras del propio Schachermayer.

Tras el resultado de Schachermayer, R. C. James obtiene en [30] una generalización de aquél cuando se supone que el espacio tiene una cierta estructura incondicional, más general que la de base incondicional, y sobre la que entraremos más a fondo en el capítulo siguiente. De hecho, James demuestra en un cierto ambiente que las propiedades RNP, KMP, PCP y CPCP son equivalentes al hecho de que el espacio no contenga a c_0.

Así, parece que los últimos adelantos respecto al problema que nos ocupa van en la línea de exigir al espacio ambiente una cierta estructura incondicional como la de base de Schauder u otras más generales.

Haciendo un poco de historia, digamos que E. Asplund e I. Namioka utilizan ya una idea, parecida a la PCP, en [2] para dar una demostración geométrica del teorema del punto fijo de Ryll-Nardzewski. Dicha idea consiste en darse cuenta de que muchos puntos extremos de un subconjunto convexo, separable y débilmente compacto de un espacio de Banach son también puntos de $(w-\|\ \|)$−continuidad. Posteriormente estas ideas se formalizaron dando lugar a las propiedades PCP, CPCP y Regularidad fuerte gracias al trabajo de N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey y W. Schachermayer [20].

Por último, veamos que en ambiente no completo las propiedades RNP y KMP son independientes. Para ello, claro está, es preciso tener una definición natural de dichas propiedades en espacios no completos.

Como el concepto de punto extremo es algebraico y lo único que se necesita para la definición de la KMP es una topología, resulta natural considerar la KMP en espacios vectoriales topológicos.

Definición I.3.32. *Sea X un espacio vectorial topológico y C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X. Se dice que C tiene la propiedad de KMP si cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X es la envolvente convexo-cerrada de sus puntos extremos.*

Además, en el ambiente de los espacios localmente convexos se tiene la siguiente caracterización.

Proposición I.3.33. [9, *Prop.* 3.1.1] *Sea X un espacio localmente convexo y C un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X. Entonces son equivalentes:*

(i) C tiene la KMP.

(ii) Cada subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C tiene algún punto extremo.

Demostración. La implicación i)$\Rightarrow$ii) es clara. Supongamos entonces ii) y que no se verifica i). Existe entonces K subconjunto cerrado, convexo y no vacío de C tal que $\overline{co}(ExtK) \neq K$. Sea $K_1 = \overline{co}(ExtK)$. Por el teorema de separación existe $f \in X^*$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$sup(f(K_1)) < r < sup(f(K)).$$

Hagamos ahora $K_2 = f^{-1}([r, +\infty[) \cap K$. Así, K_2 es cerrado, convexo y no vacío y, por tanto, $Ext(K_2) \neq \emptyset$. Sea $y \in Ext(K_2)$. Entonces $y \notin K_1$ y, por tanto, y no es extremo de K. Existen ahora $x, z \in K$ y $\lambda \in]0, 1[$ tales que $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$. Como y es un punto extremo de K_2 se tiene que $f(y) = r$ y podemos suponer que $f(x) < r < f(z)$.

Si $\lambda_0 = max\{\lambda \geq 1 : x + \lambda(z - x) \in K\}$ y $w = x + \lambda_0(z - x)$ tenemos que $f(w) > r$ y, en consecuencia, w no es un punto extremo de K. Existen, entonces, $a, b \in K$ y $t \in]0, 1[$ tales que $w = ta + (1 - t)b$. Por la definición de w y por la igualdad anterior tenemos que y es un punto interior al triángulo $co(\{a, b, x\})$, lo que nos dice que y se puede poner como combinación convexa estricta de puntos de $f^{-1}(r) \cap K$. Una contradicción, puesto que $y \in Ext(K_2)$. ∎

Por otro lado, para la definición de la RNP se necesita la complitud como garantía de la buena definición de la integral Bochner. Sin embargo, gracias al teorema I.2.13, en todos los trabajos actuales sobre el tema se define la RNP en términos de la dentabilidad. De hecho, puede encontrarse la siguiente definición en [9, *Chapter* 7.12].

Definición I.3.34. *Sea X un espacio localmente convexo y C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X. Se dice que C tiene la RNP si cada subconjunto no vacío de C es dentable.*

Por supuesto el concepto de dentabilidad es natural en este ambiente.

Definición I.3.35 . *Sea X un espacio localmente convexo y C un subconjunto acotado y no vacío de X. Se dice que C es dentable si para cada U entorno convexo y cerrado de cero existe $x \in C$ tal que*

$$x \notin \overline{co}(C \setminus x + U)$$

.

Dadas ya las definiciones naturales de la RNP y la KMP en el ambiente de los espacios localmente convexos, comenzamos presentando en este ámbito un ejemplo muy elemental de un cerrado, acotado y convexo verificando la RNP y sin la KMP.

Consideremos el subespacio no cerrado de c_0 formado por las sucesiones casi nulas, es decir aquellas sucesiones que son nulas a partir de un término en adelante, que denotaremos por c_{00}. Definamos

$$C = \{x \in c_{00} : |x(n)| \leq \frac{1}{n}\}.$$

Es claro que C es un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío del espacio localmente convexo c_{00}. Sea $x \in C$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = 0$ $\forall n \geq k$. Si denotamos por $\{e_n\}$ a la base canónica de c_0 y hacemos $y = x + \frac{e_k}{k}$, $z = x - \frac{e_k}{k}$, tenemos que $y, z \in C$ y que $x = \frac{y+z}{2}$. Es decir, x no es punto extremo de C y, en consecuencia, C no verifica la KMP.

Para ver que C tiene la RNP basta observar que el cierre de C en c_0, D, es un débilmente compacto y convexo de c_0. Entonces, todo subconjunto no vacío de D, y por tanto de C, es dentable, ya que los débilmente compactos convexos de un espacio de Banach tienen la RNP.

Pasamos ahora a mostrar otro ejemplo lo mismo de elemental que muestra que la KMP no implica la RNP en un espacio localmente convexo.

Sea ahora $B^+ = \{x \in B_{c_{00}} : x(n) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Consideremos el conjunto $A = \{x \in B^+ : x(n) \in \{0,1\} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Si $x \in A$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = 0 \ \forall n \geq k$, se tiene que

$$x = \lim_n \frac{(x + e_{k+1}) + (x + e_{k+2}) + \ldots + (x + e_{k+n})}{n},$$

lo que nos dice que $x \in \overline{co}(A \setminus B(x,1))$ y por tanto A no es dentable. Así queda demostrado que B^+ no verifica la RNP.

Veamos ahora que B^+ tiene la KMP. Para ello, sea C un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de B^+ y $z \in C$. Definamos ahora $K = \{x \in C : sop(x) \subset sop(z)\}$, donde

$$sop(x) = \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}.$$

Entonces K es un compacto convexo de c_{00}. Además todo punto extremo de K es también extremo de C. Como el teorema de Krein-Milman nos garantiza que K posee puntos extremos, obtenemos que C tiene algún punto extremo. En definitiva, hemos demostrado que todo subconjunto cerrado y convexo de B^+ tiene puntos extremos. Basta ahora aplicar la proposición I.3.33 para obtener que B^+ tiene la KMP.

Capítulo II

LA PROPIEDAD DEL PUNTO DE CONTINUIDAD EN ESPACIOS DE BANACH CON BASE SCHAUDER.

En este capítulo se estudia la propiedad del punto de continuidad en espacios de Banach con base Schauder, obteniendo una caracterización de dicha propiedad cuando la base es de un tipo especial, ("shrinking"). *Como consecuencia, se consigue demostrar la equivalencia entre las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman, para algunos espacios de Banach con base* "shrinking". *La principal fuente de inspiración para estos resultados es un trabajo de Argyros, Odell y Rosenthal,* [*1*], *en el que se hace un estudio completo de la propiedad del punto de continuidad, en un espacio de Banach clásico como* c_0. *El resultado principal de este trabajo, será generalizado a lo largo de este capítulo, y dicha generalización se volverá crucial para la obtención de nuestros objetivos.*

Una de las pretensiones del Capítulo I era poner de manifiesto la importancia que tiene la propiedad del punto de continuidad, en el estudio de los espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym, y su relación con la propiedad de Krein-Milman. Quizás por ello, en este capítulo, uno de los principales de esta memoria, nos dedicamos de lleno al estudio de la propiedad del punto de continuidad. La razón para que dicho estudio se haga en espacios de Banach con base Schauder, aparte del más fácil manejo de estos espacios, está motivada por dos problemas todavía abiertos en la actualidad.

El primero de ellos es el de la equivalencia entre las propiedades de Radon-Nikodym y de Krein-Milman. Obsérvese que si se resolviese este problema, afirmativamente, en el ambiente de espacios de Banach con base Schauder, esto es, si se supone que en dichos espacios las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman son equivalentes para los subconjuntos cerrados, acotados y convexos, la misma solución positiva sería automática en cualesquiera espacios de Banach, debido a la determinación por subespacios separables de la propiedad de Radon-Nikodym, (Teorema I.2.15), y al hecho de que el espacio $C([0,1])$ posee base Schauder ([51, *Exam.* 2.2]) y es universal para la clase de los espacios de Banach separables, en el sentido de que todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C([0,1])$, ([31, *Th.* 28.7]).

El segundo de los problemas al que hacíamos referencia tiene que ver con la propiedad del punto de continuidad que estudiamos en el presente capítulo:

¿Está RNP (respectivamente PCP) determinada por los subespacios con base Schauder?

Es decir, si cada subespacio con base Schauder de un espacio de Banach X tiene RNP (respectivamente PCP) , ¿se puede asegurar que X tiene RNP (respectivamente PCP)?

J. Bourgain planteó dicho problema y a este autor es debido también uno de los principales resultados en relación con él (ver [5]). En el capítulo siguiente tendremos oportunidad de entrar más a fondo en el estudio de dicho problema.

Puesta ya de manifiesto la importancia de la propiedad del punto de continuidad en el ambiente de la *"geometría"* de los espacios de Banach y el interés que su estudio tiene para espacios con base Schauder, parece oportuno y necesario, para que esta memoria sea autocontenida en lo posible, hacer primero un recordatorio de la teoría de bases Schauder en espacios de Banach, para presentar primero el ambiente de trabajo de este capítulo, y para la mejor comprensión de los resultados que aparecerán más adelante.

II.1 Algunos conceptos de bases Schauder en espacios de Banach

La mayoría de los conceptos y resultados de esta sección se pueden encontrar en [34].

Recordemos que si X es un espacio de Banach y $\{e_n\}$ es una sucesión en X, se dice que $\{e_n\}$ es una base Schauder de X, si todo elemento

$x \in X$ tiene una única expresión del tipo:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n,$$

donde $\lambda_n \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y la serie converge en la topología de la norma en X.

Equivalentemente, $\{e_n\}$ es una base Schauder de X si el subespacio generado por $\{e_n\}$ es denso en X y existe una constante $K > 0$ de forma que

$$\|\sum_{n=1}^{p} \lambda_n e_n\| \leq K \|\sum_{n=1}^{p+q} \lambda_n e_n\|,$$

para cualesquiera escalares λ_n y naturales p y q. A partir de este momento, cuando no haya problema de confusión, suprimiremos la palabra Schauder cuando hablemos de bases en espacios de Banach, entendiendo por ello el concepto que acabamos de recordar.

Asímismo, si $\{e_n\}$ es una sucesión de elementos de un espacio de Banach X, diremos que $\{e_n\}$ es una sucesión básica en X si es una base del subespacio cerrado de X que genera.

La mejor constante K en la desigualdad anterior se llama la constante de la base. Como $K \geq 1$, la mejor de todas las posibles constantes básicas es $K = 1$ y, en este caso, se dice que la base es monótona.

Diremos que la base es normalizada cuando $\|e_n\| = 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Merece la pena observar que, en un espacio de Banach con base, siempre se puede conseguir que la base sea monótona, sin más que renormar equivalentemente el espacio. En efecto, si X es un espacio de Banach con base $\{e_n\}$ y denotamos $\|.\|$ a su norma, basta definir

$$|||x||| = \sup\{\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| : n \in \mathbb{N}\},$$

donde $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$. Ahora X con la nueva norma $|||\ |||$ equivalente es un espacio de Banach con base monótona $\{e_n\}$.

Para mayor comodidad, y de forma canónica, se pueden definir los funcionales asociados a una base $\{e_n\}$ como la única sucesión de elementos de X^*, $\{f_n\}$, para los que se verifica que $f_n(e_m) = \delta_{n,m}$, donde $\delta_{n,m}$ es el delta de Kronecker. De esta forma, si x es un elemento de un espacio de Banach con base $\{e_n\}$, su expresión en función de la base es:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)e_n.$$

En general, los funcionales asociados a una base de un espacio de Banach forman una nueva base del subespacio cerrado que generan, en el dual del espacio de partida, pero no siempre forman una base del dual entero. Obsérvese que el hecho de que un espacio de Banach tenga una base, fuerza la separabilidad del espacio y así, por ejemplo, el espacio de Banach clásico ℓ_1 (el espacio de las sucesiones de escalares, cuya serie es absolutamente convergente) posee bases, y ninguna de ellas hace que sus funcionales asociados sean base del dual, puesto que como es sabido, el dual de ℓ_1 se puede identificar isométricamente con ℓ_∞, y éste no es separable.

Esto da pie a la siguiente definición, para la cual, dicho sea de paso, no hemos encontrado una traducción adecuada en castellano que sustituya el término *"shrinking"*.

Definición II.1.1. *Sea X un espacio de Banach con una base $\{e_n\}$ y funcionales asociados $\{f_n\}$. Se dice que la base $\{e_n\}$ es* "shrinking" *si $\{f_n\}$ es una base de X^*.*

Uno de los ejemplos más sencillos de base *"shrinking"* es la base usual de c_0, ésta es la formada por las sucesiones que tienen un solo término no nulo, e igual a 1.

Una caracterización sencilla de las bases *"shrinking"* es la siguiente:

Proposición II.1.2. *Sea X un espacio de Banach con base $\{e_n\}$. Entonces la base es* "shrinking" *si, y sólo si, $\lim_{n\to+\infty} \|x^*_{|E_n}\| = 0 \; \forall\, x^* \in X^*$, donde E_n es el subespacio cerrado generado por $\{e_n, e_{n+1}, \dots,\}$, y $x^*_{|E_n}$ denota la restricción del funcional x^* al subespacio E_n.*

Merece la pena observar, que el bidual de un espacio de Banach con base *"shrinking"*, puede ser perfectamente identificado, en general, como a continuación se verá.

Proposición II.1.3. *Sea $\{e_n\}$ una base* "shrinking" *de un espacio de Banach X, con funcionales asociados $\{f_n\}$. Entonces X^{**} es isomorfo al espacio de las sucesiones de escalares $\{a_n\}$ verificando:*

$$\sup_n\{\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|\} < +\infty.$$

El isomorfismo viene dado por la ley $x^{**} \leftrightarrow (x^{**}(f_1), x^{**}(f_2), \dots)$. La norma de X^{**} es equivalente (y en el caso de que la base sea monótona es igual) a la definida por la expresión $\sup_n\{\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}(f_i)e_i\|\}$.

