SEMINARIO DE APLICACIONES

Ginés López

Ampliación del concepto de función

El primer objetivo de este seminario será convencernos de la necesidad de ampliar el concepto de función que todos conocemos, como aplicación entre dos conjuntos. Para esto, empezaremos proponiendo un problema concreto, que nos servirá de motivación más tarde.

Queremos estudiar el movimiento de un móvil ascendente verticalmente que alcanza una altura predeterminada $h > 0$ en un tiempo dado $T > 0$, con el mínimo gasto de combustible. El movimiento $x(t)$ del móvil viene dado por la ecuación

$$mx''(t) = F(t) - mg, \; x(0) = 0, \; x'(0) = 0,$$

donde m es la masa del móvil, que suponemos constante, mg es la acción de la gravedad y F es la fuerza impulsora del móvil. Por comodidad elegimos unidades físicas para que $m = g = 1$. Así la ecuación que govierna el movimiento es:

$$x''(t) = F(t) - 1, \; x(0) = 0, \; x'(0) = 0.$$

Queremos encontrar una fuerza F de forma que la energía consumida sea la mínima posible. Entonces queremos minimizar la cantidad $\int_0^T |F(t)|dt$ de forma que F verifique la ecuación anterior y $x(T) = h$.

A partir de este momento fijamos la altura $h > 0$ y el tiempo $T > 0$ y queremos encontrar una función $F : [0, T] \to \mathbb{R}$ a ser posible continua, pero como mínimo en $L_1[0, 1]$ de forma que haga mínima la cantidad $\int_0^T |F(t)|dt$ y verifique la ecuación

$$x''(t) = F(t) - 1, \; \forall t \in [0, T],$$

con $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ y $x(T) = h$.

Integrando entre 0 y t dos veces en la ecuación y aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene tras hacer $t = T$:

$$\int_0^T (T - t)|F(t)|dt = h + \frac{T^2}{2}$$

Por tanto nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Existe $F_0 \in L_1[0,1]$ verificando

$$\int_0^T |F_0(t)|dt = \min_{F \in Y} \int_0^T |F(t)|dt?,$$

donde se define

$$Y = \{F \in L_1[0,1] : \int_0^T |F(t)|dt = h + \frac{T^2}{2}\}$$

La sorpresa va a ser que tal F_0 no existe. Veámoslo.

Definamos $\Phi(F) = \int_0^T (T-t)F(t)dt \ \forall F \in L_1[0,1]$. Es claro que $\Phi \in L_1[0,1]^*$ con $\|\Phi\| = T$ y que $Y = \Phi^{-1}(h + \frac{T^2}{2})$. Por tanto, Y es un hiperplano afín y podemos calcular la distancia del origen al hiperplano:

$$\inf_{F \in Y} \int_0^T |F(t)|dt = \frac{h}{T} + \frac{T}{2}$$

Supongamos que nuestro problema tuviese solución y que existiese esa tal F_0. Tendríamos entonces:

$$\int_0^T |F_0(t)|dt = \frac{h}{T} + \frac{T}{2} = \int_0^T \frac{(T-t)}{T} F_0(t)dt \leq$$
$$\leq \int_0^T \frac{(T-t)}{T} |F_0(t)|dt \leq \int_0^T |F_0(t)|dt$$

De donde deducimos que

$$\int_0^T (1 - \frac{(T-t)}{T})|F_0(t)|dt = 0$$

Entonces ha de ser F_0 nula casi por doquier en $[0,T]$, lo que nos dice que $h = T = 0$, ya que $F_0 \in Y$.

El mismo argumento es válido cambiando $L_1[0,1]$ por $C[0,1]$, ya que las funciones continuas son densas en L_1. (Siempre utilizamos la norma de L_1)

En resumen, nuestro problema no tiene solución si queremos entender ésta como una función continua, ni tampoco integrable que es lo mínimo que podemos exigir si queremos expresar la energía. Replanteemos ahora nuestro problema.

Si F es una función continua, podemos ver a F como un elemento de $C[0,T]^*$ que lleva cada elemento $f \in C[0,1]$ en la integral $\int_0^T fF$. Además la norma de tal funcional es $\int_0^T |F(t)|dt$. (Ahora estamos utilizando la norma de $C[0,1]$)

El siguiente problema extiende entonces al que nos habíamos planteado. ¿Existe $F_1 \in C[0,T]^*$ verificando

$$\|F_1\| = \min_{F \in Y} \|F\|?,$$

donde ahora $Y = \{F \in C[0,T]^* : F(w) = h + \frac{T^2}{2}\}$ y w es la función continua en $[0,T]$ dada por $w(t) = T - t$.

