Tema 1: Espacios de Medida

Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- Ω es un conjunto no vacío

Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- Ω es un conjunto no vacío
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- Ω es un conjunto no vacío
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:
  - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
  - (ii) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
  - (iii) $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una medida (positiva):
  - (a) $\mu(\emptyset) = 0$
  - (b) μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \;\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \;(n \neq m) \;\Rightarrow\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \ \ \forall \, n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \ \ \forall \, n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Ejemplo importante: σ-álgebras de Borel

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Ejemplo importante: σ-álgebras de Borel

- Toda intersección de σ-álgebras es una σ-álgebra

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \Rightarrow \;\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Ejemplo importante: σ-álgebras de Borel

- Toda intersección de σ-álgebras es una σ-álgebra
- Para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, existe la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{S}$

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Ejemplo importante: σ-álgebras de Borel

- Toda intersección de σ-álgebras es una σ-álgebra
- Para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, existe la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{S}$
- Ω espacio topológico con topología $\mathcal{T}$: la σ-álgebra de Borel de Ω es la engendrada por $\mathcal{T}$. Sus elementos son los conjuntos de Borel en Ω.

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \Rightarrow \;\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{A}$

1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \ \cup \ \{\infty\} = [0, \infty[\ \cup \ \{\infty\}$$

1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \ \cup \ \{\infty\} = [0, \infty[\, \cup \, \{\infty\}$$

Orden

1. Orden en $[0,\infty]$

$[0,\infty]$

$$[0,\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \,\cup\, \{\infty\} = [0,\infty[\,\cup\, \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en $[0,\infty[$

1. Orden en $[0,\infty]$

$[0,\infty]$

$$[0,\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \ \cup \ \{\infty\} = [0,\infty[\ \cup \ \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en $[0,\infty[$
- $x \leqslant \infty \quad \forall \ x \in [0,\infty]$.

1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[\cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en $[0, \infty[$
- $x \leqslant \infty \quad \forall\, x \in [0, \infty]$.

Propiedades del orden

1. Orden en $[0,\infty]$

$[0,\infty]$

$$[0,\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \cup \{\infty\} = [0,\infty[\cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en $[0,\infty[$
- $x \leqslant \infty \quad \forall\, x \in [0,\infty]$.

Propiedades del orden

- Orden total

1. Orden en $[0,\infty]$

$[0,\infty]$

$$[0,\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \cup \{\infty\} = [0,\infty[\cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en $[0,\infty[$
- $x \leqslant \infty \quad \forall\, x \in [0,\infty]$.

Propiedades del orden

- Orden total
- Todo subconjunto no vacío de $[0,\infty]$ tiene supremo e ínfimo

2. Topología de $[0, \infty]$

Topología de $[0, \infty]$

2. Topología de $[0, \infty]$

Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos $=$ Uniones de intervalos abiertos.

2. Topología de $[0, \infty]$

Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$]\alpha,\beta[= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta \in [0,\infty])$$
$$]\alpha,\infty] = \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0,\infty])$$

2. Topología de $[0, \infty]$

Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$
$$]\alpha, \infty] = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$
$$[0, \beta[= \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$
\begin{aligned}
]\alpha,\beta[&= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta \in [0,\infty]) \\
]\alpha,\infty] &= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0,\infty]) \\
[0,\beta[&= \{x \in [0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0,\infty])
\end{aligned}
$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta \in \mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha,\infty] : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$
\begin{aligned}
&]\alpha,\beta[= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta \in [0,\infty])\\
&]\alpha,\infty] = \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0,\infty])\\
&[0,\beta[= \{x \in [0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0,\infty])
\end{aligned}
$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta \in \mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha,\infty] : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$]\alpha,\beta[= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta \in [0,\infty])$$
$$]\alpha,\infty] = \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0,\infty])$$
$$[0,\beta[= \{x \in [0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0,\infty])$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta \in \mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha,\infty] : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$

2. Topología de $[0, \infty]$

Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$
\begin{aligned}
&]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty]) \\
&]\alpha, \infty] = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty]) \\
&[0, \beta[= \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])
\end{aligned}
$$