Otra noción importante en lo que concierne a bases, que es, en algún sentido, dual de la noción de *"shrinking"*, es la de acotadamente completa.

Definición II.1.4. *Una base $\{e_n\}$ de un espacio de Banach X se dice que es acotadamente completa si, para cada sucesión de escalares (λ_n) tales que $sup\{\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$, se verifica que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$ converge en la topología de la norma del espacio X.*

Un típico ejemplo de base no acotadamente completa, es la base usual del espacio de Banach c_0. Sin embargo, la base usual de ℓ_p, con $1 \leq p < +\infty$, sí es acotadamente completa.

Es fácilmente comprobable que los funcionales asociados a una base *"shrinking"*, en un espacio de Banach, forman una base acotadamente completa. El recíproco también resulta ser cierto.

Proposición II.1.5. *Un espacio de Banach X con una base acotadamente completa es isomorfo a un espacio de Banach dual. Más concretamente, X es isomorfo al dual del subespacio cerrado de X^* generado por los funcionales asociados a la base. De hecho, si la base es monótona, este isomorfismo es una isometría.*

Combinando las nociones de base *"shrinking"* y acotadamente completa se obtiene la siguiente caracterización de la reflexividad.

Teorema II.1.6. *Sea X un espacio de Banach con base. Entonces, X es reflexivo si, y sólo si, la base es, a la vez,* "shrinking" *y acotadamente completa.*

Recordamos ahora un concepto bastante natural, el de bases equivalentes. No es más que introducir una relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases de un espacio de Banach con base, considerando iguales espacios isomorfos, como es usual.

Definición II.1.7. *Sean X, Y dos espacios de Banach y $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ bases de X e Y, respectivamente. Se dice que dichas bases son equivalentes si para cualesquiera escalares $\{\lambda_n\}$ se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n v_n \text{ converge.}$$

El teorema de la gráfica cerrada nos da, ahora, una fácil caracterización de cuándo dos bases son equivalentes.

Proposición II.1.8. *Sean X, Y dos espacios de Banach y $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ bases de X e Y, respectivamente. Entonces, dichas bases son equivalentes si, y sólo si, existe un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que*

$$T(u_n) = v_n \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es conocido, y de gran utilidad, un resultado de tipo más técnico, que da una condición suficiente para que dos bases de un mismo espacio sean equivalentes. Aunque este resultado se puede encontrar en [34] cuando se parte de una base normalizada, lo presentamos aquí con un enunciado ligeramente modificado y esencialmente con la misma demostración.

Proposición II.1.9 . *Sea $\{v_n\}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X con constante básica K, y $M > 0$ de forma que $\|v_n\| \geq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\{u_n\}$ es una sucesión de elementos de X tales que:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n - v_n\| < \frac{M}{2K},$$

entonces $\{u_n\}$ es una sucesión básica de X equivalente a $\{v_n\}$.

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de escalares de forma que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n v_n$ converge. Es entonces claro que $lim_n a_n = 0$, ya que $\|v_n\| \geq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ahora, la desigualdad

$$\|\sum_{n=p}^{q} a_n u_n\| \leq max_n\{|a_n|\} \sum_{n=p}^{q} \|u_n - v_n\| + \|\sum_{n=p}^{q} a_n v_n\|,$$

nos asegura que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n u_n$ converge, gracias a la complitud del espacio.

Así tenemos definida una aplicación lineal $T : Y \to Z$ mediante

$$T(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n,$$

donde, por supuesto, Y es el subespacio cerrado de X generado por la sucesión $\{v_n\}$ y Z es el generado por la sucesión $\{u_n\}$.

Sea ahora $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n v_n \in Y$ y $\{f_n\}$ la sucesión de funcionales asociados a la base $\{v_n\}$. Entonces

$$\|x - T(x)\| = \|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u_n - v_n)\| \leq$$

$$\leq max_n\{|a_n|\}\sum_{n=1}^{+\infty}\|u_n - v_n\| = max_n\{|f_n(x)|\}\sum_{n=1}^{+\infty}\|u_n - v_n\| \leq$$

$$\leq \frac{2K}{M}\sum_{n=1}^{+\infty}\|u_n - v_n\|\|x\|,$$

ya que $|f_n(x)| \leq \frac{2K}{M}\|x\|\ \forall n \in \mathbb{N}$. Hagamos $L = \frac{2K}{M}\sum_{n=1}^{+\infty}\|u_n - v_n\|$. Entonces, según la hipótesis, $L < 1$ y acabamos de demostrar que

$$\|x - T(x)\| \leq L\|x\|\ \forall x \in Y.$$

Es entonces claro que

$$(1 - L)\|x\| \leq \|T(x)\| \leq (1 + L)\|x\|\ \forall x \in Y,$$

y así T es un isomorfismo. Por último basta observar que, por ser la imagen de T cerrada y contener a la sucesión $\{u_n\}$ se concluye que T es un isomorfismo de Y sobre Z, con lo que $\{u_n\}$ es una base de Z, y el resultado anterior nos dice que $\{u_n\}$ es una sucesión básica equivalente a $\{v_n\}$. ∎

En cuanto a la existencia de bases en espacios de Banach, es conocido que no todo espacio de Banach posee una base, ni aún los espacios separables [19]. Sin embargo sí es cierto que todo espacio de Banach posee una sucesión básica [51]. De ahí la importancia de las sucesiones básicas, mayor en algunos casos que la de las propias bases.

Existe un tipo especial de sucesión básica, fundamental en el estudio de bases en espacios de Banach, que pasamos a definir.

Definición II.1.10. *Sea X un espacio de Banach con base $\{e_n\}$ y $\{v_n\}$ una sucesión en $X \setminus \{0\}$. Se dice que $\{v_n\}$ es un bloque básico de la base en X si existen una sucesión de enteros $m_0 = 0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots$ y una sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tales que*

$$v_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \lambda_k e_k \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es claro, que todo bloque básico es una sucesión básica. Destacamos ahora un resultado, sobre bloques básicos, que nos será de utilidad más adelante.

Teorema II.1.11. *Denotemos por X indistintamente a los espacios de Banach c_0 o ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$ y sea $\{u_n\}$ un bloque básico normalizado de la base usual en X. Entonces $\{u_n\}$ es equivalente a la base de X y el subespacio cerrado generado por el bloque básico es isométricamente isomorfo a X.*

De hecho es sabido que los únicos espacios de Banach que verifican el teorema anterior son c_0 o ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$.

Por último, recordamos también el concepto de base incondicional.

Definición II.1.12. *Sea X un espacio de Banach con base $\{e_n\}$. Se dice que la base es incondicional, cuando la expresión de cada vector de X, en función de la base, es una serie incondicionalmente convergente, en la topología de la norma.*

Otra vez nos sirve de ejemplo el espacio c_0. Los espacios $C([0,1])$ y $L_1([0,1])$ son ejemplos típicos de espacios de Banach sin base incondicional [34, *Prop.* 1.d.1].

La clase de los espacios de Banach con base incondicional es tan importante como restrictiva, según pone de manifiesto el siguiente resultado:

Teorema II.1.13. *Sea X un espacio de Banach no reflexivo con base incondicional. Entonces X contiene un subespacio isomorfo a c_0 o a ℓ_1.*

Como colofón de esta sección, recordamos la solución a un problema parecido al que se consideró al comienzo del presente capítulo, el problema de si la reflexividad está determinada por los subespacios con base, [45].

Teorema II.1.14. *Sea X un espacio de Banach tal que cada subespacio con base es reflexivo. Entonces X es reflexivo.*

El tema de las bases de Schauder, en espacios de Banach, es tan extenso que hay tratados enteros dedicados, por completo, a ello, como por ejemplo, [51] y [34]. Hemos pretendido aquí, exponer sólo un resumen de aquella mínima parte, que nos va a ser de utilidad en adelante, pero sí queremos poner de manifiesto que es un tema todavía muy vivo, en el que permanecen abiertos problemas de existencia de ciertos tipos de bases en espacios de Banach en general, (*"shrinking"*, incondicional, y más tipos que no hemos mencionado en esta memoria), cuya solución conduce, en la mayoría de los casos, a resolver problemas planteados en espacios de Banach cualesquiera. Recordamos, por ejemplo dos de los trabajos de Gowers, [26] y [27], en los que se demuestra la existencia de espacios de Banach sin sucesiones básicas infinitas incondicionales y la de espacios sin sucesiones básicas infinitas *"shrinking"*, dando lugar este último a un contraejemplo para la conjetura de Banach modificada. Es decir, un espacio que no contiene c_0 ni ℓ_1 ni subespacios reflexivos infinito-dimensionales.

II.2 Resultados principales

La propiedad del punto de continuidad y su variante convexa, la propiedad del punto de continuidad convexa, están íntimamente relacionadas: es claro que la PCP implica la CPCP. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Ejemplos de este fenómeno han sido dados por N. Ghoussoub, B. Maurey y W. Schachermayer. Primero Ghoussoub y Maurey, en [21], introdujeron un interesante ejemplo sin la PCP. Posteriormente, estos autores, junto con Schachermayer, en [24], probaron que dicho ejemplo tiene la CPCP. Algún tiempo después, S. Argyros, E. Odell y H. Rosenthal, [1], dedicaron parte de uno de sus trabajos a caracterizar intrínsecamente la PCP en el espacio de Banach c_0, dando para ello un nuevo ejemplo, en c_0, de un cerrado, acotado y convexo con la CPCP y sin la PCP.

Presentamos, en primer lugar, aquí los resultados fundamentales del trabajo de Argyros, Odell y Rosenthal, donde se ha modificado ligeramente la notación, para nuestros propósitos posteriores.

Denotamos por Γ el conjunto de todas las sucesiones finitas de enteros positivos, e incluimos también en Γ la sucesión vacía, que denotaremos por 0. Con el fin de tener una estructura de árbol con infinitas ramas en Γ, los autores definen un orden parcial en Γ mediante: $\alpha \leq \beta$ si $|\alpha| \leq |\beta|$ y $\alpha_i = \beta_i$ para $1 \leq i \leq |\alpha|$, para cualesquiera α, $\beta \in \Gamma$, donde para cada elemento $\alpha \in \Gamma$, $|\alpha|$ denota la longitud de la sucesión finita de enteros α.

Por supuesto, convenimos que $|0| = 0$ y que $0 \leq \alpha\ \forall \alpha \in \Gamma$.

Así Γ es un conjunto infinito, numerable, parcialmente ordenado con elemento mínimo, que tiene estructura de árbol con infinitas ramas.

En consecuencia, debe existir una aplicación biyectiva $\phi : \Gamma \to \mathbb{N}$ que conserva el orden recién definido en Γ. Para construir dicha aplicación, denotemos por $\{p_n\}$ la numeración estrictamente creciente de los enteros primos positivos y definamos $\phi_1 : \Gamma \to \mathbb{N}$ mediante

$$\phi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} \ \forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma, \ \phi_1(0) = 1.$$

Así ϕ_1 es una aplicación creciente e inyectiva y, como $\phi_1(\Gamma)$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, existe una biyección creciente $\phi_2 : \phi_1(\Gamma) \to \mathbb{N}$.

Basta ahora definir $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$.

El espacio de Banach ambiente, ahora, es:

$$c_0(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : card\{\alpha \in \Gamma : x(\alpha) > \varepsilon\} < +\infty \ \forall \varepsilon > 0\}$$

con la norma del supremo.

Se define ahora un subconjunto cerrado, acotado y convexo en $c_0(\Gamma)$, Λ, conjunto que los autores llaman *"Summing Tree Simplex"*, mediante:

$$\Lambda = \{x \in c_0(\Gamma)^+ : x(0) = 1, \ \sum_{i=1}^{+\infty} x(\alpha, i) \leq x(\alpha) \ \forall \alpha \in \Gamma\},$$

donde $c_0(\Gamma)^+ = \{x \in c_0(\Gamma) : x(\alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in \Gamma\}$.

Las principales propiedades de este *"Summing Tree Simplex"* se recogen en el siguiente teorema de los autores:

Teorema II.2.15.*([1, Th.1.1])*

(i) Λ no verifica la propiedad del punto de continuidad.

(ii) Si K es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de c_0 sin la propiedad del punto de continuidad, entonces existe un subconjunto L de K tal que L es afínmente Lipschitz-equivalente a Λ.

(iii) Λ tiene la propiedad del punto de continuidad convexa.

(iv) Λ es una cara de su cierre, en la topología w^* del bidual de $c_0(\Gamma)$.

La propiedad que más nos interesa es el segundo apartado del teorema anterior, que los autores desarrollan y nosotros destacamos a continuación.

Teorema II.2.16 *([1, Prop. 2.3]) Sea K un subconjunto cerrado, acotado y convexo de c_0 sin la PCP. Entonces existe un subconjunto L de K, un subespacio Y de c_0 que contiene L, con Y isomorfo a c_0 y un isomorfismo $T : Y \to c_0(\Gamma)$ tal que $T(L) = \Lambda$.*

De esta forma, los autores obtienen la caracterización intrínseca de la PCP, a la que aludíamos al comienzo de esta sección.

Nuestra pretensión, en este momento, es obtener una generalización del teorema anterior, dentro del ambiente de los espacios de Banach con base.

En lo que sigue, X denotará un espacio de Banach con base $\{e_n\}$ y funcionales asociados $\{f_n\}$. Utilizaremos también el mismo conjunto Γ definido anteriormente. Definimos también

$$X^+ = \{x \in X : f_n(x) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $\alpha \in \Gamma$ denotamos por x_α el elemento de X dado por: $f_\gamma(x_\alpha) = 1$ si $\gamma \leq \alpha$ y $f_\gamma(x_\alpha) = 0$ en otro caso, donde $f_\alpha = f_{\phi(\alpha)}$ $\forall \alpha \in \Gamma$, abusando del lenguaje, por no haber problema de confusión.

Recuérdese que ϕ es una biyección existente entre Γ y $\mathbb{N}$, que conserva el orden, aunque, como se verá más adelante, cualquier biyección que conserve el orden es válida para nuestros propósitos.

Ahora definimos $\Lambda = \overline{co}\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, donde $\overline{co}$ denota la envolvente convexa y cerrada.

Es claro que Λ es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X. No es tan evidente que Λ sea acotado. De hecho, en general, no tiene por qué serlo. Si X es c_0 sí lo es, como sabemos, pero si X es ℓ_1 dicho conjunto deja de ser acotado. (Tanto en c_0 como en ℓ_1, siempre que no se diga lo contrario, se están considerando las bases usuales).

Es claro que la definición de Λ depende de la base que se tenga en el espacio. Aún más, si $\{v_n\}$ es un bloque básico de X, tenemos un nuevo espacio de Banach con base que es un subespacio de X, e igualmente se puede repetir la construcción, para obtener un nuevo conjunto como el anterior.

De esta forma para cada bloque básico de X, $\{v_n\}$, tenemos, mediante la anterior construcción, un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X, que denotaremos $\Lambda_{\{v_n\}}$, para hacer referencia al bloque básico con el que se hace la construcción, y evitar confusiones.