Resolvamos el problema recién planteado, que ahora tendrá solución gracias esencialmente al teorema de Hahn-Banach.

Dicho teorema nos asegura la existencia de un funcional $F_0 \in C[0,T]^*$ con $F_0(w) = h + \frac{T^2}{2}$. Obsérvese que $\inf_{F \in Y} \|F\| = \inf_{F \in Y} \|(F_0 - F) - F_0\|$. Hagamos $L =< w >$, el subespacio generado por w. Entonces $\inf_{F \in Y} \|F\|$ no es más que la distancia de F_0 al conjunto $L^0 = \{F_0 - F : F \in Y\}$ que es cerrado para la topología w^*. Por tanto dicha distancia se alcanza, lo que nos da la existencia de solución a nuestro problema F. Además la mínima energía será $\|F\|$ que se puede calcular evaluando F sobre un elemento de la esfera de L. Definamos la función u_0 continua en $[0,T]$ dada por $u_0(t) = \frac{T-t}{T}$ que claramente está en la esfera de L. Se tendrá entonces que la energía buscada es $\|F\| = F(u_0) = \frac{h}{T} + \frac{T}{2}$.

Vayamos ahora al cálculo de la solución. El conjunto de todas las posibles soluciones es

$$K = \{\Phi \in \|F\| B_{C[0,T]^*} : \Phi(u_0) = \|F\|\}$$

Es claro que K es una cara convexa y w^* compacta de $\|F\| B_{C[0,1]^*}$. Aplicando el teorema de Krein-Milman tenemos que K ha de ser la envolvente convexa y w^* cerrada de los puntos extremos de $\|F\| B_{C[0,1]^*}$ que se quedan en K. No es difícil calcular el conjunto de puntos extremos E de $B_{C[0,1]^*}$. En efecto $E = \{\delta_t : t \in [0,1]\}$ donde para cada t se define $\delta_t(f) = f(t)$ para cada función continua f. Tenemos entonces que los puntos extremos de $\|F\| B_{C[0,1]^*}$ serán de la forma $\|F\| \delta_t$.

En resumen, sabemos que el conjunto de soluciones de nuestro problema es la envolvente convexa y w^* cerrada de la intersección de los conjuntos $\{\|F\| \delta_t : t \in [0,1]\}$ y K. Puesto que la función u_0 alcanza su máximo sólo en el punto 0, deducimos que $K = \{\|F\| \delta_0\}$. En definitiva, obtenemos que nuestro problema tiene solución única con fuerza propulsora $F = (\frac{h}{T} + \frac{T}{2})\delta_0$ con un consumo de energía $\frac{h}{T} + \frac{T}{2}$. El cálculo del tiempo T es ahora inmediato. Derivando la expresión $\frac{h}{T} + \frac{T}{2}$ respecto de T e igualando a cero se tiene que $T = \sqrt{2h}$.

Parace oportuno hacer una interpretación de lo que hemos obtenido. La expresión de la energía y del tiempo no son más que cantidades, pero la expresión de la fuerza propulsora representa un impulso instantáneo en el instante inicial del movimiento. La "función" delta de Dirac, que alguna vez se habrá oído, es la representación matemática de ese impulso instantáneo y no es una función.

En vista de este problema que acabamos de resolver, ha de quedar clara la necesidad de trabajar con objetos matemáticos que no sean funciones, sino algo más general.

Noción de distribución

Vista ya la necesidad de ampliar el concepto de función, parece claro a juzgar por el problema ya visto que ese nuevo objeto ha de ser un funcional definido sobre algún espacio vectorial y con valores escalares. Si f es una función la idea es ver a f como un funcional definido sobre alguna clase de funciones test que lleva a cada función test ϕ en la integral $\int f\phi$. Queremos también poder derivar este nuevo objeto. Si suponemos que las funciones test que vamos a utilizar tienen soporte compacto (se anulan fuera de un compacto) y son suficientemente regulares, la fórmula de integración por partes nos dice que $\int f^{k)}\phi = (-1)^k \int f\phi^{k)}$ igualdad que nos permite ver a la función derivada k-ésima de f sin conocer dicha derivada, como el funcional que lleva cada función test ϕ en la integral $(-1)^k \int f\phi^{k)}$.