- Subbase numerable: $\{[0, \beta[: \beta \in \mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha, \infty] : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0, 1]$
- Compactación por un punto de $[0, \infty[$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$
\begin{aligned}
]\alpha,\beta[&= \{x\in[0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta\in[0,\infty])\\
]\alpha,\infty] &= \{x\in[0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha\in[0,\infty])\\
[0,\beta[&= \{x\in[0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta\in[0,\infty])
\end{aligned}
$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta\in\mathbb{Q}^+\}\bigcup\{]\alpha,\infty] : \alpha\in\mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$
- Compactación por un punto de $[0,\infty[$
- Toda sucesión monótona converge en $[0,\infty]$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos $=$ Uniones de intervalos abiertos.

$$\begin{aligned}
]\alpha,\beta[&= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta \in [0,\infty]) \\
]\alpha,\infty] &= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0,\infty]) \\
[0,\beta[&= \{x \in [0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0,\infty])
\end{aligned}$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta \in \mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha,\infty] : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$
- Compactación por un punto de $[0,\infty[$
- Toda sucesión monótona converge en $[0,\infty]$
- $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant n\}$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$
\begin{aligned}
]\alpha,\beta[&= \{x\in[0,\infty] : \alpha<x<\beta\} \quad (\alpha,\beta\in[0,\infty])\\
]\alpha,\infty] &= \{x\in[0,\infty] : \alpha<x\} \quad (\alpha\in[0,\infty])\\
[0,\beta[&= \{x\in[0,\infty] : x<\beta\} \quad (\beta\in[0,\infty])
\end{aligned}
$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta\in\mathbb{Q}^+\}\bigcup\{]\alpha,\infty] : \alpha\in\mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$
- Compactación por un punto de $[0,\infty[$
- Toda sucesión monótona converge en $[0,\infty]$
- $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k\geqslant n\}$
- $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k\geqslant n\}$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$
\begin{aligned}
&]\alpha,\beta[= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta \in [0,\infty])\\
&]\alpha,\infty] = \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0,\infty])\\
&[0,\beta[= \{x \in [0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0,\infty])
\end{aligned}
$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta \in \mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha,\infty] : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$
- Compactación por un punto de $[0,\infty[$
- Toda sucesión monótona converge en $[0,\infty]$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant n\}$
- $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geqslant n\}$
- $x_n \leqslant y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} y_n, \quad \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$]\alpha,\beta[=\{x\in[0,\infty]:\alpha<x<\beta\} \quad (\alpha,\beta\in[0,\infty])$$
$$]\alpha,\infty]=\{x\in[0,\infty]:\alpha<x\} \quad (\alpha\in[0,\infty])$$
$$[0,\beta[=\{x\in[0,\infty]:x<\beta\} \quad (\beta\in[0,\infty])$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[:\beta\in\mathbb{Q}^+\}\bigcup\{]\alpha,\infty]:\alpha\in\mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$
- Compactación por un punto de $[0,\infty[$
- Toda sucesión monótona converge en $[0,\infty]$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant n\}$
- $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geqslant n\}$
- $x_n \leqslant y_n \ \forall n\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} y_n, \quad \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$
- $x_n \leqslant y_n \ \forall n\in\mathbb{N},\ \{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y \quad\Rightarrow\quad x\leqslant y$

Suma en $[0, \infty]$

Suma en $[0, \infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

Suma en $[0, \infty]$

Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en $[0, \infty[$

$$x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall\ x \in [0, \infty]$$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

$$x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\ x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

$$x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\ x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

$$x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\ x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x+y=x+z,\ x<\infty \ \Rightarrow\ y=z$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

$$x+\infty = \infty + x = \infty \quad \forall\ x \in [0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x+y=x+z,\ x<\infty \ \Rightarrow\ y=z$
- Compatible con el orden: $x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2 \ \Rightarrow x_1+x_2 \leqslant y_1+y_2$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

$$x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\, x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x+y=x+z,\ x<\infty \ \Rightarrow\ y=z$
- Compatible con el orden: $x_1\leqslant y_1,\ x_2\leqslant y_2 \ \Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$
- Continua: $\{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y \ \Rightarrow\ \{x_n+y_n\}\to x+y$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

$$x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\ x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x+y=x+z,\ x<\infty \ \Rightarrow\ y=z$
- Compatible con el orden: $x_1\leqslant y_1,\ x_2\leqslant y_2\ \Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$
- Continua: $\{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y\ \Rightarrow\ \{x_n+y_n\}\to x+y$
- Tiene sentido la suma de cualquier serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