Si como X se considera el espacio c_0 con la base usual se obtiene el conjunto Λ que definieron Argyros, Odell y Rosenthal, como ellos mismos apuntan en [1, *Prop*.2.1.c]. Además, como en c_0 cualesquiera bloques básicos normalizados son equivalentes, II.1.11, cualquier conjunto definido a partir de cualquier bloque básico normalizado de c_0 es *"isomorfo"* al original, definido por los autores. Es decir, en el caso de que $X = c_0$ la tal familia que nos da la construcción hecha es, salvo isomorfismos, un único conjunto de c_0.

Antes de presentar la generalización de II.2.16, a la que ya hemos hecho referencia en alguna ocasión, necesitamos utilizar un lema previo que caracteriza la PCP. Un resultado similar, para caracterizar la CPCP puede verse en [5].

Lema II.2.17. *Sea X un espacio de Banach y K un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X. Entonces son equivalentes:*

(i) K tiene la PCP.

(ii) Para cada subconjunto A de K y para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $w-$abierto U de forma que $U \cap A \neq \emptyset$ y $diam(U \cap A) \leq \varepsilon$.

Demostración. La implicación $i) \Rightarrow ii)$ es clara.

Supongamos $ii)$ y sea A un subconjunto cerrado de K. Si aplicamos $ii)$ obtenemos un $w-$abierto U_1 tal que $U_1 \cap A \neq \emptyset$ y $diam(U_1 \cap A) \leq 1$. Si ahora, volvemos a aplicar $ii)$ a $U_1 \cap A$ obtenemos un nuevo $w-$abierto U_2 de forma que $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \emptyset$ y $diam(U_1 \cap U_2 \cap A) \leq \frac{1}{2}$. Repitiendo el proceso se tiene una sucesión de $w-$abiertos $\{U_n\}$ verificando que $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \cap A \neq \emptyset$ y $diam(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \cap A) \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Hagamos $V_n = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como no hay problema en suponer que $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, obtenemos que la intersección

$\cap_n(V_n \cap A)$ contiene un único punto que claramente es un punto de $(w-\|\ \|)$−continuidad de A. Así, K tiene la PCP, como queríamos. ∎

Teorema II.2.18. *Sea X un espacio de Banach con base y K un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X sin la PCP. Entonces, existen $\{v_n\}$, bloque básico de la base de X, Y subespacio cerrado de X, F subconjunto de K con $F \subset Y$ y $T : Y \to X$ un isomorfismo sobre su imagen, tales que $T(F) = \Lambda_{\{v_n\}}$.*

Demostración. Sea $\{e_n\}$ la base de X y $\{f_n\}$ sus funcionales asociados.

No hay problema en suponer que la base es monótona y normalizada, como se puntualizó en la sección anterior.

Por II.2.17, podemos encontrar un subconjunto no vacío A de K y un número positivo $\delta < 1$ para que cada entorno, en la topología débil, relativo al conjunto A, tenga diámetro mayor que δ.

Veamos ahora que existe un subconjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ de A de forma que $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica de X, equivalente a algún bloque básico de la base $\{e_n\}$, donde

$$u_1 = a_1,\ u_j = a_j - a_{\phi(\phi^{-1}(j)-)}\ \forall j > 1 \tag{2.1}$$

y $\alpha- = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma \setminus \{0\}$ y $n > 1$. $\alpha- = 0$, en otro caso.

Para esto, sea $\varepsilon_j = \delta 4^{-(j+1)}\ \forall j \in \mathbb{N}$ y construyamos, por inducción, $m_0 = 0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n, \ldots \in X$ tales que

$$\|u_j\| > \frac{\delta}{2},\ \|v_j - u_j\| < \varepsilon_j,\ v_j \in lin\{e_i : m_{j-1} < i \leq m_j\}\ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Una vez finalizada la construcción, se tendrá por II.1.9 (con $M = \frac{7\delta}{18}$), que $\{u_j\}$ es una sucesión básica de X equivalente al bloque básico $\{v_n\}$.

Sabemos que el diámetro de A es mayor que δ. Por tanto, debe existir un elemento a_1 de A tal que $\|a_1\| > \frac{\delta}{2}$.

Sea $m_1 \in \mathbb{N}$ con $\|a_{1|(m_1,+\infty)}\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$ y definamos

$$v_1 = a_{1|[1,m_1]} + \sum_{\substack{i=1 \\ a_1(i)=0}}^{m_1} \frac{\varepsilon_1}{2m_1} e_{i},$$

(por supuesto, $x_{|I} := \sum_{n \in I} f_n(x) e_n$).

Supongamos, ahora, que $n \geq 1$ y que $a_1, \ldots, a_n$ y m_n han sido construidos ya.

Hagamos $i = \phi(\phi^{-1}(n+1)-)$, $\alpha = \phi^{-1}(n+1)-$, $\beta = \phi^{-1}(n+1)$. Entonces $\alpha < \beta$ y, por tanto, $i < n+1$, ya que ϕ conserva el orden.

Así a_i ha sido construido ya.

Sea $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{n+1}}{3}$ y

$$V = \{a \in A : |f_j(a_i - a)| < \frac{\varepsilon}{m_n},\ 1 \leq j \leq m_n\}. \tag{2.3}$$

Entonces V es un entorno, para la topología débil en X, del punto a_i, relativo a A, con diámetro mayor que δ. En consecuencia, debe existir un elemento a_{n+1} de V tal que $\|a_{n+1} - a_i\| > \frac{\delta}{2}$. Sea $u_{n+1} = a_{n+1} - a_i$.

Si, ahora, $m_{n+1} > m_n$ con $\|u_{n+1|(m_{n+1},+\infty)}\| < \varepsilon$, hacemos

$$v_{n+1} = u_{n+1|[m_n,m_{n+1}]} + \sum_{\substack{i=m_n+1 \\ u_{n+1}(i)=0}}^{m_{n+1}} \frac{\varepsilon}{m_{n+1} - m_n} e_i. \tag{2.4}$$

Entonces $\|v_{n+1}\| > \frac{\delta}{2}$ y $\|u_{n+1} - v_{n+1}\| =$

$$\|\sum_{j=1}^{m_n} f_j(u_{n+1})e_j + \sum_{j=m_{n+1}+1}^{+\infty} f_j(u_{n+1})e_j - \sum_{\substack{i=m_n+1 \\ r_{n+1}(i)=0}}^{m_{n+1}} \frac{\varepsilon}{m_{n+1}-m_n} e_i\|$$

$$< 2\varepsilon + \sum_{j=1}^{m_n} \frac{\varepsilon}{m_n} = 3\varepsilon = \varepsilon_{n+1}$$

e inductivamente se completa la construcción.

Definamos $F = \overline{co}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \overline{lin}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y

$$\overline{u}_\alpha = u_{\phi(\alpha)},\ \overline{a}_\alpha = a_{\phi(\alpha)},\ \overline{v}_\alpha = v_{\phi(\alpha)}\ \forall \alpha \in \Gamma.$$

Por la anterior construcción, y por II.1.8, debe existir un isomorfismo sobre su imagen

$$T : Y \to X \text{ tal que } T(\overline{u}_\alpha) = \overline{v}_\alpha\ \forall \alpha \in \Gamma.$$

Por definición, $\overline{u}_0 = \overline{a}_0$ y $\overline{u}_\alpha = \overline{a}_\alpha - \overline{a}_{\alpha-}$ $\forall \alpha \in \Gamma$ con $\alpha \neq 0$.

Entonces, $\overline{a}_\alpha = \sum_{\gamma \leq \alpha} \overline{u}_\gamma$ $\forall \alpha \in \Gamma$ y $F \subset Y$.

Además, $T(\overline{a}_\alpha) = \sum_{\gamma \leq \alpha} T(\overline{u}_\gamma) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \overline{v}_\gamma$.

Pero nosotros tenemos construido $\Lambda_{\{x_n\}}$ y, por definición,

$$x_\alpha = \sum_{\gamma \leq \alpha} \overline{v}_\gamma \in \Lambda_{\{u_n\}}\ \forall \alpha \in \Gamma.$$

Entonces $T(F) = \Lambda_{\{u_n\}}$ y, de hecho, $F \subset \overline{co}(A) \subset K$, con lo que la demostración del teorema queda completada. ∎

Nota.- Conviene señalar con vistas a posteriores aplicaciones de este teorema que el bloque básico

$$v_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \lambda_k e_k\ \forall n \in \mathbb{N}\ (m_0 = 0),$$

se ha construido de tal manera que la sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada y todos sus elementos son no nulos, (2.1, 2.4, A es acotado). Obsérvese además que, (2.2),

$$Inf_n\{\|v_n\|\} \geq \frac{7\delta}{16} > 0.$$

La generalización que hemos obtenido, en el ambiente de espacios de Banach con base, no es del todo satisfactoria, puesto que no es más que una condición suficiente para que un subconjunto cerrado, acotado y convexo tenga la PCP. El que esta misma condición sea también necesaria, es un problema que no hemos conseguido resolver. Sin embargo, la generalización se convierte en totalmente satisfactoria cuando se supone que la base del espacio sea de un tipo especial, como muestra el siguiente corolario.

Corolario II.2.19. *Con las mismas hipótesis y notaciones de II.2.18, si suponemos además que la base de X, $\{e_n\}$, es* "shrinking", *entonces $\Lambda_{\{v_n\}}$ no verifica la propiedad del punto de continuidad.*

Demostración. En la demostración de II.2.18 se obtiene que (2.3)

$$|f_j(u_{n+1})| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{3m_n} \; \forall 1 \leq j \leq m_n, \; n \in \mathbb{N},$$

siendo $\{u_n\}$ una sucesión acotada en X y $\{f_n\}$ los funcionales de $\{e_n\}$.

De aquí, se obtiene fácilmente, gracias a que la base es *"shrinking"*, que la sucesión $\{u_n\}$ converge débilmente a cero, ya que, en este caso, los funcionales asociados a la base, $\{f_n\}$, generan X^*.

Por tanto, $\{v_n\}$ converge débilmente a cero, ya que

$$T(u_n) = v_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que

$$x_{(\alpha,i)} = x_\alpha + v_{(\alpha,i)} \ \forall \alpha \in \Gamma, i \in \mathbb{N},$$

y que $\|v_n\| \geq \frac{7\delta}{16} \ \forall n \in \mathbb{N}$, obtenemos que el conjunto $\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ no tiene puntos de $(w - \| \|)$−continuidad.

Basta entonces ver que $\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ es cerrado.

Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funcionales asociados a $\{v_n\}$. Si $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha \neq \beta$, existe entonces $\gamma \in \Gamma$ de forma que $|g_\gamma(x_\alpha - x_\beta)| = 1$. Por tanto, $\|x_\alpha - x_\beta\| \geq \frac{1}{\|g_\gamma\|} \geq \frac{7\delta}{32}$.

Con lo cual, $A_{\{v_n\}}$ no tiene la PCP. ∎

Así, en el ambiente de los espacios de Banach con base *"shrinking"*, sí se obtiene una perfecta caracterización de la propiedad del punto de continuidad. Sin embargo, la condición necesaria y suficiente recién obtenida viene en función de la *"contención"* de un cierto subconjunto, dentro de una familia de ellos, construida previamente, sólo a partir del espacio de Banach. Condición, ésta última, no excesivamente manejable. No obstante, no deja de ser curioso lo que pone en evidencia esta caracterización. De alguna manera, se obtiene que la culpa de que un subconjunto en un espacio de Banach no verifique la PCP, la tiene un cierto subconjunto de la forma $A_{\{v_n\}}$ que se queda *"contenido"* en el primero.

Si recordamos que los conjuntos de la forma $\Lambda_{\{v_n\}}$ no están acotados, en general, como se puso de manifiesto al comienzo de esta sección, y tenemos en cuenta que el que aparece en la tesis de II.2.18 sí que lo está, como consecuencia de ser imagen, por un isomorfismo, de un subconjunto acotado, podemos encontrar una condición necesaria y suficiente para la propiedad del punto de continuidad del espacio global, en el ambiente de espacios de Banach con base *"shrinking"*, mucho más manejable, como se demuestra en el siguiente hecho.

Corolario II.2.20.

(i) Sea X un espacio de Banach con base. Si X no verifica la PCP, entonces existe $\{v_n\}$, bloque básico de la base de X, con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, tal que $\Lambda_{\{v_n\}}$ está acotado.

(ii) Sea X un espacio de Banach con base "shrinking". *Si existe un bloque básico $\{v_n\}$, de la base de X, con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$ y tal que $\Lambda_{\{v_n\}}$ está acotado, entonces X no verifica la PCP.*

Demostración. i)$\Rightarrow$ii) Es una fácil consecuencia de II.2.18, como comentábamos antes del enunciado del presente resultado.

ii)$\Rightarrow$i) Como se tiene que $x_{(\alpha,i)} = x_\alpha + v_{(\alpha,i)}$ $\forall\alpha \in \Gamma$, $i \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_{(\alpha,i)}\}$ converge débilmente a x_α cuando $i \to +\infty$, $\forall\alpha \in \Gamma$, porque la base es *"shrinking"*. Es claro, entonces que el conjunto $\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ es cerrado, por ser $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, y no tiene puntos de $(w - \|\ \|)$−continuidad. Por tanto $\Lambda_{\{v_n\}}$ no verifica la PCP. ∎

Teniendo en cuenta la definición de los conjuntos de la forma $A_{\{v_n\}}$, se obtiene como consecuencia de lo anterior una caracterización de la PCP para espacios de Banach con base *"shrinking"*, en términos de la base, que destacamos a continuación.

Nota.- *Sea X un espacio de Banach con base* "shrinking". *Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la propiedad del punto de continuidad.

(ii) $\{\sum_{\gamma\leq\alpha} v_\gamma : \alpha \in \Gamma\}$ no está acotado para cada bloque básico $\{v_n\}$ de la base de X, con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, donde $v_\gamma = v_{\phi(\gamma)}$ $\forall\gamma \in \Gamma$.

A la vista de la nota anterior, resulta ahora evidente que c_0 no tiene la PCP. Igualmente, si tenemos en cuenta que la condición ii) es suficiente para la PCP, sin necesidad de suponer la base *"shrinking"*, resulta claro que ℓ_1 sí que tiene la PCP.

De una forma nada rigurosa, pero bastante sugerente, parece que cuando la topología fuerte de un espacio de Banach está generada por una norma que *"sume"*, el espacio va a tener la PCP, mientras que si dicha topología está generada por una norma que toma *"supremos"*, el espacio no va a tener la PCP.

Como consecuencia, obsérvese que la condición ii) de la nota anterior es independiente de la base que se elija en el espacio X, ya que el hecho de que un espacio de Banach tenga la PCP, por supuesto, no depende en absoluto de la base que se escoja.

Pasamos ahora a dar una aplicación de lo hasta ahora hecho al problema de la equivalencia entre las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman, que a nuestro juicio es bastante interesante.

Para ello recordamos primero un concepto bien conocido.