Pasemos a dar ahora las definiciones formales, motivadas por lo dicho anteriormente.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$. Un *multiíndice* es una N-upla de naturales o cero $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Llamaremos $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio vectorial de las funciones indefinidamente diferenciables con soporte compacto definidas sobre Ω, llamado espacio de funciones test. También denotamos

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\ldots\partial^{\alpha_N} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Llamaremos *distribución* o *función generalizada* en Ω a un funcional lineal definido sobre el espacio de funciones test $\mathcal{D}(\Omega)$.

Si Λ es una distribución se define la derivada parcial $(D^\alpha\Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\phi)$ para cada función test ϕ. De esta forma podemos derivar distribuciones, pero también funciones que no sean derivables en sentido clásico: Si f es una función localmente integrable, podemos ver a f como la distribución Λ_f que lleva cada función test ϕ en la integral $\int f\phi$ y esta distribución tiene una derivada que puede ser considerada como la derivada débil de f, sólo que en general dicha derivada no será una función sino una distribución.

Con estas nociones podemos ya a pasar a dar aplicaciones interesantes

El principio de mínima acción

Desde el punto de vista físico se dice que la naturaleza sigue el principio de mínima acción o mínima energía, en el sentido de que las partículas se mueven de forma que se consuma la mínima energía posible. Pretendemos aquí precisar esto desde el punto de vista matemático, diciendo que dados dos puntos de una superficie existe una curva de mínima longitud en la superficie uniendo dichos puntos, es decir una geodésica. Pero pretendemos que las palabras superficie, energía o longitud se utilicen en el sentido más amplio posible, así que pasamos a definir algunos conceptos.

Sea M un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$. Una curva continua $\gamma : [0,1] \to M$ se dirá rectificable si su derivada distribucional γ' es una función de $L_1[0,1]$. En tal caso se define la longitud de γ mediante

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(s)|ds$$

Definimos también la energía de la curva γ cuando la derivada distribucional γ' sea una función de $L_2[0,1]$ mediante:

$$E(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt$$

El enunciado del principio de mínima acción en un ambiente general es el siguiente

Teorema.- Sean M un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$ y $x \neq y \in M$. Supongamos que existe γ curva rectificable en M uniendo los puntos x, y, esto es, $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Entonces existe $\bar{\gamma}$ curva rectificable en M uniendo los puntos x, y, verificando que $L(\bar{\gamma}) \leq L(\gamma)$ para cualquier otra curva γ en M uniendo los puntos x, y. Es decir $\bar{\gamma}$ es una geodésica en M uniendo x, y.

Esquema de la demostración: Consideremos el conjunto

$$B = \{f \in L_2[0,1] : \gamma_f(s) := x + \int_0^s f(t)dt \in M \ \forall s \in [0,1], \ \gamma_f(1) = y\}$$

Para cada $s \in [0,1]$ la aplicación lineal de $L_2[0,1]$ en $\mathbb{R}^N$ dada por: $f \to \int_0^s f(t)dt$ es débilmente continua y, por tanto, B es débilmente cerrado, ya que M es cerrado. Además la aplicación $\bar{E}$ definida sobre B mediante $\bar{E}(f) = E(\gamma_f)$ es débilmente semicontinua inferiormente. Como el conjunto $\{f \in B : \bar{E}(f) \leq \alpha\}$ es acotado para cada escalar α, tenemos que $\bar{E}$ alcanza mínimo en B en cuanto veamos que B es no vacío.

Para cada γ curva rectificable en M uniendo x, y consideremos la aplicación $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$T(s) = L(\gamma)^{-1} \int_0^s |\gamma'(t)|dt \ \forall s \in [0,1].$$

Es claro que T es una aplicación absolutamente continua y sobreyectiva, por tanto cerrada. Además $T(s_1) = T(s_2)$ si, y sólo si, la curva γ es constante en el intervalo formado por s_1 y s_2. Obtenemos entonces una curva continua en M, γ^* de forma que $\gamma^*(T(s)) = \gamma(s)$ para cada s. La curva γ no es más, entonces, que una reparametrización de γ^*, con lo que un sencillo cambio de variable permite ver que $L(\gamma^*) = L(\gamma)$.