Suma usual en $[0,\infty[$

$$x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\, x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x+y=x+z,\ x<\infty \ \Rightarrow\ y=z$
- Compatible con el orden: $x_1\leqslant y_1,\ x_2\leqslant y_2 \ \Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$
- Continua: $\{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y \ \Rightarrow\ \{x_n+y_n\}\to x+y$
- Tiene sentido la suma de cualquier serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}y_n$

Suma en $[0, \infty]$

Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en $[0, \infty[$

$$x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall\, x \in [0, \infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x + y = x + z,\ x < \infty \ \Rightarrow\ y = z$
- Compatible con el orden: $x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2 \ \Rightarrow x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$
- Continua: $\{x_n\} \to x,\ \{y_n\} \to y \ \Rightarrow\ \{x_n + y_n\} \to x + y$
- Tiene sentido la suma de cualquier serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$
- Incondicional: Para $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty]$ y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ biyectiva, se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a(m,n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a(m,n) = \sum_{k=1}^{\infty} a\big(\sigma(k)\big)$$

Producto en $[0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en $[0, \infty[$

Producto en $[0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en $[0, \infty[$
- $x\ \infty\ =\ \infty\ x\ =\ \infty\ \ \forall\ x \in]0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en $[0, \infty[$
- $x\ \infty\ =\ \infty\ x\ =\ \infty\ \ \forall\ x \in]0, \infty]$
- $0\ \infty = \infty\ 0 =\ 0$

Producto en $[0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en $[0, \infty[$
- $x\ \infty = \infty\ x = \infty \quad \forall\, x \in]0, \infty]$
- $0\ \infty = \infty\ 0 = \ 0$

Propiedades del producto

Producto en $[0, \infty]$

Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en $[0, \infty[$
- $x \ \infty \ = \ \infty \ x \ = \ \infty \quad \forall \ x \in]0, \infty]$
- $0 \ \infty = \infty \ 0 = \ 0$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma

Producto en $[0,\infty]$

Producto en $[0,\infty]$

- Producto usual en $[0,\infty[$
- $x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall\, x \in]0,\infty]$
- $0\,\infty = \infty\,0 = 0$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden: $x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2 \Rightarrow x_1\,x_2 \leqslant y_1\,y_2$

Producto en $[0,\infty]$

Producto en $[0,\infty]$

- Producto usual en $[0,\infty[$
- $x\ \infty \ = \ \infty\ x \ = \ \infty \quad \forall\ x \in]0,\infty]$
- $0\ \infty = \infty\ 0 = \ 0$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden: $x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2 \ \Rightarrow \ x_1 x_2 \leqslant y_1 y_2$
- Crecientemente continuo: $\{x_n\} \nearrow x,\ \{y_n\} \nearrow y \ \Rightarrow \ \{x_n y_n\} \to x\,y$

Producto en $[0,\infty]$

Producto en $[0,\infty]$

- Producto usual en $[0,\infty[$
- $x\ \infty \ = \ \infty\ x \ = \ \infty \quad \forall\ x \in]0,\infty]$
- $0\ \infty = \infty\ 0 = \ 0$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden: $x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2 \ \Rightarrow \ x_1\, x_2 \leqslant y_1\, y_2$
- Crecientemente continuo: $\{x_n\} \nearrow x,\ \{y_n\} \nearrow y \ \Rightarrow \ \{x_n\, y_n\} \to x\, y$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\, x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Concepto de Medida

Medida

$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ verificando:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Concepto de Medida

Medida

$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ verificando:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Medidas de Borel

Medida de Borel en un espacio topológico Ω = Medida definida en la σ-álgebra de Borel de Ω

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es:

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leqslant \mu(B)$

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leqslant \mu(B)$
- Subaditiva: $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leqslant \mu(B)$

- Subaditiva: $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leqslant \mu(B)$
- Subaditiva: $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita: $A_n \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(A_1) < \infty \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leqslant \mu(B)$
- Subaditiva: $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita: $A_n \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(A_1) < \infty \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

Sugestivamente: $\{A_n\} \nearrow A \ \Rightarrow\ \{\mu(A_n)\} \nearrow \mu(A)$

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leqslant \mu(B)$
- Subaditiva: $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita: $A_n \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(A_1) < \infty \ \Rightarrow\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

Sugestivamente: $\{A_n\} \nearrow A \ \Rightarrow\ \{\mu(A_n)\} \nearrow \mu(A)$
Mientras que: $\{A_n\} \searrow A,\ \mu(A_1) < \infty \ \Rightarrow\ \{\mu(A_n)\} \searrow \mu(A)$

Primeros Ejemplos de medidas

Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$ arbitrario, $m : \Omega \to [0, \infty]$ cualquier función y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x) := \sup\Big\{\sum_{x \in J} m(x) : J \subseteq A,\ J \text{ finito}\Big\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

Primeros Ejemplos de medidas

Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$ arbitrario, $m : \Omega \to [0,\infty]$ cualquier función y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} m(x) := \sup\{\sum_{x\in J} m(x) : J \subseteq A,\ J \text{ finito}\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

Medidas de Dirac

Fijado $x \in \Omega$, para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se obtiene con $m(x) = 1$ y $m(\omega) = 0\ \forall \omega \in \Omega \setminus \{x\}$

Primeros Ejemplos de medidas

Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$ arbitrario, $m : \Omega \to [0,\infty]$ cualquier función y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} m(x) := \sup\Big\{\sum_{x\in J} m(x) : J \subseteq A,\ J \text{ finito}\Big\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

Medidas de Dirac

Fijado $x \in \Omega$, para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se obtiene con $m(x) = 1$ y $m(\omega) = 0\ \forall \omega \in \Omega \setminus \{x\}$

Medida que cuenta ("counting measure")

Para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define $\mu(A)$ como el número de elementos de A, entendiéndose que $\mu(A) = \infty$ cuando A es un conjunto infinito.
Se obtiene con $m(x) = 1\ \ \forall x \in \Omega$.

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \text{ínf}\, I^{(k)} \right)$$

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \text{ínf}\, I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \text{ínf}\, I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) : \ E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \operatorname{ínf} I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$

$$\lambda^*(E) = \operatorname{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \, : \, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Medida de Lebesgue

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \ : \ E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Medida de Lebesgue

- Conjuntos medibles-Lebesgue:

$$\mathcal{M} = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E) \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \ : \ E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Medida de Lebesgue

- Conjuntos medibles-Lebesgue:

$$\mathcal{M} = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E) \ \ \forall \ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

- Medida de Lebesgue: $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}}$

$$\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty], \quad \lambda(E) = \lambda^*(E) \ \ \forall E \in \mathcal{M}$$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ es una medida

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{M}$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{M}$
- $\lambda|_{\mathcal{B}}$ (medida de Borel-Lebesgue) es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$ que extiende a m

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{M}$
- $\lambda|_{\mathcal{B}}$ (medida de Borel-Lebesgue) es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$ que extiende a m
- También λ es la única medida definida en $\mathcal{M}$ que extiende a m