Definición II.2.21. *Sea X un espacio vectorial, A un subconjunto convexo y no vacío de X y B un subconjunto convexo y no vacío de A. Se dice que B es una cara de A, si para cualesquiera $x, y \in A$, $t \in]0,1[$ tales que $tx + (1-t)y \in B$, se verifica que $x, y \in B$.*

Recordamos, ahora, un resultado de Bourgain, [6, *Cor.*6], que aplicaremos posteriormente.

Lema II.2.22. *Sea C un subconjunto cerrado, acotado y convexo, sin RNP, en un espacio de Banach X. Si C es una cara de su cierre, en la topología w^* de X^{**}, entonces existe un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de C, sin puntos extremos.*

Demostración. Por el teorema I.2.21 existe C_0 subconjunto cerrado y convexo de C sin dientes débiles y, por I.2.22, $C_0 \cap Ext(\overline{C_0}^{w^*}) = \emptyset$.

Veamos que C_0 es una cara de $\overline{C_0}^{w^*}$, con lo cual quedará probado que $Ext(C_0) = \emptyset$.

Pongamos $z = tx_1^{**} + (1-t)x_2^{**}$, donde $z \in C_0$ y $x_1^{**}, x_2^{**} \in \overline{C_0}^{w^*}$ y $t \in]0,1[$.

Por hipótesis se tiene ahora que $x_1^{**}, x_2^{**} \in C$ y, por tanto, $x_1^{**}, x_2^{**} \in C \cap \overline{C_0}^{w^*} = C_0$. Así, C_0 es una cara de $\overline{C_0}^{w^*}$. ∎

La última consecuencia de II.2.18 que presentamos es la siguiente:

Teorema II.2.23. *Sea X un espacio de Banach con base "shrinking" y normalizada $\{e_n\}$ y funcionales asociados $\{f_n\}$, tal que*

$$\{x^{**} \in X^{**} : \lim_n x^{**}(f_n) = 0\} \subset X.$$

Entonces las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman son equivalentes, para cada subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X.

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X verificando la propiedad de Krein-Milman, y supongamos que C no tiene la PCP. Por II.2.18, sabemos que existe $\{v_n\}$, bloque básico de la base de X, tal que "$\Lambda_{\{v_n\}} \subset C$". Además, $\Lambda_{\{v_n\}}$ no verifica la PCP, por II.2.19. Por tanto, $\Lambda_{\{v_n\}}$ no tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Veamos ahora que $\Lambda_{\{v_n\}}$ es una cara de $\overline{\Lambda_{\{v_n\}}}^{w^*}$ in X^{**}.

Si $x^{**}, y^{**} \in \overline{\Lambda_{\{v_n\}}}^{w^*}$, $t \in]0,1[$ y

$$tx^{**} + (1-t)y^{**} = x \in \Lambda_{\{v_n\}},$$

debemos probar que $x^{**}, y^{**} \in \Lambda_{\{v_n\}}$.

Pongamos $v_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \lambda_k e_k \ \forall n \in \mathbb{N}$, $(m_0 = 0)$. Como ya hicimos notar en II.2.18, se puede suponer que $\{\lambda_n\}$ es una sucesión acotada de escalares no nulos y que

$$Inf_n\{\|v_n\|\} > 0. \tag{2.5}$$

Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funcionales asociados a $\{v_n\}$. Se tiene entonces que para cada natural n:

$$g_n = \frac{f_k}{\lambda_k} \ \forall k \in \{m_{n-1}+1, \ldots, m_n\}.$$

Como $\lim_n g_n(x) = 0$, por 2.5 y $x^{**}(g_n) \geq 0$, $y^{**}(g_n) \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, (por la definición de $\Lambda_{\{g_n\}}$), obtenemos que

$$\lim_n x^{**}(g_n) = \lim_n y^{**}(g_n) = 0.$$

Pero $x^{**}(f_k) = \lambda_k x^{**}(g_n)$ y $y^{**}(f_k) = \lambda_k y^{**}(g_n)$ siempre que $m_{n-1} + 1 \leq k \leq m_n$, con lo que se concluye que

$$\lim_n x^{**}(f_n) = \lim_n y^{**}(f_n) = 0.$$

Por tanto, $x^{**}, y^{**} \in \overline{\Lambda_{\{v_n\}}}^{w^*} \cap X = \Lambda_{\{v_n\}}$.

Por II.2.22, obtenemos que $\Lambda_{\{v_n\}}$ no tiene la propiedad de Krein-Milman. Pero esto es una contradicción, ya que "$\Lambda_{\{v_n\}} \subset C$", y se está suponiendo desde el principio que C tiene dicha propiedad.

En consecuencia, C tiene la PCP, y, por tanto, es fuertemente regular.

Aplicando ahora el teorema I.3.30, como C tiene la KMP y es fuertemente regular, se obtiene que C tiene la propiedad de Radon-Nikodym. ∎

Obsérvese que gracias a II.1.3 la hipótesis del resultado anterior puede leerse, en el ambiente de los espacios de Banach con base *"shrinking"*, como sigue: para cada sucesión de escalares $\{c_j\}$ tales que

$$\sup_n \| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \| < +\infty \text{ y } \lim_j c_j = 0,$$

se verifica que $\sum_j c_j e_j$ converge en la topología de la norma en X. En consecuencia, dicha hipótesis depende única y exclusivamente de la base *"shrinking"* $\{e_n\}$ que se tenga en X. Hay además, en la literatura, condiciones similares a la anterior.

Teorema II.2.24. *Sea X un espacio de Banach separable. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) Existen un subespacio cerrado y separable Y de X^* y una familia de vectores de norma uno $\{y_{n,i} : 1 \leq i \leq m_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ en Y, para una cierta sucesión de enteros positivos $\{m_n\}$, tales que

$$X = \{y^* \in Y^* : \lim_n max_{1\leq i\leq m_n} |y^*(y_{n,i})| = 0\}.$$

(iii) Existen un subespacio cerrado y separable Z de X^* y una familia de vectores de norma uno $\{z_{n,i} : 1 \leq i \leq m_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ en Z, para una cierta sucesión de enteros positivos $\{m_n\}$, tales que

$$X = \{z^* \in Z^* : \lim_n max_{1\leq i\leq m_n} |z^*(z_{n,i})| = 0\}.$$

Entonces , las afirmaciones i) e ii) son equivalentes y ambas implican iii).

La equivalencia entre i) y ii), en el resultado anterior se puede encontrar en el trabajo de N. Ghoussoub y B. Maurey [22, $Th.IV.7$], mientras que el hecho de que i) y ii) implican iii) es un análisis de la demostración de la equivalencia entre i) y ii), como los propios autores indican en [23, $Th.IV.1$].

Es claro que el espacio de Banach clásico c_0 verifica iii), (tomando $X = c_0$, $Z = X^*$, $m_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $z_{n,i} = e_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, donde $\{e_n\}$ denota la base de vectores unidad de $c_0^* = \ell_1$), y no verifica i).

Si se nos permite una pequeña divagación a estas alturas, diríamos, en vista de lo anterior, que la hipótesis de II.2.23 a la que estamos refiriéndonos, debe ser alguna condición, al menos en el ambiente de los espacios de Banach con base *"shrinking"*, parecida a la PCP, pero que no la implica. Quizás otra condición, más débil que la regularidad fuerte, bajo la cual, las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman coinciden. Al menos, esa podría ser una de nuestras pretensiones futuras, aunque de momento no podamos hacer ninguna afirmación al respecto.

Sin embargo el interés que vemos en II.2.23 es que no impone ningún tipo de incondicionalidad a la base del espacio. Como ya dijimos en el primer capítulo, parece que las últimas aportaciones al problema de la equivalencia entre las propiedades de RNP y KMP, van por el camino de tener, en el espacio de Banach ambiente, algún tipo de base o descomposición a la que se le exige cierta forma de incondicionalidad, como se puede ver en los resultados de Schachermayer [50] y James [30].

El principal ejemplo que reúne las hipótesis de II.2.23, como no podía ser otro, es el espacio c_0, para el cual el resultado era conocido por Schachermayer, según dijimos en *I*.3.31, para cualquier espacio de Banach con base incondicional. (Resultado, el de Schachermayer, ni mucho menos trivial)

En la próxima sección se incluyen dos ejemplos más de espacios que verifican las hipótesis de II.2.23.

II.3 Ejemplos

Pretendemos dar ahora dos ejemplos más de espacios de Banach que verifican las hipótesis de II.2.23. Estos espacios no son de nueva construcción, sino que son bien conocidos. Los incluimos aquí para mostrar que II.2.23 es un resultado independiente de los ya mencionados, obtenidos por Schachermayer y James.

El espacio de James

Denotamos por J el espacio vectorial de las sucesiones de números reales, $\{x_n\}$ que verifican:

(i) $lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

(ii) $sup\{\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i} - x_{k_{i+1}})^2 + (x_{k_{n+1}} - x_{k_1})^2\}^{\frac{1}{2}} < +\infty$,

donde el supremo se toma sobre todo $n \in \mathbb{N}$ y toda sucesión finita y estrictamente creciente de naturales

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_{n+1}.$$

La norma de $\{x_n\}$, $\|\{x_n\}\|$, se define como dicho supremo. Mediante comprobaciones rutinarias, se obtiene que J es un espacio de Banach, llamado espacio de James, (ver [57, *Pag.* 80]).

Además, es fácilmente comprobable que la sucesión $\{e_n\}$, donde e_n es la sucesión que tiene un 1 en el lugar n, y 0 en el resto, es una base monótona y *"shrinking"* del espacio J.

Hemos de decir que el espacio de James es el primer espacio de Banach conocido que es isométrico a su bidual, pero que no es reflexivo. De ahí el interés de este espacio, que ha dado lugar a la construcción de nuevos espacios, que son contraejemplos a conjeturas abiertas durante mucho tiempo, como se mostrará en el siguiente ejemplo de esta sección.

Sin embargo, el único interés que nosotros tenemos por este espacio, en esta memoria, es verificar que satisface las hipótesis de II.2.23, como ya habíamos anunciado.

Si aplicamos II.1.3 al espacio J, que tiene una base *"shrinking"* y monótona, obtenemos que J^{**} es isométricamente isomorfo al espacio de las sucesiones de escalares $\{a_n\}$ con la norma

$$\|\{a_n\}\|_0 = \sup_m \{\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|\} =$$

$$= \sup_m (\sup\{\sum_{i=1}^{n} (a_{k_i} - a_{k_{i+1}})^2 + (a_{k_{n+1}} - a_{k_1})^2\}^{\frac{1}{2}}) < +\infty,$$

donde el segundo supremo se toma sobre cada $n \in \mathbb{N}$ y toda sucesión finita y estrictamente creciente de naturales

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_{n+1},$$

entendiendo que $a_{k_j} = 0$ siempre que $k_j > m$.

Además la ley que da el isomorfismo isométrico anterior es la identidad sobre J.

Nótese que si para una sucesión de escalares, el supremo anterior existe, dicha sucesión ha de ser convergente. En efecto, sea $\{a_n\}$ una tal sucesión, y supongamos que no es Cauchy. En tal caso debe existir $\varepsilon > 0$

de forma que para cada natural n existen $n \leq p < q \in \mathbb{N}$ verificando que $|a_p - a_q| \geq \varepsilon$. Entonces se puede construir una sucesión de naturales estrictamente creciente

$$p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots < p_n < q_n < p_{n+1} < q_{n+1} < \ldots,$$

de forma que $|a_{p_n} - a_{q_n}| \geq \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si ahora aplicamos la definición de $\| \|_0$ para la sucesión estrictamente creciente que acabamos de obtener se tiene que $\|\{a_n\}\|_0 \geq n\varepsilon^2\ \forall n \in \mathbb{N}$, lo que contradice claramente que $\{a_n\} \in J^{**}$.

En consecuencia, J^{**} queda perfectamente identificado con el espacio de las sucesiones de escalares (convergentes) para las que el supremo anterior es finito, con norma definida por dicho supremo.

Por último, basta observar que las normas del espacio J y de su bidual, coinciden sobre sucesiones con límite cero.

En definitiva, ha debido quedar claro que

$$\{x^{**} \in J^{**} : \lim_n x^{**}(f_n) = 0\} \subset J.$$

Así, J verifica todas las hipótesis de II.2.23, como dijimos.

Hemos de poner de manifiesto que J no tiene base incondicional. Es claro que J no contiene ni a c_0 ni a ℓ_1, puesto que J^{**} es separable (de hecho es isométrico a J, que es un espacio de Banach con base) y los biduales de c_0 y ℓ_1 no lo son. Basta aplicar ahora II.1.13, para obtener que J no tiene base incondicional.

Con todo, hemos de decir que la tesis de II.2.23 sí que era conocida para el espacio J, puesto que como J es isomorfo a un dual separable, J^{**}, de hecho J verifica las propiedades RNP y KMP.

El predual del espacio árbol de James

Sea

$$T = \{(n,i) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leq i < 2^n\}.$$

Ordenamos parcialmente el conjunto T, haciendo $(m,j) \geq (n,i)$ si $m \geq n$ y existen números enteros

$$i_0 = i, i_1, \ldots, i_k = j,\ k = m - n$$

verificando

$$i_1 \in \{2i, 2i+1\},\ i_2 \in \{2i_1, 2i_1+1\},\ \ldots,\ i_k \in \{2i_{k-1}, 2i_{k-1}+1\}.$$

Un conjunto de índices de la forma

$$\{(n,i), (n+1, i_1), \ldots, (m,j)\}$$

se llama un segmento.

Por una rama entenderemos un segmento infinito maximal. Esto es, un conjunto de índices de la forma

$$\{(0,0), (1,i_1), (2,i_2), \ldots, (n,i_n), \ldots\},$$

verificando que $i_k \in \{2i_{k-1}, 2i_{k-1}+1\}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

El espacio árbol de James, (ver [35], [58]) JT, es el espacio vectorial de las funciones definidas en T y con valores en $\mathbb{R}$ tales que

$$\sup\{\sum_{j=1}^{k}(\sum_{(n,i)\in S_j} x(n,i))^2\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

donde el supremo se toma sobre cualquier elección de segmentos disjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

Hemos de decir que el principal interés de este espacio, es el de ser un ejemplo, que muestra que no todo espacio separable que no contenga a ℓ_1 tiene dual separable, respondiendo negativamente a una conjetura bien conocida.

Sean $e_{n,i}$ los vectores unidad en JT, es decir los elementos definidos por $e_{n,i}(m,j) = \delta_{n,m}\delta_{i,j}$. Es rutinario probar que JT es un espacio de Banach y que $\{e_{n,i} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq i < 2^n\}$, con el orden lexicográfico $(e_{0,0}, e_{1,0}, e_{1,1}, \ldots, e_{n,0}, e_{n,1}, \ldots, e_{n,2^n-1}, e_{n+1,0}, \ldots)$, es una base normalizada y acotadamente completa de JT. Denotemos por $\{f_{n,i}\}$ los funcionales asociados a la base.

De II.1.5, se obtiene que JT es isométricamente isomorfo a B^*, donde B es el subespacio cerrado de JT^*, generado por $\{f_{n,i}\}$, funcionales asociados a la base de JT. Además $\|f_{n,i}\| = \|e_{n,i}\| = 1 \ \forall n, i$.