Según la última igualdad y la definición de T tenemos que

$$\int_0^{T(s)} |(\gamma^*)'(t)|dt = T(s)L(\gamma);$$

lo que nos dice que $|\gamma^*| = L(\gamma)$. Tenemos entonces la no vaciedad de B tomando $f = (\gamma^*)'$.

Para cualquier curva γ en M rectificable uniendo x, y tenemos las desigualdades

$$E(\gamma) \geq L(\gamma)^2 = L(\gamma^*)^2 = E(\gamma^*)$$

Si consideramos ahora $f_0 \in B$ donde $\bar{E}$ alcanza el mínimo y hacemos $\gamma_0 = \gamma_{f_0}$, tenemos gracias a las desigualdades anteriores que $E(\gamma_0) = E(\gamma_0^*)$.

Finalmente tenemos que

$$L(\gamma_0) = L(\gamma_0^*) = E(\gamma_0^*)^{\frac{1}{2}} \leq E(\gamma^*)^{\frac{1}{2}} = L(\gamma^*) = L(\gamma)$$

para cada γ curva rectificable en M uniendo x, y. Basta tomar entonces $\bar{\gamma} = \gamma_0^*$.

Obsérvese que la última curva obtenida tiene módulo de la derivada constante casi por doquier.

Solución de algunas ecuaciones en derivadas parciales

Pretendemos presentar ahora un célebre teorema que da existencia de solución a cualquier ecuación en derivadas parciales lineal con coeficientes constantes. No parece necesario poner de manifiesto ahora el interés que tienen las ecuaciones diferenciales en el mundo de ciencia.

Empecemos planteando el problema. Sea P un polinomio de n variables con coeficientes complejos no nulo que denotaremos en la forma:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum c_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

Se define el operador diferencial asociado a P mediante: $P(D) = \sum c_\alpha D^\alpha$, donde α es un multiíndice.

Una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes responde a la forma $P(D)u = v$, donde $P(D)$ es un operador diferencial asociado a un polinomio no nulo P, v es una función dada y u es la función solución a buscar.

El siguiente resultado es una versión simplificada del conocido teorema de Ehrenpreis-Malgrange, válido para $\mathbb{R}^n$.

Teorema.- Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $v \in L_2(\Omega)$ y $P(D)$ un operador diferencial. Entonces existe $u \in L_2(\Omega)$ tal que $P(D)u = v$, donde las derivadas de la función u han de ser entendidas en el sentido distribucional.

Antes de demostrar este teorema, recogemos una generalización de la desigualdad de Poincaré que ya debe ser conocida a estas alturas.

Desigualdad de Hormander.- Si $P(D)$ es un operador diferencial no nulo, entonces para cada abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ existe $C > 0$ tal que

$$\|P(D)\phi\| \geq C\|\phi\| \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Demostración del teorema: El hecho de que u sea solución de la ecuación significa que

$$< u, \phi > = < u, P(D)^* \phi > \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $P(D)^*$ denota el operador adjunto de $P(D)$ que es lineal y continuo en $\mathcal{D}(\Omega) \subset L_2$.

La desigualdad de Hormander, junto con el hecho de que los operadores diferenciales con coeficientes constantes conmutan, nos dice que $\|P(D)^* \phi\| \geq C\|\phi\|$, para algún $C > 0$. Consideremos ahora el siguiente subespacio de L_2:

$$E = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \psi = P(D)^* \phi \text{ para } \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$$

La última desigualdad obtenida muestra que la aplicación de E en el cuerpo complejo dada por: $\psi \rightarrow < v, \phi >$ es un funcional conjugado lineal y continuo en E, que podemos extender al cierre de E. La autodualidad de un espacio de Hilbert nos proporciona ahora una función u en el cierre de E que es solución a nuestro problema.

La ecuación de Navier-Stokes

Sea $G \subset \mathbb{R}^3$ una región del espacio ocupada por un fluido en movimiento. Se trata de dar un modelo que describa el movimiento. Llamamos $\rho > 0$ a la densidad constante del fluido.