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \operatorname{ínf} \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N\right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists G\ :\ E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N\right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists G \;:\; E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N,\; \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists F \;:\; F = \overline{F} \subset E,\; \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N\right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists G\ :\ E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists F\ :\ F = \overline{F} \subset E,\ \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$, conjunto de tipo G_δ con $\lambda(B \setminus E) = 0$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N\right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists G \; : \; E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N, \; \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists F \; : \; F = \overline{F} \subset E, \; \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$, conjunto de tipo G_δ con $\lambda(B \setminus E) = 0$
- $E \supseteq A$, conjunto de tipo F_σ con $\lambda(E \setminus A) = 0$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{\lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N\right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists G\ :\ E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists F\ :\ F = \overline{F} \subset E,\ \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$, conjunto de tipo G_δ con $\lambda(B \setminus E) = 0$
- $E \supseteq A$, conjunto de tipo F_σ con $\lambda(E \setminus A) = 0$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) &= \text{ínf}\,\{\lambda(G)\ :\ G \text{ abierto},\ G \supseteq E\} \\ &= \sup\,\{\lambda(K)\ :\ K \text{ compacto},\ K \subseteq E\} \end{aligned}$$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones: $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones: $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones: $E \in \mathcal{M} \iff E + x \in \mathcal{M}$, en cuyo caso, $\lambda(E+x) = \lambda(E)$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones: $\lambda^*(E + x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones: $E \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; E + x \in \mathcal{M}$, en cuyo caso, $\lambda(E + x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$, finita en compactos e invariante por traslaciones.

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones:
  $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones:
  $E \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; E+x \in \mathcal{M}$, en cuyo caso, $\lambda(E+x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$, finita en compactos e invariante por traslaciones.
- La hipótesis "finita en compactos" se puede sustituir por la existencia de un conjunto abierto no vacío con medida finita

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones: $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones: $E \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; E+x \in \mathcal{M}$, en cuyo caso, $\lambda(E+x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$, finita en compactos e invariante por traslaciones.
- La hipótesis "finita en compactos" se puede sustituir por la existencia de un conjunto abierto no vacío con medida finita
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es invariante por isometrías.

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

Otros ejemplos importantes

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes
- Medidas de Haar

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes
- Medidas de Haar
- Medidas de Hausdorff

Tema 2: Integración

Función medible entre espacios medibles

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $\; f : \Omega \to Y$

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $f : \Omega \to Y$

$$f \ \text{ medible } \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $f : \Omega \to Y$

$$f \ \text{ medible } \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Primeras propiedades

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $f : \Omega \to Y$

$$f \ \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall\, B \in \mathcal{B}$$

Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ espacios medibles, $f:\Omega\to Y$

$$f \ \text{ medible } \iff f^{-1}(B)\in\mathcal{A} \quad \forall\, B\in\mathcal{B}$$

Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible
- Si $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$:

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $f : \Omega \to Y$

$$f \ \text{ medible } \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible
- Si $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$:

$$f \ \text{ medible } \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Función medible con valores en un espacio topológico

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \ \ \forall T \in \mathcal{T}$$

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \;\; \forall T \in \mathcal{T}$$

Primeras propiedades

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \ \ \forall T \in \mathcal{T}$$

Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \;\; \forall T \in \mathcal{T}$$

Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible
- Si $\mathcal{T}$ tiene una subbase numerable $\mathcal{S}$:

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible
- Si $\mathcal{T}$ tiene una subbase numerable $\mathcal{S}$:

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(S) \in \mathcal{A} \quad \forall S \in \mathcal{S}$$

Funciones medibles positivas

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible
(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \text{ínf}\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \text{ínf}\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \text{ínf}\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \underset{n\to\infty}{\text{lím sup}}\, f_n(x) \quad (x \in \Omega)$
- $g_4(x) = \underset{n\to\infty}{\text{lím inf}}\, f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \text{ínf}\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$
- $g_4(x) = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

Por tanto: $\{f_n(x)\} \to f(x) \ \ \forall x \in \Omega \implies f$ medible

Función simple positiva

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva: $s : \Omega \to [0, \infty[$ medible con $s(\Omega)$ finito

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva: $s : \Omega \to [0, \infty[$ medible con $s(\Omega)$ finito

Descomposición canónica:

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \infty$$

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva: $s : \Omega \to [0, \infty[$ medible con $s(\Omega)$ finito

Descomposición canónica:

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva: $s : \Omega \to [0, \infty[$ medible con $s(\Omega)$ finito

Descomposición canónica:

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ , \ A_k \cap A_j = \emptyset \quad (k \neq j) \ , \ s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva: $s : \Omega \to [0, \infty[$ medible con $s(\Omega)$ finito

Descomposición canónica:

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ , \ A_k \cap A_j = \emptyset \quad (k \neq j) \ , \ s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

Recíprocamente:

$$B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}, \quad \beta_1, \ldots, \beta_m \in [0, \infty[\quad \Rightarrow \quad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j} \quad \text{simple positiva}$$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \to [0, \infty] \text{ medible}, \ n \in \mathbb{N}$$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \to [0, \infty] \text{ medible}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n\,2^n)$$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \to [0, \infty] \text{ medible}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n\,2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \to [0, \infty] \text{ medible}, \; n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n\,2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n\chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f:\Omega\to[0,\infty] \text{ medible}, \ n\in\mathbb{N}$$

$$F_n=\{x\in\Omega: f(x)\geqslant n\}\in\mathcal{A}$$

$$E_{nk}=\left\{x\in\Omega:\frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k}{2^n}\right\}\in\mathcal{A} \quad (k=1,2,\ldots,n\,2^n)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{nk}}+n\chi_{F_n}$$

- $s_n(x)\leqslant s_{n+1}(x) \quad \forall x\in\Omega$
- $\{s_n(x)\}\to f(x) \quad \forall x\in\Omega$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \to [0, \infty] \text{ medible}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n\,2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n\chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\{s_n(x)\} \to f(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\sup f(\Omega) < \infty$ convergencia uniforme

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \to [0, \infty] \text{ medible}, \; n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n\,2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\{s_n(x)\} \to f(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\sup f(\Omega) < \infty$ convergencia uniforme

Consecuencia

f, g medibles, $\alpha \in [0, \infty]$, $p \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad f + g,\ \alpha f,\ f\,g,\ f^p$ medibles

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad \int_E s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(A_k \cap E)$$

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad \int_E s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \ \ \text{simples}, \ s(x) \leqslant t(x) \ \ \forall x \in E \ \ \Rightarrow \ \int_E s \, d\mu \leqslant \int_E t \, d\mu$$

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad \int_E s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \;\; \text{simples}, \;\; s(x) \leqslant t(x) \;\; \forall x \in E \;\; \Rightarrow \;\; \int_E s \, d\mu \leqslant \int_E t \, d\mu$$

$$\int_E s \, d\mu = \text{máx} \left\{ \int_E t \, d\mu \, : \, t \text{ simple}, t \leqslant s \right\}$$

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad \int_E s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \;\; \text{simples}, \;\; s(x) \leqslant t(x) \;\; \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s \, d\mu \leqslant \int_E t \, d\mu$$

$$\int_E s \, d\mu = \text{máx} \left\{ \int_E t \, d\mu \, : \, t \text{ simple}, t \leqslant s \right\}$$

Integral de una función medible positiva

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \chi_{A_k} \qquad \int_E s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \;\; \text{simples}, \;\; s(x) \leqslant t(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s \, d\mu \leqslant \int_E t \, d\mu$$

$$\int_E s \, d\mu = \text{máx} \left\{ \int_E t \, d\mu \, : \, t \text{ simple}, t \leqslant s \right\}$$

Integral de una función medible positiva

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E s \, d\mu \, : \, s \text{ simple } s \leqslant f \right\}$$

Propiedades de la integral (1)

Primeras propiedades

Propiedades de la integral (1)

Primeras propiedades

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible $\Rightarrow \displaystyle\int_E f \, d\mu = \int_\Omega f \chi_E \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$

Propiedades de la integral (1)

Primeras propiedades

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible $\Rightarrow \displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_\Omega f \chi_E\, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible, $\alpha \in [0, \infty] \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega \alpha f\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu$

Propiedades de la integral (1)

Primeras propiedades

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible $\Rightarrow \displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_\Omega f \chi_E\, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible$, \alpha \in [0, \infty] \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega \alpha f\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu$
- $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles, $f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega f\, d\mu \leqslant \int_\Omega g\, d\mu$

Propiedades de la integral (1)

Primeras propiedades

- $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible $\Rightarrow \displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_\Omega f\chi_E\, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible, $\alpha \in [0,\infty] \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega \alpha f\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu$
- $f, g : \Omega \to [0,\infty]$ medibles, $f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega f\, d\mu \leqslant \int_\Omega g\, d\mu$