Así, si $x \in JT$, su expresión en función de la base es de la forma:

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} f_{n,i}(x) e_{n,i} \in JT.$$

Con el fin de verificar que el espacio de Banach B verifica las hipótesis de II.2.23, recordamos que en un trabajo de J. Lindenstrauss y C. Stegall [35], se define un operador $S : JT^* \to l_2(\Delta)$, mediante

$$S(x^*)(L) = \lim_{(n,i)\in L} x^*(e_{n,i}) \ \forall x^* \in JT^*, L \in \Delta,$$

donde Δ denota el conjunto de ramas de T.

Estos autores demuestran (Th. 1) que el núcleo del operador S coincide con B, y así, se obtiene que B es un espacio de Banach que verifica las hipótesis de II.2.23.

El hecho de que B no posee base incondicional es una consecuencia de II.1.13, ya que en [35, *Cor*.1], se demuestra que los duales, de cualquier orden, del espacio B no contienen ni a c_0 ni a ℓ_1.

Quisiéramos por último, poner de manifiesto que el espacio de Banach B no verifica las hipótesis de un resultado de R.C. James [30], en el que se obtiene una nueva respuesta parcial afirmativa al problema de la equivalencia entre las propiedades de Radon-Nikodym y Krein-Milman.

Para esto, antes de enunciar dicho resultado, recordamos brevemente un concepto que debería estar enmarcado en el siguiente capítulo, pero que necesitamos en este momento, el de descomposición básica, finito-dimensional, *"skipped blocking"*, e incondicional (UBSBFDD). (Ver [47], Section 2)

Se dice que un espacio de Banach X tiene una descomposición finito dimensional, (FDD), si existe una sucesión de subespacios de dimensión finita, $\{E_n\}$, de forma que cada vector $x \in X$ tiene una única expresión del tipo:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n, e_n \in E_n \; \forall n \in \mathbb{N},$$

donde la convergencia de la serie es en la topología de la norma. Cuando dicha convergencia es incondicional, se dice que la descomposición es incondicional.

Sea ahora, $\{G_n\}$ una sucesión de subespacios finito-dimensionales de

X.

Si $\{H_j\}$ es una sucesión de subespacios de X, dicha sucesión es llamada un *"skipped-blocking"* de $\{G_n\}$ si existen sucesiones de naturales $\{m_k\}, \{n_k\}$ con $m_k < n_k + 1 < m_{k+1}$ y

$$H_k = lin\{G_i : m_k \leq i \leq n_k\} \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por último, $\{G_n\}$ es una UBSBFDD de X si el subespacio generado por $\{G_n\}$ es denso en X y cada *"skipped-blocking"* de $\{G_n\}$ es una FDD incondicional del subespacio cerrado de X que generan.

El resultado de James, al que hacíamos mención anteriormente, es el siguiente:

Teorema II.3.25 .[30, *Th.* 1.2] *Sea X un espacio de Banach con una UBSBFDD. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la RNP.

(ii) X tiene la KMP.

(iii) X tiene la PCP.

(iv) X tiene la CPCP.

(v) X no contiene subespacios isomorfos a c_0.

Además, James demuestra también la equivalencia entre la RNP y la KMP para cada subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de cualquier espacio de Banach con una UBSBFDD, [30, *Th.* 1.5].

Nótese que como cada espacio con base incondicional tiene una UBS-BFDD, el resultado anterior extiende al de Schachermayer para espacios con base incondicional.

Como ya dijimos, el espacio de Banach B no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0. Pero, el espacio B no satisface la propiedad de Radon-Nikodym, como muestra el siguiente resultado, obtenido por Lindenstrauss y Stegall: [35, *Cor.A*].

Teorema II.3.26 . *Los espacios duales* $B^{(2k+1)*}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *tienen la RNP, mientras que* $B^{(2k)*}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *no tienen la RNP.*

Entonces, II.3.25 nos dice que el espacio B no puede tener una UBS-BFDD.

De esta forma, II.2.23 es un resultado independiente de II.3.25.

Capítulo III

LA PROPIEDAD DEL PUNTO DE CONTINUIDAD EN ESPACIOS DE BANACH CON UNA DESCOMPOSICION FINITO-DIMENSIONAL.

Tras el estudio, en el capítulo anterior, de la propiedad del punto de continuidad en espacios de Banach con base Schauder, pretendemos en el presente capítulo, hacer un estudio similar de dicha propiedad en espacios de Banach más generales, espacios con una descomposición de Schauder finito-dimensional. Obtenemos así, una condición suficiente sobre los subespacios con base Schauder, para que un espacio de Banach tenga la PCP. También demostramos, en el ambiente de los espacios de Asplund, que la PCP está determinada por los subespacios con base Schauder "shrinking".

La primera respuesta al problema de si la PCP (resp. RNP) está determinada por los subespacios con base, es la obtenida por J. Bourgain, quien demuestra en [5] que las propiedades del punto de continuidad y de Radon-Nikodym están determinadas por los subespacios con una descomposición de Schauder finito-dimensional.

El mismo autor pone de manifiesto la importancia de obtener una caracterización de la RNP (resp. PCP) para espacios de Banach con una tal descomposición, en términos de la propia descomposición.

En esta dirección, cabe destacar el trabajo de J. Bourgain y H. Rosenthal [7] en el que se dan condiciones suficientes sobre la descomposición para que el espacio tenga la PCP (resp. RNP). En concreto, ellos demuestran que si un espacio de Banach posee una tal descomposición del tipo *"skipped blocking"* acotadamente completa, entonces dicho espacio tiene PCP, mientras que si la descomposición es del tipo l_1- *"skipped blocking"*, el espacio tiene la RNP. Asímismo, estos autores dan ejemplos de espacios de Banach con una descomposición del tipo *"skipped blocking"* acotadamente completa que no tienen la RNP.

Nuestra más inmediata pretensión, en este momento, es trasladar los resultados fundamentales del capítulo anterior al ambiente de espacios de Banach con una descomposición de Schauder, finito-dimensional, para trabajar en el sentido propuesto por J. Bourgain. El primer paso será obtener el enunciado de II.2.18 en el ambiente de los espacios de Banach con una descomposición finito-dimensional, cuya demostracion será idéntica a la que presentamos en el capítulo anterior, salvo un nuevo ingrediente del que hablaremos enseguida, el de base con paréntesis, quedando así II.2.18 como caso particular. Como aplicación obtendremos condiciones suficientes sobre los subespacios con base de un espacio de Banach cualquiera, para que éste tenga la PCP.

Con este objetivo, y para la mejor comprensión de los resultados mencionados anteriormente, y de los que obtendremos nosotros más adelante, parece oportuno adentrarse en la teoría de descomposiciones finito-dimensionales en espacios de Banach, que pasamos a estudiar en la siguiente sección.

III.1 Descomposiciones de Schauder finito-dimensionales

La mayoría de los resultados básicos de esta sección se pueden encontrar en [52]. El resto serán referenciados convenientemente.

Empecemos recordando que si X es un espacio de Banach y $\{E_n\}$ es una sucesión de subespacios finito-dimensionales no nulos de X, se dice que $\{E_n\}$ es una descomposición de Schauder finito-dimensional (FDD) del espacio X, si cada vector $x \in X$ se puede expresar de forma única mediante una expresión del tipo:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n,$$

donde $e_n \in E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y la convergencia de la serie es en la topología de la norma del espacio X.

Equivalentemente, existe una constante positiva K, llamada constante de la descomposición, de forma que

$$\|\sum_{n=1}^{p} e_n\| \leq K\|\sum_{n=1}^{p+q} e_n\|,$$

para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$, y $e_n \in E_n$ $\forall n \in \{1, \ldots, p+q\}$.

Al igual que sucedía con las bases, diremos que la descomposición es monótona si $K = 1$, cosa que siempre se puede conseguir renormando equivalentemente el espacio.

Es natural definir entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n : X \to \sum_{i=1}^{n} E_n$, mediante

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

donde $x = \sum_{i=1}^{+\infty} e_i$.

De esta forma, $\{u_n\}$ es una sucesión de proyecciones lineales, que llamaremos sucesión de proyecciones asociadas a la descomposición, y continuas de rango finito verificando que $lim_n u_n(x) = x$ $\forall x \in X$. Además, dicha sucesión está uniformemente acotada por la constante de la descomposición.

El ejemplo más sencillo de FDD es una base de Schauder de un espacio de Banach. En este caso los subespacios que forman la descomposición son 1-dimensionales.

Es conocido que existen espacios de Banach con una FDD sin base, [55], y espacios separables que no poseen ninguna FDD, [19]. En cualquier caso, la existencia de una FDD implica la separabilidad del espacio, como ocurría con la existencia de una base.

Pasamos ahora a hacer un breve recorrido por los conceptos y resultados conocidos en el ambiente de las bases, que sean trasladables a este nuevo marco.

Definición III.1.1 . *Sea X un espacio de Banach con una FDD y sucesión de proyecciones asociadas $\{u_n\}$. Se dice que la FDD es* "shrinking" *si $lim_n\|u_n^*(x^*) - x^*\| = 0\ \forall x^* \in X^*$.*

Es claro que en el caso de FDD *"shrinking"* lo que se tiene es otra FDD en el espacio dual, dada por la sucesión $\{u_n^*\}$.

Otro tipo de FDD, en algún sentido dual del de *"shrinking"* es el siguiente.

Definición III.1.2. *Sea X un espacio de Banach con una FDD $\{E_n\}$. Dicha descomposición es acotadamente completa, si para cada sucesión en X, $\{x_n\}$, con $x_n \in E_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$sup_n\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| < +\infty,$$

se verifica que la serie $\sum_{i\geq 1} x_i$ converge en la topología de la norma en X.

La relación entre estos dos conceptos se muestra en los siguientes resultados análogos a los presentados para bases, en la primera sección del capítulo anterior.

Teorema III.1.3 . *Sea X un espacio de Banach. Entonces X tiene una FDD* "shrinking" *si, y sólo si, X^* tiene una FDD acotadamente completa.*

Teorema III.1.4. *Sea X un espacio de Banach con una FDD. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, la descomposición es, a la vez,* "shrinking" *y acotadamente completa.*

Aunque no todo espacio posea una FDD, ni aún los separables, [19], la abundancia de espacios con una FDD se pone de manifiesto ahora.

Teorema III.1.5. *Sea X un espacio de Banach separable con $dim(X) = +\infty$. Entonces existe un subespacio Y de X tal que tanto Y como X/Y tienen una FDD. Además, si X^* es separable, Y puede elegirse para que tanto Y como X/Y tengan una FDD* "shrinking".

Merece la pena observar que si $\{E_n\}$ es una FDD de un espacio de Banach X, y para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $e_n \in E_n \setminus \{0\}$, entonces $\{e_n\}$ es una sucesión básica de X, que hereda las propiedades de la descomposición. Así, si por ejemplo la descomposición es *"shrinking"*, acotadamente completa, etc, entonces la sucesión básica es *"shrinking"*, acotadamente completa, etc, como se recoge a continuación.

Proposición III.1.6. *Sea $\{E_n\}$ una FDD de un espacio de Banach X y $\{e_n\} \subset X \setminus \{0\}$ de forma que $e_n \in E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{e_n\}$ es una sucesión básica de X. Además,*

(i) Si $\{E_n\}$ es "shrinking", *entonces $\{e_n\}$ es* "shrinking".

(ii) Si $\{E_n\}$ es acotadamente completa, entonces $\{e_n\}$ es acotadamente completa.

Demostración. Por ser $\{E_n\}$ una FDD se tiene, por definición, que existe $K \geq 1$ tal que

$$\|\sum_{n=1}^{p} v_n\| \leq K\|\sum_{n=1}^{p+q} v_n\|,$$

para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$, y $v_n \in E_n$ $\forall n \in \{1, \ldots, p+q\}$.

En consecuencia,

$$\|\sum_{n=1}^{p} \lambda_n e_n\| \leq K\|\sum_{n=1}^{p+q} \lambda_n e_n\|,$$

para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$, y $e_n \in E_n$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ $\forall n \in \{1, \ldots, p+q\}$, y $\{e_n\}$ es una sucesión básica.

(i) Supongamos que $\{E_n\}$ es *"shrinking"* y sea $\{u_n\}$ la sucesión de proyecciones asociada. Es decir,

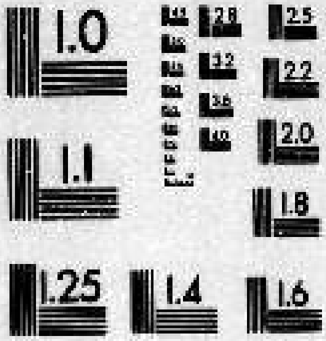
$$u_n : X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} E_i,\ u_n(\sum_{i=1}^{+\infty} v_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Por definición de *"shrinking"* tenemos que

$$lim_n\|u_n(x^*) - x^*\| = 0,\ \forall x^* \in X^*.$$

Sea F_n el subespacio generado por $\{e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x^* \in X^*$, se tiene que

$$\|x^*_{|F_n}\| = \|(u_n^*(x^*) - x^*)_{|F_n}\| \leq$$


1.0
2.8
2.5
3.2
2.2
3.6
4.0
2.0
1.1
1.8
1.25
1.4
1.6

Demostración. Por ser $\{E_n\}$ una FDD se tiene, por definición, que existe $K \geq 1$ tal que

$$\|\sum_{n=1}^{p} v_n\| \leq K \|\sum_{n=1}^{p+q} v_n\|,$$

para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$, y $v_n \in E_n$ $\forall n \in \{1, \ldots, p+q\}$.

En consecuencia,

$$\|\sum_{n=1}^{p} \lambda_n e_n\| \leq K \|\sum_{n=1}^{p+q} \lambda_n e_n\|,$$

para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$, y $e_n \in E_n$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ $\forall n \in \{1, \ldots, p+q\}$, y $\{e_n\}$ es una sucesión básica.

(i) Supongamos que $\{E_n\}$ es *"shrinking"* y sea $\{u_n\}$ la sucesión de proyecciones asociada. Es decir,

$$u_n : X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} E_i, \; u_n(\sum_{i=1}^{+\infty} v_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Por definición de *"shrinking"* tenemos que

$$lim_n\|u_n(x^*) - x^*\| = 0, \; \forall x^* \in X^*.$$

Sea F_n el subespacio generado por $\{e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x^* \in X^*$, se tiene que

$$\|x^*_{|F_n}\| = \|(u_n^*(x^*) - x^*)_{|F_n}\| \leq$$

$$\leq \|u_n^*(x^*) - x^*\| \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Así, $\{e_n\}$ es *"shrinking"*, por II.1.2.

(ii) Supongamos ahora que $\{E_n\}$ es acotadamente completa. Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de escalares verificando

$$sup_n \| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \| < +\infty,$$

haciendo, $v_k = \lambda_k e_k$, tenemos por hipótesis que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge en la topología de la norma en X, por hipótesis y, así, $\{e_n\}$ es acotadamente completa. ∎

Otro concepto que recordábamos en el ambiente de las bases era el de incondicional, que es perfectamente trasladable al nuevo ambiente.