Si $x(t) \in G$ designa la posición de una partícula en el instante $t \geq 0$, supondremos que dicha partícula describe una trayectoria bien definida $x : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow G$, donde $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ y que, por tanto, la velocidad $u(x,t)$ de cada partícula en el instante t define un campo de vectores en G, $u : G \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t).u_3(x,t))$. Para la obtención de la ecuación que describe el movimiento de la partícula del fluido, supondremos que u tiene la regularidad suficiente para que los cálculos sean válidos.

Para obtener la ecuación del movimiento, aplicaremos la segunda ley de Newton de la Mecánica clásica, así que antes de nada calculamos la aceleración que será $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} u(x(t), t)$.

Tenemos entonces la siguiente expresión de la aceleración:

$$(\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}u_3,$$
$$(\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}u_3,$$
$$(\frac{\partial u_3}{\partial t}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}u_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}u_3)=$$
$$(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_j)_{i=1,2,3}$$

Este vector de $\mathbb{R}^3$ será denotado por $\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u$

La segunda ley de Newton nos dice ahora que $\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u)=$ Fuerza.

Respecto a la fuerza que actúa sobre el fluido, supondremos la existencia de un campo de fuerzas $K:G\to\mathbb{R}^3$ dado por $K(x)=(K_1(x),K_2(x),K_3(x))$. El modelo más general que describe el movimiento del fluido tiene además en cuenta la viscosidad del fluido, que hace aparecer una aceleración que se opone al movimiento, lo que obliga a añadir a la ecuación el término $-\eta\triangle u$, donde $\eta>0$, que depende del fluido (viscosidad) y $\triangle u=(\triangle u_1,\triangle u_2,\triangle u_3)$ es el operador Laplaciano de u definido mediante $\triangle u_i=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$. Digamos que es la generalización de u'' a este ambiente.

En definitiva, la ecuación del movimiento resulta:

$$-\eta\triangle u+\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u)=K \text{ en } G$$

La condición de contorno natural es que $v=0$ en la frontera de G denotada por ∂G. Por último supondremos también que $divu=0$ en ∂G, donde $divu=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ es el operador divergencia. El hecho de que este operador se anule en G viene a decir que el fluido es incompresible, hecho que desde el punto de vista físico es consistente con la ley de conservación de la masa, ésta no puede variar. En efecto, veamos en un caso sencillo cómo la divergencia nos la la tasa de variación del volumen:

Sea P_0 un paralelepípedo y $P(t)$ la evolución de P_0 con el tiempo t. Es decir, sea $h=(h_1,h_2,h_3)$ la función que nos da los lados de $P(t)$ y $h_0=(a,b,c)$ los lados de P_0. Supongamos que $\frac{dh_i}{dt}=d_ih_i$, cosa que no es más que decir que el Jacobiano de h es diagonal, por ejemplo haciendo un cambio a coordenadas ortogonales. Entonces $divh=d_1+d_2+d_3$. Ahora tenemos

$$\frac{d}{dt}Vol(P(t)) = \frac{d}{dt}(h_1(t)h_2(t)h_3(t) = divhVol(P(t)),$$

es decir, la tasa de variación del volumen es la divergencia.

En definitiva, con las consideraciones oportunas, el problema que describe el movimiento de un fluido incompresible de densidad ρ, viscosidad η, con fuerza externa K es el siguiente:

$$-\eta\triangle v + \rho(\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = K \text{ enG}, \ v = 0 \text{ en } \partial G, \ divv = 0 \text{ en } G,$$

donde $G \subset \mathbb{R}^3$ abierto, acotado y conexo y $K : G \to \mathbb{R}^3$ es el campo de fuerzas. Nuestro objetivo será entonces encontrar v satisfaciendo nuestro problema, bajo hipótesis sobre los datos. Para empezar, simplificamos el problema suponiendo que $\rho = 1$ y que $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, es decir, trataremos sólo el problema estacionario.

Así que nuestro problema inicial, al que denotaremos Problema I, es el siguiente:

$$-\eta\triangle v + (v\nabla)v = K \text{ enG}, \ v = 0 \text{ en } \partial G, \ divv = 0 \text{ en } G,$$

Vistas las secciones anteriores, nuestra estrategia será encontrar solución en sentido distribucional. Para ello definamos

$$\chi = \{\phi \in C^2(G, \mathbb{R}^3) : div\phi = 0 \text{ en } G, \ \phi = 0 \text{ en } \partial G\}$$

Integrando en el Problema I, obtenemos claramente que

$$\int_G (-\eta\triangle v + (v\nabla)v - K)wdx = 0 \ \forall w \in \chi,$$

de donde, gracias al teorema de la divergencia se tiene

$$\int_G (\eta\nabla v\nabla w - v(v\nabla)w - Kw)dx = 0 \ \forall w \in \chi.$$

Expliquemos, por ejemplo, la igualdad $\int_G w\triangle vdx = -\int_G \nabla v\nabla wdx$.