Definición III.1.7. *Sea X un espacio de Banach con una FDD $\{E_n\}$. Se dice que la descomposición es incondicional si la expresión de cada vector $x \in X$, en términos de la FDD es una serie incondicionalmente convergente en X.*

El concepto de FDD incondicional, al contrario que los anteriores, no aporta nada nuevo en este ambiente, como se muestra a continuación.

Teorema III.1.8. *Sea X un espacio de Banach con una FDD incondicional. Entonces X es isomorfo a un subespacio de un espacio de Banach con una base incondicional.*

Sin embargo, R.C. James introduce en [30] un nuevo concepto de descomposición, en cierto sentido incondicional, que se mostró al final del capítulo anterior y que volvemos a presentar aquí porque pensamos que es su marco adecuado.

Definición III.1.9. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita en un espacio de Banach X. Si $\{H_j\}$ es una sucesión de subespacios de X, dicha sucesión es llamada un* "skipped-blocking" *de $\{E_n\}$ si existen sucesiones de naturales $\{m_k\}, \{n_k\}$ con $m_k < n_k + 1 < m_{k+1}$ y*

$$H_k = lin\{E_i : m_k \leq i \leq n_k\} \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por último, $\{E_n\}$ es una UBSBFDD de X si el subespacio generado por $\{E_n\}$ es denso en X y cada "skipped-blocking" *de $\{E_n\}$ es una FDD incondicional del subespacio cerrado que genera.*

En contra de lo que parecen indicar las siglas UBSBFDD, el concepto recién definido es una descomposición que no tiene por qué ser una FDD, como muestra el propio James en [30]. Esta pequeña minucia, junto con el hecho de que en dicho trabajo, aparezca la definición de *"skipped-blocking"* bastante confusa, hace el ya de por sí difícil trabajo de leer a R. C. James, una tarea casi imposible.

En palabras de R.C. James, [30], la hipótesis de que un espacio de Banach posea una base incondicional es bastante restrictiva, porque en este caso, como ya pusimos de manifiesto en la primera sección del capítulo anterior, dicho espacio o bien es reflexivo, o contiene a l_1 o contiene a c_0.

El concepto de UBSBFDD, al contrario del de FDD incondicional, no fuerza que cada espacio con una UBSBFDD sea isomorfo a un subespacio de un espacio de Banach con una base incondicional.

Presentamos por último, dos tipos más de descomposiciones dadas por J. Bourgain y H. Rosenthal en [7], a las que ya hicimos referencia al inicio de este capítulo.

Definición III.1.10. *Sea X un espacio de Banach con una FDD $\{E_n\}$. Se dice que dicha descomposición es una l_1-FDD si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|\sum_{i=1}^{n} e_i\| \geq \delta \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|,$$

para cada sucesión finita de elementos de X, $\{e_i\}$ tales que $e_i \in E_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición III.1.11. *Sea X un espacio de Banach y $\{E_n\}$ una sucesión de subespacios finito-dimensionales de X.*

(i) $\{E_n\}$ *es una* l_1-"skipped blocking" *FDD de X si cada* "skipped blocking" *de* $\{E_n\}$ *es una l_1-FDD.*

(ii) $\{E_n\}$ *es una* "skipped blocking" *acotadamente completa FDD de X si cada* "skipped blocking" *de* $\{E_n\}$ *es una FDD acotadamente completa.*

Queremos, por último, en esta sección, mostrar un nuevo punto de vista de las FDD, quizá menos conocido del desarrollado hasta ahora, pero más útil para nuestros propósitos posteriores. Dicho concepto aparece en [52] y demostramos ahora las propiedades que nos serán de utilidad.

Definición III.1.12 . *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de vectores no nulos de un espacio de Banach X y $\{m_n\}$ una sucesión estrictamente creciente de naturales. Se dice que $\{x_n\}$ es una base con paréntesis, respecto de $\{m_n\}$, de X, si existe una sucesión $\{f_n\} \subset X^*$ tal que:*

(i) $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

(ii) $lim_n\|x - \sum_{i=1}^{m_n} f_i(x)x_i\| = 0$ $\forall x \in X$.

Aparentemente, el concepto que acabamos de definir no es más que otra posible generalización del concepto de base. Desde luego toda base es una base con paréntesis. Esta semejanza se pone más de manifiesto en la siguiente caracterización de las bases con paréntesis.

Proposición III.1.13. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión linealmente independiente en un espacio de Banach X tal que $\overline{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$. Entonces son equivalentes:*

(i) *$\{x_n\}$ es una base con paréntesis de X, respecto de $\{m_n\}$.*

(ii) *Existe $K \in [1, +\infty[$ tal que*

$$\|\sum_{j=1}^{m_n} \beta_j x_j\| \leq K \|\sum_{j=1}^{m_{n+p}} \beta_j x_j\|,$$

para cualesquiera $n, p \in \mathbb{N}$ y $\beta_1, \ldots, \beta_{n+p} \in \mathbb{K}$.

Demostración. Sea $\{m_n\}$ una sucesión de enteros positivos estrictamente creciente y denotemos por $\bar{c}(X)$ el espacio de Banach de las sucesiones de elementos de X, $\{z(n)\}_n \subset X$, tales que $\{z(m_n)\}_n$ converge en X y $z(k) = 0$ si $k \neq m_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dotando a dicho espacio con la norma

$$\|z\| = sup\{\|z(n)\| : n \in \mathbb{N}\} \ \forall z \in \bar{c}(X).$$

Definamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ $T_n : \bar{c}(X) \to X$, mediante $T_n(z) = z(n)$ $\forall z \in \bar{c}(X)$. Entonces $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores lineales y continuos.

Consideramos ahora el espacio

$$Z = \{z \in \bar{c}(X) : T_{m_1}(z) \in E_1,\ T_{m_{n+1}}(z) - T_{m_n}(z) \in E_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

donde $E_1 = lin\{x_1, \ldots, x_{m_1}\}$ y $E_{n+1} = lin\{x_{m_n+1}, \ldots, x_{m_{n+1}}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Es claro que Z es un subespacio vectorial cerrado de $\bar{c}(X)$ debido a la linealidad y continuidad de los operadores $\{T_n\}$.

Sea, ahora $S : Z \to X = \overline{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ el operador definido por

$$S(z) = lim_n T_{m_n}(z) = lim_n z(m_n) \ \forall z \in Z.$$

Tenemos entonces que S es un operador lineal y continuo cuya imagen coincide con el conjunto de elementos $x \in X$ tales que admiten una expresión del tipo

$$x = lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k x_k,$$

para ciertos escalares $\{\lambda_k\}$.

Entonces, resulta que $\{x_n\}$ es una base con paréntesis de X si, y sólo si, S es una biyección.

i)$\Rightarrow$ii) Supongamos que $\{x_n\}$ es una base con paréntesis de X respecto de $\{m_n\}$ con funcionales asociados $\{f_n\}$. Como acabamos de decir, S es entonces una biyección lineal y continua de Z en X y el teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que su inversa también es continua.

Sea $x = lim_n \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k x_k \in X$. Entonces

$$S^{-1}(x)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \{m_k : k \in \mathbb{N}\} \\ \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_k x_k & \text{si } n = m_j \end{cases}$$

y así obtenemos que $\{P_n\}$ es una sucesión de proyecciones lineales y continuas con

$$sup\{\|P_n\|; n \in \mathbb{N}\} \leq \|S^{-1}\|,$$

donde $P_n : X \to X$, $P_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} f_k(x) x_k$.

Así, haciendo $K = \|S^{-1}\|$, se tiene la desigualdad que buscábamos ya que

$$\|\sum_{j=1}^{m_n} \beta_j x_j\| = \|P_n(\sum_{j=1}^{m_{n+p}} \beta_j x_j\| \leq$$

$$\leq \|P_n\|\|\sum_{j=1}^{m_{n+p}} \beta_j x_j\| \leq K\|\sum_{j=1}^{m_{n+p}} \beta_j x_j\|.$$

ii)$\Rightarrow$i) Supongamos ii). Entonces tenemos que

$$\|z(m_n)\| \leq K\|z(m_{n+p})\| \ \forall z \in Z, \ n, p \in \mathbb{N}.$$

Tomando límites en $p \to +\infty$ con n fijo:

$$\|z(m_n)\| \leq K\|S(z)\|.$$

Tomando ahora supremos en n:

$$\|z\| \leq K\|S(z)\| \ \forall z \in Z.$$

Así, S es un isomorfismo sobre su imagen y como, claramente la sucesión $\{x_n\}$ está en la imagen de S obtenemos que S es un isomorfismo de Z sobre X y, por tanto, $\{x_n\}$ es una base con paréntesis de X, respecto de $\{m_n\}$. ∎

Mostramos ahora que los conceptos de FDD y base con paréntesis son el mismo.

Proposición III.1.14. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes:*

(i) $\{x_n\}$ es una base con paréntesis de X, respecto de $\{m_n\}$.

(ii) $\{x_n\}$ es una sucesión linealmente independiente y la sucesión de subespacios $\{G_n\}$ es una FDD de X, donde para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$G_n = lin\{x_i : m_{n-1} + 1 \leq i \leq m_n\}, \ m_0 = 0.$$

Demostración. (i)⇒(ii): Para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ hagamos

$$s_{m_n}(x) = \sum_{i=1}^{m_n} f_i(x)x_i,$$

donde $\{f_n\}$ es la sucesión de funcionales de la base con paréntesis.

Entonces $y_n(x) = s_{m_n}(x) - s_{m_{n-1}}(x) \in G_n\ \forall x \in X,\ n \in \mathbb{N}$, donde $s_0 = 0$. Además
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x)\ \forall x \in X.$$
Supongamos que existe $x \in X$ y otra sucesión $\{z_n\} \subset X$, con $z_n \in G_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, tal que
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$
Entonces, como $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$, se tiene que

$f_k(z_n) = f_k(x)\ \forall m_{n-1} + 1 \leq k \leq m_n$ y $f_k(z_n) = 0$ en otro caso.

Así, $f_k(z_n) = f_k(y_n(x))\ \forall k, n \in \mathbb{N}$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n, y_n(x) \in G_n$ y $dim(G_n) < +\infty$, obtenemos que $z_n = y_n(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ y, por tanto $\{G_n\}$ es una FDD de X. ∎

(ii)⇒(i): Como $\{x_n\}$ es linealmente independiente, se tiene que $\{x_i : m_{n-1} + 1 \leq i \leq m_n\}$ es una base de $G_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\{\phi_i\}$ a la sucesión de funcionales asociados.

Hagamos ahora $f_i = \phi_i \circ v_n$, siendo n el único natural de forma que $m_{n-1} + 1 \leq i \leq m_n$ y donde para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \in X$, con $y_n \in G_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) = y_n$.

Ahora se obtiene fácilmente que $\{x_n\}$ es una base con paréntesis de X, con funcionales asociados $\{f_n\}$. ∎

A partir de este momento, cada vez que aparezca una FDD, se tiene también una base con paréntesis asociada. Asimismo, los distintos tipos de FDD, definidos en esta sección revierten en distintos tipos de bases con paréntesis, en el sentido de que se dirá que una base con paréntesis es de un cierto tipo, cuando la FDD que genera sea del mismo tipo. Así, diremos que una base con paréntesis es *"shrinking"*, cuando la FDD que genera sea también *"shrinking"*. En este punto merece la pena observar, que el hecho de que una base con paréntesis sea *"shrinking"* tiene una traducción en términos de sus funcionales asociados que recuerda la analogía con las bases, como se muestra ahora.

Proposición III.1.15. *Sea X un espacio de Banach con una base con paréntesis $\{x_n\}$, respecto de $\{m_n\}$, y funcionales asociados $\{f_n\}$. Entonces, la base $\{x_n\}$ es* "shrinking" *si, y sólo si,* $\overline{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = X^*$.

Demostración. Si $\{x_n\}$ es *"shrinking"*, según III.1.14 tenemos una FDD $\{E_n\}$ con sucesión de proyecciones asociadas $\{u_n\}$ que por III.1.1 verifica:

$$lim_n \|u_n^*(x^*) - x^*\| = 0 \; \forall x^* \in X^*.$$

Se puede comprobar fácilmente que:

$$u_n^*(x^*) = \sum_{k=1}^{m_n} x^*(x_k) f_k \; \forall x^* \in X^*.$$

Así, $x^* = lim_n \sum_{k=1}^{m_n} x^*(x_k) f_k \; \forall x^* \in X^*$ y se concluye que

$$\overline{lin\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} = X^*.$$

Recíprocamente, si $\overline{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = X^*$ basta observar, como ocurre con las bases de Schauder, que $\{f_n\}$ es una base con paréntesis del subespacio de X^* que generan, es decir, de X^*. Una lectura de la demostración de III.1.14 nos da que

$$lim_n \|u_n^*(x^*) - x^*\| = 0 \; \forall x^* \in X^*,$$

donde $\{u_n\}$ es la sucesión de proyecciones de la FDD asociada a $\{x_n\}$. Entonces $\{x_n\}$ es *"shrinking"*, por III.1.1. ∎

El tema de las descomposiciones finito-dimensionales surge como una generalización del concepto de base Schauder. Si uno lee, por ejemplo, el texto de I. Singer [52], es muy fácil perderse en la cantidad de generalizaciones del concepto de base, distintas de la de descomposición finito-dimensional, que se pueden encontrar. Sin embargo, la generalización que más frutos ha dado ha sido la de descomposición finito-dimensional, aparte de ser la más sencilla de todas. Por poner un ejemplo, que creemos de importancia, recuérdese que W. T. Gowers probó en [27] la existencia de espacios de Banach que no contienen sucesiones básicas infinitas *"shrinking"*. Sin embargo, todo espacio que no contenga subespacios isomorfos a l_1 contiene sucesiones básicas infinitas con límite débil cero, como puede verse en el trabajo de E. Odell, H. P. Rosenthal y Th. Schlumprecht [42], en el que los autores ponen de manifiesto el estudio de las FDD para la consecución de dicho resultado.

III.2 Resultados principales

Nos encaminamos, en esta sección, a extender parte de los resultados obtenidos en el capítulo anterior al ambiente de descomposiciones finito dimensionales de Schauder, o equivalentemente al ambiente de bases con paréntesis, obteniendo así una caracterización de la PCP para algunos espacios de Banach en dicho ambiente. De esta caracterización, esperamos aplicaciones relacionadas con el problema de la determinación de la PCP por los subespacios con base.

En lo que sigue, X denotará un espacio de Banach con una base con paréntesis $\{e_n\}$, respecto $\{m_n\}$, y con funcionales asociados $\{f_n\}$. Supondremos que $\|e_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, cosa que siempre se puede conseguir.

Sea Γ, como en el capítulo anterior, el conjunto de las sucesiones finitas de enteros positivos, con el orden definido allí, y $\phi : \Gamma \to \mathbb{N}$ una biyección que conserva el orden.

Construimos ahora una familia de subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de X.

Para cada $\alpha \in \Gamma$, sea $x_\alpha = \sum_{\gamma \leq \alpha} e_{\phi(\gamma)} \in \Gamma$ y $f_\alpha = f_{\phi(\alpha)}$. Entonces

$$\begin{aligned} f_\gamma(x_\alpha) &= 1 \quad \text{si } \gamma \leq \alpha, \\ f_\gamma(x_\alpha) &= 0 \quad \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

Haciendo $A = \overline{co}\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, obtenemos un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X.

Además, si $\{v_n\}$ es una sucesión básica de X, la misma construcción anterior nos da un nuevo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de

X, que denotaremos $\Lambda_{\{v_n\}}$, para que no haya confusión con la sucesión básica utilizada.

Así, tenemos construida una familia de subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de X, que, al igual que en el capítulo anterior, no siempre son acotados.

Presentamos ahora el resultado que nos va a permitir obtener la caracterización de la PCP en espacios de Banach con una FDD *"shrinking"*. El principal ingrediente para este resultado es el concepto de bases con paréntesis ya presentado, y su demostración es similar a la de II.2.18. De hecho, el teorema II.2.18 es un caso particular del que mostramos a continuación.

Teorema III.2.16. *Sea X un espacio de Banach con una FDD y sea K un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de X sin la PCP. Entonces existen $\{v_n\}$ sucesión básica de X, con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, Y subespacio cerrado con base de X, F subconjunto de K, con $F \subset Y$ y un isomorfismo sobre su imagen $T : Y \to X$, tales que*

$$T(F) = \Lambda_{\{v_n\}}.$$

Demostración. Denotemos por $\{G_n\}$ a la FDD y por $\{e_n\}$ a la base con paréntesis asociada, que supondremos sin pérdida de generalidad monótona y normalizada. Por último sea $\{f_n\}$ la sucesión de funcionales asociados a la base con paréntesis.

Por II.2.17 podemos encontrar un subconjunto no vacío A de K y un número real positivo δ de forma que cada entorno, en la topología débil, de todo punto de A, relativo a A, tiene diámetro mayor o igual que δ.

Veamos que existe un subconjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ de A, tal que $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión básica de X, donde

$$u_1 = a_1,\ u_j = a_j - a_{\phi(\phi^{-1}(j)-)}\ \forall j > 1,$$

y $\alpha- = (\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1})$ si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma \setminus \{0\}$, $n > 1$, $\alpha- = 0$ en otro caso.

Para esto, sea $\varepsilon_j = \delta 4^{-(j+1)}\ \forall j \in \mathbb{N}$ y construyamos, inductivamente, $k_0 = 0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots \in \mathbb{N}$, $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots \in X$ tales que

$$\|u_j\| > \frac{\delta}{2},\ \|v_j - u_j\| < \varepsilon_j, v_j \in lin\{e_i : k_{j-1} < i \leq k_j\}\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Una vez conseguido esto, $\{u_j\}$ será una sucesión básica equivalente a $\{v_j\}$ por II.1.9, tal y como hicimos en II.2.18.

Sabemos que el diámetro de A es, como poco, δ y, por tanto, debe existir $a_1 \in A$ tal que $\|a_1\| > \frac{\delta}{2}$.

Sea $k_1 \in \mathbb{N}$ con $\|a_{1|(k_1,+\infty)}\| < \varepsilon_1$, donde

$$a_{1|(k_1,+\infty)} = a_1 - \sum_{j=1}^{k_1} f_j(a_1)e_j.$$

(La existencia de k_1 se debe a que $a_1 = lim_n \sum_{j=1}^{m_n} f_j(a_1)e_j$.)

Definamos, ahora, $v_1 = a_{1|[1,k_1]}$, es decir

$$v_1 = \sum_{j=1}^{k_1} f_j(a_1)e_j.$$

Inductivamente, supongamos que $n \geq 1$ y que $a_1, \ldots, a_n, k_n$ ya han sido construidos.

Hagamos $i = \phi(\phi^{-1}(n+1)-)$, $\alpha = \phi^{-1}(n+1)-$, $\beta = \phi^{-1}(n+1)$. Entonces $\alpha < \beta$ y, por tanto, $i < n+1$ porque ϕ conserva el orden. Así, a_i ha sido ya construido.

Sea $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$ y

$$V = \{a \in A : |f_j(a_i - a)| < \frac{\varepsilon}{k_n},\ 1 \leq j \leq k_n\}.$$

Entonces V es un entorno, para la topología débil, de a_i, relativo a A y, en consecuencia, el diámetro de V es, al menos, δ. Por tanto, debe existir $a_{n+1} \in V$ tal que $\|a_{n+1} - a_i\| > \frac{\delta}{2}$ y $u_{n+1} = a_{n+1} - a_i$.

Si ahora, elegimos $k_{n+1} > k_n$ para que $\|u_{n+1|(k_{n+1},+\infty)}\| < \varepsilon$ y hacemos

$$v_{n+1} = u_{n+1|(k_n,k_{n+1}]},$$

tendremos que $\|u_{n+1}\| > \frac{\delta}{2}$ y que $\|u_{n+1} - v_{n+1}\| \leq$

$$\leq \|u_{n+1} - \sum_{j=1}^{k_{n+1}} f_j(u_{n+1})e_j\| + \|\sum_{j=1}^{k_{n+1}} f_j(u_{n+1})e_j - \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} f_j(u_{n+1})e_j\| =$$

$$= \|u_{n+1|(k_{n+1},+\infty)}\| + \|\sum_{j=1}^{k_n} f_j(u_{n+1})e_j\| <$$

$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{k_n} \frac{\varepsilon}{k_n} = 2\varepsilon = \varepsilon_{n+1},$$

donde hemos utilizado en la última desigualdad la definición de V y u_{n+1}. Se completa así la construcción inductivamente.

La sucesión $\{k_n\}$ define una nueva base con paréntesis y, por tanto, una nueva FDD, ya que $\{k_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es claro, entonces que, $\{v_n\}$ es una sucesión básica.

Definamos $F = \overline{co}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \overline{lin}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y

$$\overline{u}_\alpha = u_{\phi(\alpha)},\ \overline{a}_\alpha = a_{\phi(\alpha)},\ \overline{v}_\alpha = v_{\phi(\alpha)}\ \forall \alpha \in \Gamma.$$

Por la construcción anterior debe existir un isomorfismo sobre su imagen $T : Y \to X$ con $T(\overline{u}_\alpha) = \overline{v}_\alpha\ \forall \alpha \in \Gamma$.

Por definición, $\overline{u}_0 = \overline{a}_0$ y $\overline{u}_\alpha = \overline{a}_\alpha - \overline{a}_{\alpha^-}\ \forall \alpha \neq 0$.

Entonces $\overline{a}_\alpha = \sum_{\gamma \leq \alpha} \overline{u}_\gamma\ \forall \alpha \in \Gamma$ y, así $F \subset Y$.

Además, $T(\overline{a}_\alpha) = \sum_{\gamma \leq \alpha} T(\overline{u}_\gamma) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \overline{v}_\gamma$.

Pero nosotros tenemos, previamente construido, el conjunto $A_{\{v_n\}}$ y, por definición $T(F) = A_{\{v_n\}}$ y $F \subset \overline{co}(A) \subset K$, lo que completa la demostración. ∎

Al igual que sucedía en el capítulo anterior, III.2.16 no deja de ser más que una condición suficiente para que un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio de Banach con una FDD tenga la PCP. Para obtener una total caracterización habría que comprobar que los subconjuntos de la forma $A_{\{v_n\}}$ no verifican la PCP y, eso en general es falso, puesto que en cualquier espacio de Banach con una FDD, digamos l_1, con la PCP, dichos conjuntos tienen la PCP. No hemos podido, sin embargo, saber si en los espacios de Banach con una FDD y sin la PCP, dichos conjuntos no tienen esta propiedad.

No obstante, si exigimos algo adicional a la FDD del espacio, la condición suficiente, recién obtenida, resulta también necesaria, como mostramos en las siguientes consecuencias, cuyas demostraciones omitimos, por ser iguales a las presentadas en el capítulo anterior.

Corolario III.2.17 . *Con las mismas hipótesis y notaciones que en el teorema III.2.16, si suponemos que la FDD es* "shrinking", *entonces* $\Lambda_{\{v_n\}}$ *no verifica la PCP.*

Corolario III.2.18.

(i) Sea X un espacio de Banach con una FDD. Si X no tiene la PCP, entonces existe una sucesión básica en X, $\{v_n\}$, tal que $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$ y $\Lambda_{\{v_n\}}$ está acotado.

(ii) Sea X un espacio de Banach con una FDD "shrinking" *$\{G_n\}$. Si existe una sucesión básica de X, $\{v_n\}$, $v_n \in G_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$ y $\Lambda_{\{v_n\}}$ está acotado, entonces X no verifica la PCP.*

Corolario III.2.19. *Sea X un espacio de Banach con una FDD $\{G_n\}$, y supongamos que ésta es* "shrinking". *Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) El conjunto $\{\sum_{\gamma\leq\alpha} v_\gamma : \alpha \in \Gamma\}$ es no acotado, para cada sucesión básica de X, $\{v_n\}$, $v_n \in G_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, donde $v_\alpha = v_{\phi(\alpha)}$ $\forall \alpha \in \Gamma$.

Obtenida ya la caracterización anunciada, pretendemos ahora aplicarla al problema de la determinación de la PCP por los subespacios con base, propuesto por J. Bourgain, y al que ya nos hemos referido en algunas ocasiones. Conviene por ello recordar los resultados conocidos hasta el momento.

Como hemos dicho J. Bourgain, en [5] propone el problema y demuestra el siguiente hecho.

Teorema III.2.20. *Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la RNP.

(ii) Cada subespacio con una FDD de X tiene la RNP.

Bourgain divide la demostración ii)⇒i) de este teorema en dos partes. En la primera de ellas se supone que el espacio de Banach no tiene la PCP, y en la segunda se supone que sí.

Una ligera modificación de la demostración de la primera parte de la demostración permite demostrar el siguiente resultado, que en la literatura no se encuentra específicamente escrito, pero sí totalmente aceptado, como puede verse en [7, $Th.$ 1].

Teorema III.2.21. *Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) Cada subespacio con una FDD de X tiene la PCP.

En el camino de tratar de caracterizar las propiedades del punto de continuidad y de Radon-Nikodym en el ambiente de espacios de Banach con algún tipo de descomposición finito-dimensional, y en términos de dicha descomposición, cabe destacar el siguiente resultado de J. Bourgain y H. P. Rosenthal que puede verse en [7] y que como los propios autores indican son sólo condiciones suficientes y no necesarias para tener la PCP o la RNP.

Teorema III.2.22.

(i) Los espacios de Banach con una FDD "skipped blocking" *acotadamente completa tienen la PCP.*

(ii) Los espacios de Banach con una l_1-"skipped blocking" *FDD tienen la RNP.*

Por otro lado, Ghoussoub y Maurey, en [23] dan la siguiente respuesta parcial al problema.

Teorema III.2.23. *Sea X un espacio de Banach que no contiene subespacios isomorfos a l_1. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) Cada subespacio con base de X tiene la PCP.

Nuestra pretensión en estos momentos es obtener una aplicación, en relación con este problema, de los resultados expuestos anteriormente.

Para ello, necesitamos introducir primero, un nuevo concepto.

Definición III.2.24. *Sea X un espacio de Banach con base Schauder $\{e_n\}$ y funcionales asociados $\{f_n\}$. Llamaremos topología débil de la base en X, y la notaremos $w_{\{e_n\}}$, a la topología débil en X definida por $\sigma(X, \overline{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Es decir, dicha topología es la inicial en X para la familia de elementos de X^*, $\overline{lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nótese que la topología débil de la base es una topología localmente convexa y separada en X, menos fina que la débil en X. Asímismo, si la base de la que se parte es *"shrinking"*, es claro que la topología débil de la base en X no es más que la topología débil. Por ejemplo, si en c_0 se considera la base usual, la topología débil de la base en c_0 es su topología débil, mientras que si se hace igual en l_1 aparece la topología w^*.

La primera aplicación que presentamos consigue una condición suficiente, en términos de los subespacios con base, para que un espacio de Banach cualquiera tenga la PCP. Esta aplicación hace que el enunciado de III.2.16 sea imprescindible en esta memoria, ya que el siguiente resultado no es consecuencia de II.2.18.

Proposición III.2.25. *Sea X un espacio de Banach y supongamos que cada subespacio con base de X tiene la PCP, respecto de la topología débil de la base. Entonces X tiene la PCP.*

Demostración. Supongamos que X no tiene la PCP. Por III.2.21 sabemos que existe un subespacio Z de X con una FDD que tampoco verifica la PCP. Si ahora aplicamos el teorema III.2.16 obtenemos una sucesión básica $\{v_n\}$ de Z de forma que $A_{(v_n)}$ no tiene la PCP respecto de la topología débil de la base $\{v_n\}$, argumentando como en II.2.19. Así, encontramos un subespacio de X con base que carece de la PCP, respecto de la topología débil de la base, contradiciendo la hipótesis de partida. ∎

Si tenemos ahora en cuenta que la topología débil de la base no es más que la topología débil, cuando la base de la que partimos es *"shrinking"*, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema III.2.26 . *Sea X un espacio de Banach con una FDD y supongamos que ésta es* "shrinking" $\{G_n\}$. *Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) Cada subespacio con base de X tiene la PCP.

(iii) Cada subespacio con base "shrinking" *de X tiene la PCP.*

Demostración. Las implicaciones i)⇒ii) y ii)⇒iii) son claras.

iii)⇒i): Supongamos que X no tiene la PCP. Aplicando III.2.16 se obtiene un subespacio de X, Z, con base, sin PCP, por III.2.17. Además dicha base $\{e_n\}$ es *"shrinking"* por serlo $\{G_n\}$ y por la construcción realizada en la demostración de III.2.16, contradiciendo así la hipótesis de partida. ∎

La equivalencia entre i) y ii), en el resultado anterior no es nueva, puesto que un espacio con dual separable, como es el caso de un espacio con una FDD *"shrinking"*, está en las hipótesis del teorema III.2.23 y, por tanto, dicha equivalencia era ya conocida.

Sin embargo, la equivalencia entre i) y iii), del resultado anterior, sí que es novedosa. A nuestro juicio, esta novedad es interesante, por cuanto pone de manifiesto que quizá hay una clase de espacios de Banach, mayor que la clase de espacios con una FDD *"shrinking"*, para los que la PCP, y posiblemente la RNP, esté determinada no sólo por los subespacios con base, sino incluso por los subespacios con un tipo especial de base, como puede ser *"shrinking"* o alguna otra más específica.

Fue así como llegamos a plantearnos el siguiente problema:

¿*Está* la propiedad del punto de continuidad determinada por los subespacios con base *"shrinking"*?

W. T. Gowers muestra en [27] un espacio de Banach que no posee sucesiones básicas infinitas *"shrinking"*, lo que pone de manifiesto que la anterior pregunta no está bien formulada. Por cierto, el interés de dicho espacio no acaba aquí, sino que es también un ejemplo de espacio que no contiene c_0 ni l_1 ni subespacios reflexivos de dimensión infinita.