Para ello empezamos recordando el teorema de la divergencia. Si $X : \bar{G} \to \mathbb{R}^3$ es un campo continuo en $\bar{G}$ y regular en G y ∂G es regular, se tiene la igualdad

$$\int_G divX = -\int_{\partial G} < X, N > dS,$$

donde N denota el normal exterior a ∂G. Aplicando este resultado para $X = w\nabla v$ se obtiene la igualdad deseada. El otro sumando de la igualdad es similar. Digamos que lo que estamos haciendo es aplicar una fórmula de integración por partes en varias variables, que esencialmente es el teorema de la divergencia.

Así, el tratamiento débil del problema I nos lleva al siguiente prolema II:

$$\int_G (\eta\nabla v\nabla w - v(v\nabla)w - Kw)dx = 0\ \forall w \in \chi,\ \ v = 0 \text{ en } \partial G,\ \ div(v) = 0 \text{ en } G.$$

Obsérvese que se ha bajado el grado de derivabilidad de v y que debemos imponer la regularidad en ∂G.

Vamos ahora a la búsqueda del espacio Hilbert adecuado para plantear el problema de forma abstracta.

En adelante $v = (v_1, v_2, v_3)$, $K = (K_1, K_2, K_3)$ y $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Definimos

$$< v, w >= \int_G \nabla v\nabla w dx = \int_G \sum_{j=1}^{3} \partial_j w_m \partial_j v_m$$

$$\alpha(u, v, w) = -\int_G u(v\nabla)w = (-\int_G \sum_{i=1}^{3} u_j v_m \partial_j w_m)_{m=1,2,3}$$

$$K(w) = \int_G Kw = (\int_G K_j w_j)_{j=1,2,3}$$

$C_0^\infty(G)$ será el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables de soporte compacto definidas en G con valores a $\mathbb{R}^3$. Definimos

$$D = \{\phi : \phi_j \in C_0^\infty(G), div\phi = 0\} \subset \chi,$$

y hacemos $H_2 = \{u \in L_2 : \partial_j u \in L_2\ \forall j\}$, el espacio de Sobolev que ya debe ser conocido. El espacio H será el cierre de $C_0^\infty(G)$ en H_2, denotaremos por X el cierre de D en H

Con esta nueva notación el problema consiste en encontrar v de forma que $\eta < v, \phi >$ $+\alpha(v, v, \phi) = K(\phi)\ \forall\phi \in D$.

Enunciamos ahora las propiedades que nos serán de utilidad:

1. H y Z son espacios de Hilbert reales, el embebimiento de H en Z es continuo y H es denso en Z.

2. X es cerrado en H y D es denso en X.

3. $Y = L_4(G)^3$ es un espacio de Banach real y el embebimiento de X en Y es compacto.

4. $\alpha : X^3 \to \mathbb{R}$ es trilineal y

$$|\alpha(u, v, w)| \leq M\|u\|_Y\|v\|_Y\|w\|_X$$

5. $\alpha(v, v, v) = 0 \ \forall v \in D$

Podemos ya presentar el principal resultado de esta sección.

Si $\eta > 0$ y $K \in H^*$, entonces existe $v \in X$ solución de nuestro problema II. Además, en el caso de que $\frac{\|K\|}{\eta^2}$ sea suficientemente pequeño, la solución es única.

Desde el punto de vista físico la no unicidad de solución corresponde al fenómeno de las turgulencias. Obsérvese que se consigue que no haya turbulencias disminuyendo las fuerzas exteriores o aumentando la viscosidad, cosa que resulta más que razonable desde el punto de vista de la experiencia.

Digamos por último que el estudio completo de la ecuación de Navier-Stokes está todavía en sus comienzos y es uno de los problemas más importantes desde el punto de vista de la Mecánica de Fluidos, por su aplicación en la práctica.