En consecuencia, para replantear coherentemente el problema, debemos asegurarnos la existencia de una clase amplia de espacios de Banach que contengan sucesiones básicas infinitas *"shrinking"*. Como se puede ver en [34, *Prop.*1.*b*.13] todo espacio de Banach con dual separable contiene sucesiones básicas infinitas *"shrinking"*. *Así*, tiene perfecto sentido plantearse si la PCP está determinada por los subespacios con base *"shrinking"*, al menos en el ambiente de los espacios de Banach con dual separable.

Por otro lado, M. Zippin demuestra en [59] que todo espacio de Banach con dual separable es isomorfo a un subespacio de un espacio de

Banach con base *"shrinking"*.

En este momento estamos ya en disposición de obtener el siguiente resultado.

Teorema III.2.27. *Sea X un espacio de Banach con dual separable. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) Cada subespacio con base de X tiene la PCP.

(iii) Cada subespacio con base "shrinking" *de X tiene la PCP.*

Demostración. Las implicaciones i)⇒ii) y ii)⇒iii) son claras.

Hagamos iii)⇒i). Supongamos, por reducción al absurdo que X no verifica la PCP. Entonces B_X no verifica la PCP. Según el trabajo de M. Zippin, [59], podemos encontrar un espacio de Banach con base *"shrinking"*, Z y un isomorfismo sobre su imagen $G : X \to Z$. Tenemos ahora un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío, $G(B_X)$, sin la PCP, en un espacio de Banach con base *"shrinking"*, Z. Aplicando el teorema II.2.18, obtenemos un bloque básico, $\{v_n\}$ de la base de Z, $F \subset G(B_X)$, Y subespacio cerrado de Z con $F \subset Y$ y $T : Y \to Z$ un isomorfismo sobre su imagen, tales que

$$T(F) = \Lambda_{\{v_n\}}.$$

Además, por el corolario II.2.19, $\Lambda_{\{v_n\}}$ no tiene la PCP. Entonces, F tampoco verifica la PCP.

Recordemos, por último, que según la demostración de II.2.18, Y es un espacio de Banach con base *"shrinking"* generado por elementos de $G(B_X)$, que carece de la PCP. Por tanto, $G^{-1}(Y)$ es un subespacio de X con base *"shrinking"* y sin la PCP, contradiciendo así iii). ∎

Con el fin de ampliar aún más la clase de los espacios de Banach en los que la **PCP** está determinada por los subespacios con base *"shrinking"*, necesitamos en este momento recordar un concepto que hasta el momento no ha aparecido.

Definición III.2.28. *Sea X un espacio de Banach. Se dice que X es un espacio de Asplund si cada función continua, definida en un subconjunto abierto, convexo y no vacío de X, C, es diferenciable en un subconjunto denso, para la topología de la norma, en C.*

Aunque en esta memoria no se va a entrar en el estudio de los espacios de Asplund, creemos que no necesitan mucha presentación. La teoría de espacios de Asplund se encuentra recogida en los libros de G. Godefroy, R. Deville y V. Zizler [25], R. R. Phelps [44] y J. Diestel [14]. Uno de los resultados más importantes, por lo que de aclarador ha tenido en este tema, es el de C. Stegall [54], que además nos va a ser de utilidad en esta memoria.

C. Stegall demuestra en [54] el siguiente resultado.

Teorema III.2.29. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es un espacio de Asplund si, y sólo si, X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Recordemos que un espacio de Banach X es tal que X^* tiene la RNP si, y sólo si, cada subespacio separable de X tiene dual separable, según dijimos en el teorema I.3.24.

Como decíamos, gracias a los teoremas III.2.27 y III.2.29, vamos a poder ampliar más la clase de los espacios de Banach en los que la PCP está determinada por los subespacios con base *"shrinking"*, según muestra el siguiente resultado.

Teorema III.2.30. *Sea X un espacio de Asplund. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) Cada subespacio con base de X tiene la PCP.

(iii) Cada subespacio con base "shrinking" *de X tiene la PCP.*

Demostración. Las implicaciones i)⇒ii) y ii)⇒iii) son claras.

Hagamos iii)⇒i). Supongamos, por reducción al absurdo, que X no verifica la PCP. Como la PCP está determinada por los subespacios separables, de hecho por los subespacios con una FDD, III.2.21, debe existir Y subespacio separable de X sin la PCP. Ahora, por III.2.29 y I.3.24, sabemos que Y^* es separable. Por tanto, Y es un espacio de Banach con dual separable sin la PCP. Si aplicamos III.2.27, obtenemos un subespacio con base *"shrinking"* de Y, y por tanto de X, que no tiene la PCP, contradiciendo iii). ∎

Por último, y como colofón de esta memoria, podemos ahora obtener las caracterizaciones globales de la PCP, presentadas anteriormente en el ambiente, más general de los espacios de Asplund.

Teorema III.2.31. *Sea X un espacio de Asplund sin la PCP. Entonces, existen $\{v_n\}$, sucesión básica* "shrinking" *en X con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, Y subespacio cerrado de X, F subconjunto de B_X con $F \subset Y$ y $T : Y \to X$ isomorfismo sobre su imagen, tales que*

$$T(F) = \Lambda_{\{v_n\}}.$$

Además $\Lambda_{\{v_n\}}$ tampoco tiene la PCP.

Demostración. En una primera etapa, supongamos que X^* es separable. Utilizando el resultado de M. Zippin [59], existe Z espacio de Banach con base *"shrinking"* de forma que X es isomorfo a un subespacio de Z. Basta ahora aplicar II.2.18 de la misma forma a como lo hicimos en III.2.27 para obtener lo que se quiere.

Si ahora X es un espacio de Asplund cualquiera sin la PCP, como sabemos que la PCP está separablemente determinada III.2.21, podemos encontrar un subespacio separable H de X sin la PCP. Pero, por ser X Asplund, H^* es separable, con lo que estamos en las condiciones de la primera etapa de la demostración: H es un espacio de Banach con dual separable sin la PCP. ∎

Corolario III.2.32. *Sea X un espacio de Asplund. Entonces son equivalentes:*

(i) X tiene la PCP.

(ii) El conjunto $\{\sum_{\gamma\leq\alpha} v_\gamma : \alpha \in \Gamma\}$ es no acotado para cada sucesión básica "shrinking" *de X $\{v_n\}$, con $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, donde para cada $\gamma \in \Gamma$, $v_\gamma = v_{\phi(\gamma)}$.*

Demostración. i)⇒ii). Si existiese una sucesión básica *"shrinking"* de X, $\{v_n\}$, tal que el conjunto

$$\{\sum_{\gamma\leq\alpha} v_\gamma : \alpha \in \Gamma\}$$

es acotado, obtendríamos que $\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ es un subconjunto cerrado y acotado de X sin la PCP, como hicimos en II.2.19, contradiciendo i).

ii)⇒i). Si X no verificase la PCP, utilizando el resultado anterior, obtendríamos una sucesión básica *"shrinking"* de X que contradiría ii). ∎

Nótese que, a diferencia del resultado anterior, en el teorema III.2.16 se obtiene una condición suficiente para que un espacio de Banach con una FDD tenga la PCP, sin necesidad de exigir que dicho espacio tenga dual separable ni que sea Asplund.

Esta es la diferencia sustancial entre los resultados presentados para espacios de Asplund y el teorema III.2.16.

Bibliografía.

1. S. Argyros, E. Odell and H. Rosenthal. *On certain convex subsets of* c_0. Lecture Notes in Math. 1332. Berlín 1988, (80-111).

2. E. Asplund and I. Namioka. *A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem*. Bull. of the A. M. S. 73. 1967, (443-445).

3. H. Bauer. *Probability Theory And Elements of Measure Theory*. Academic Press. London, 1981.

4. S. K. Berberian. *Measure and Integration*. Chelsea. New York, 1965.

5. J. Bourgain. *Dentability and finite-dimensional decompositions*. Studia Math. T.LXVII. 1980, (135-148).

6. J. Bourgain. *La propriété de Radon-Nikodym*. Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie, 36. 1979.

7. J. Bourgain and H. Rosenthal. *Geometrical implications of certain finite-dimensional decompositions*. Bull. Soc. Math. Belg. 32. 1987, (57-82).

8. J. Bourgain et M. Talagrand. *Dans un espace réticulé, la propriété de Krein-Milman et celle de Radon-Nikodym sont équivalentes.* Proc. of the A. M. S. 81. 1981, (93-96).

9. R. D. Bourgin. *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property.* Lecture Notes in Math. 993. Berlin 1983.

10. V. Caselles. *A short proof of the equivalence of KMP and RNP in Banach lattices and preduals of von Neumann algebras.* Proc. of the A. M. S. 102. 1988, (973-974).

11. S. D. Chartteji. *Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces.* Math. Scand. 22. 1968, (21-41).

12. J. A. Clarkson. *Uniformly convex spaces.* Trans. of the A. M. S. 40. 1936.

13. W. J. Davis and R. R. Phelps. *The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces.* Proc. of the A. M. S. 45. 1974, (119-122).

14. J. Diestel. *Geometry of Banach spaces. Selected topics.* Lecture Notes in Math. 485. Springer-Verlag 1975.

15. J. Diestel and J. J. Uhl Jr. *Vector measures.* Mathematical Surveys, 15. A. M. S, 1977.

16. N. Dunford and M. Morse. *Remarks on the preceding paper of James A. Clarkson.* Trans. of the A. M. S. 40. 1936.

17. N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory.* John Wiley and Sons. New York, 1988.

18. N. Dunford and B. J. Pettis. *Linear operations on summable functions.* Trans. of the A. M. S. 47. 1940. (323-392).

19. P. Enflo. *A counterexample to the approximation property in Banach spaces.* Acta Math. 130. 1973, (309-317).

20. N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey and W. Schachermayer. *Some topological and geometrical structures in Banach spaces.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1987.

21. N. Ghoussoub and B. Maurey. *G_δ-Embeddings in Hilbert spaces I.* J. Funct. Anal, 61. 1985, (72-97).

22. N. Ghoussoub and B. Maurey. *H_δ−embeddings in Hilbert space and optimization on G_δ−sets.* Mem. of the A. M. S. Vol. 62, 349. 1986.

23. N. Ghoussoub and B. Maurey. *G_δ-Embeddings in Hilbert spaces II.* J. Funct. Anal, 78. 1988, (271-305).

24. N. Ghoussoub, B. Maurey and W. Schachermayer. *A counterexample to a problem on points of continuity in Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 99. 1987, (278-282).

25. G. Godefroy, R. Deville and V. Zizler. *Smoothness and renormings in Banach spaces.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 61. 1993.

26. W. T. Gowers and B. Maurey. *The unconditional basic sequence problem.* J. of Amer. Math. Soc. 6. 1993, (851-874).

27. W. T. Gowers. *A space not containing* c_0, l_1 *or a reflexive subspace.* Preprint.

28. P. R. Halmos. *Measure Theory.* Van Nostrand. New York, 1950.

29. R. E. Huff. *Dentability and the Radon-Nikodym property.* Duke Math. J. 41. 1974, (111-114).

30. R. C. James. *Some interesting Banach spaces.* Rocky Mountain Journal of Math. 23, 3. 1993, (911-937).

31. G. Jameson. *Topology and normed spaces.* Chapman and Hall. London, 1974.

32. M. Krein and D. Milman. *On extreme points of regular convex sets.* Studia Math. 9. 1940, (133-138).

33. Bor-Luh Lin, Pei-Kee Lin and S. L. Troyanski. *Characterizations of denting points.* Proc. of the A. M. S. 102. 1988, (526-528).

34. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces I.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 92. Springer-Verlag 1977.

35. J. Lindenstrauss and C. Stegall. *Examples of separable spaces which do not contain* l_1 *and whose duals are not separable.* Studia Math. T. 54. 1975, (81-105).

36. G. López and J. F. Mena. *Point of Continuity Property and Schauder bases.* Aceptado para su publicación en Rocky Mountain Journal of Math.

37. G. López and J. F. Mena. *RNP and KMP are equivalent for some Banach spaces with shrinking basis.* Studia Math. T. 118. 1996, (11-17).

38. G. López. *RNP and KMP are incomparable properties in noncomplete spaces.* Sometido a publicación.

39. G. López and J. F. Mena. *The Point of Continuity Property in some Banach spaces with a basis.* Comunicación presentada en el Workshop FAMA 95, *"Functional Analysis: Methods and applications."* Cosenza. Italia, 1995. Aceptado para su publicación en los Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo.

40. P. W. McCartney and R. C. O'Brien. *A separable Banach space with the Radon-Nikodym property that is not isomorphic to a subspace of a separable dual.* Proc. of the A. M. S. 78. 1980, (40-42).

41. H. B. Maynard. *A geometrical characterization of Banach spaces having the Radon-Nikodym property.* Trans. of the A. M. S. 185. 1973, (493-500).

42. E. Odell, H. P. Rosenthal y Th. Schlumprecht. *On weakly null FDD's in Banach spaces.* Israel J. of Math. 84. 1993, (333-351).

43. R. R. Phelps. *Dentability and extreme points in Banach spaces.* J. Functional Analysis 17. 1974, (78-90).

44. R. R. Phelps. *Convex functions, monotone operators and differentiability.* Lecture Notes in Math. 1364. Springer-Verlag 1989. Second Edition 1993.

45. A. Pelczynski. *A note on the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces".* Studia Math. 21. 1962, (371-374).

46. M. A. Rieffel. *Dentable subsets of Banach spaces, with application to a Radon-Nikodym theorem.* Proc. Conf. Irvine. California. Academic Press. 1967, (71-77).

47. H. Rosenthal and Alan Wessel. *The Krein-Milman property and a martingale coordinatization of certain non dentable convex sets.* Pacific. J. of Math. Vol. 136, 1. 1989, (159-182).

48. W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* Mc Graw-Hill. New York, 1966.

49. W Schachermayer. *For a Banach space isomorphic to its square the Radon-Nikodym property and the Krein-Milman property are equivalent.* Studia Math. 81. 1985, (329-339).

50. W. Schachermayer. *The Radon-Nikodym property and the Krein-Milman property are equivalent for strongly regular sets.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 303, 2. 1987, (673-687).

51. I. Singer. *Bases in Banach spaces I.* Editura Academiei Republicii Socialiste Rômania. Springer-Verlag, 1970.

52. I. Singer. *Bases in Banach spaces II.* Editura Academiei Republicii Socialiste Rômania. Springer-Verlag, 1981.

53. C. Stegall. *The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces.* Trans of the A. M. S. 206. 1975, (213-223).

54. C. Stegall. *The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nikodym property.* Israel J. of Math. 29. 1978, (408-412).

55. S. J. Szarek. *A Banach space without a basis which has the bounded approximation property.* Acta Mathematica. 159. 1987, (81-98).

56. M. Valdivia. *Análisis Matemático V.* Unidades didácticas 4-5-6. U.N.E.D. Madrid, 1979.

57. D. Van Dulst. *Reflexive and superreflexive Banach spaces.* Mathematical Centre Tracts 102. Amsterdam 1978.

58. D. Van Dulst. *Characterizations of Banach spaces not containing l_1.* C.W.I. Tracts. Amsterdam 1989.

59. M. Zippin. *Banach spaces with separable duals.* Trans. of the A. M. S. 1. 1988, (371-379).