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas en Ω y sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$. Entonces:

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu$$

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Integral indefinida:

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Integral indefinida:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Integral indefinida:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

  φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Integral indefinida:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

  φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\mu$$

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Integral indefinida:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

  φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\mu$$

- Lema de Fatou: $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Integral indefinida:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

  φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\mu$$

- Lema de Fatou: $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}\big) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f:\Omega\to[0,\infty]$ medible:

$$\int_\Omega f\,d\mu = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \mu\big(\{x\in\Omega : f(x)>0\}\big) = 0 \quad (f=0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_\Omega f\,d\mu < \infty \;\;\Rightarrow\;\; \mu\big(\{x\in\Omega : f(x)=\infty\}\big) = 0 \quad (f<\infty \text{ c.p.d.})$$

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega f\, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}\big) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_\Omega f\, d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}\big) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

Desigualdades de Hölder y Minkowski

$f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$:

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}\big) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_\Omega f \, d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}\big) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

Desigualdades de Hölder y Minkowski

$f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$:

$$\int_\Omega f \, g \, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^{p^*} \, d\mu \right)^{1/p^*}$$

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}\big) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_\Omega f \, d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}\big) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

Desigualdades de Hölder y Minkowski

$f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$:

$$\int_\Omega f \, g \, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^{p^*} \, d\mu\right)^{1/p^*}$$

$$\left(\int_\Omega (f + g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega g^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Tema 3: Espacios L_p

1. Funciones medibles

2. Espacios L_p

3. Funciones integrables

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^{\Omega} : f \text{ medible}\} \qquad \big(\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C})\big)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \qquad \big(\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C})\big)$$

Dos observaciones

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \qquad \big(\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C})\big)$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \quad \big(\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C})\big)$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (u(x), v(x)) \ \ \forall x \in \Omega$. Entonces:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \qquad \big(\mathcal{L}_0(\mu,\mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu,\mathbb{C})\big)$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (u(x), v(x)) \ \ \forall x \in \Omega$. Entonces:

$$f \ \text{ medible } \iff u, v \ \text{ medibles}$$

Propiedades de las funciones medibles

Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f\,, \operatorname{Im} f$ medibles.

Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g,\, f\, g \in \mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)

Propiedades de las funciones medibles

- $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f\,,\operatorname{Im} f$ medibles.
- $f,g\in\mathcal{L}_0(\mu) \implies f+g,\, f\,g\in\mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)
- $f\in\mathcal{L}_0(\mu),\ p\in\mathbb{R}^+ \implies |f|^p$ medible positiva

Propiedades de las funciones medibles

- $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f\,,\operatorname{Im} f$ medibles.
- $f,g\in\mathcal{L}_0(\mu)\implies f+g,\,f\,g\in\mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)
- $f\in\mathcal{L}_0(\mu),\ p\in\mathbb{R}^+\implies |f|^p$ medible positiva
- $f\in\mathcal{L}_0(\mu,\mathbb{R})\implies f^+,f^-$ medibles positivas

Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f+g,\, f\,g \in \mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu),\ p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$ medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$ medibles positivas
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies \exists\, \alpha \in \mathcal{L}_0(\mu)$:

$$|\alpha(x)| = 1,\ f(x) = \alpha(x)\,|f(x)| \quad (x \in \Omega)$$

Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f\,, \operatorname{Im} f$ medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f+g,\, f\,g \in \mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu),\ p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$ medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$ medibles positivas
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies \exists\ \alpha \in \mathcal{L}_0(\mu)$:
$$|\alpha(x)| = 1,\ f(x) = \alpha(x)\,|f(x)| \quad (x \in \Omega)$$
- $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}_0(\mu),\ \{f_n(x)\} \to f(x)\ \ \forall x \in \Omega \implies f \in \mathcal{L}_0(\mu)$

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ **Funciones medibles:**

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$ Funciones p-integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$ Funciones p-integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$ Funciones esencialmente acotadas:

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$ Funciones p-integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$ Funciones esencialmente acotadas:

$$f \in \mathcal{L}_0(\mu), \quad \operatorname{ess\,sup} |f| = \min\{M \in [0, \infty] : |f| \leqslant M \text{ c.p.d.}\}$$

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$ Funciones p-integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$ Funciones esencialmente acotadas:

$$f \in \mathcal{L}_0(\mu), \quad \operatorname{ess\,sup} |f| = \text{mín}\{M \in [0, \infty] : |f| \leqslant M \text{ c.p.d.}\}$$

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty\}$$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_p seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_p seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{ f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.} \} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_p seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{ f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.} \} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_p seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{ f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.} \} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio normado

Caso $p = \infty$

Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_∞ seminorma en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_∞ seminorma en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in L_\infty(\mu))$$

Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_∞ seminorma en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in L_\infty(\mu))$$

$L_\infty(\mu)$ espacio normado

Caso $0 < p < 1$

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \lceil f \rceil_p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \lceil f \rceil_p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

$$d_p(f,g) = \lceil f - g \rceil_p = \int_\Omega |f-g|^p \, d\mu \quad (f, g \in L_p(\mu))$$

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \quad \Longrightarrow \quad (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \lceil f \rceil_p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

$$d_p(f,g) = \lceil f - g \rceil_p = \int_\Omega |f-g|^p \, d\mu \quad (f, g \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio métrico

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

ν_0 es una pseudonorma en $\mathcal{L}_0(\mu)$

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

ν_0 es una pseudonorma en $\mathcal{L}_0(\mu)$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad \lceil f \rceil_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

ν_0 es una pseudonorma en $\mathcal{L}_0(\mu)$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad \lceil f \rceil_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

$$d_0(f,g) = \lceil f - g \rceil_0 \quad (f,g \in L_0(\mu))$$

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

ν_0 es una pseudonorma en $\mathcal{L}_0(\mu)$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad \lceil f \rceil_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

$$d_0(f,g) = \lceil f - g \rceil_0 \quad (f,g \in L_0(\mu))$$

$L_0(\mu)$ espacio métrico

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus i\, L_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$ retículo vectorial:

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\, L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \iff \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\big) = 0 \quad (f \leqslant g \ \text{ c.p.d.})$$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\, L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \iff \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\big) = 0 \quad (f \leqslant g \ \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g,\, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\,L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \iff \mu\Big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\Big) = 0 \quad (f \leqslant g \ \text{ c.p.d.})$$

$$f,g \in L_p(\mu) \implies f \vee g,\, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $\quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\,L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \iff \mu\Big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\Big) = 0 \quad (f \leqslant g \ \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g,\ f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$$[f \vee g](x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}, \quad [f \wedge g](x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\, L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \iff \mu\Big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\Big) = 0 \quad (f \leqslant g \ \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g,\ f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$$[f \vee g](x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad [f \wedge g](x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

$$f \in L_p(\mu,\mathbb{R}) \implies f^+, f^- \in L_p(\mu)$$

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $\quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\,L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \iff \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\big) = 0 \quad (f \leqslant g \;\; \text{c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g,\, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$$[f \vee g](x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}, \;\; [f \wedge g](x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

$$f \in L_p(\mu,\mathbb{R}) \implies f^+, f^- \in L_p(\mu)$$

$$f^+ = f \vee 0; \;\; f^- = -(f \wedge 0); \;\; f = f^+ - f^-; \;\; |f| = f^+ + f^-$$

Convergencia en $L_p(\mu)$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty : \quad \{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

$$\{f_n\} \to f \text{ en } L_0(\mu) \iff \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

  $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\Big) = 0 \;\; \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones (μ finita)

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

  $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \iff \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \ \ \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

  $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \iff \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \ \ \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

$$\{f_n\} \to f \text{ en } L_0(\mu) \iff \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\Big) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d.

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

$$\{f_n\} \to f \text{ en } L_0(\mu) \iff \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d.

Teorema de Riesz-Fisher

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu)$ $\iff$ $\left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu)$ $\iff$ $\{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

$$\{f_n\} \to f \text{ en } L_0(\mu) \iff \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\Big) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu)$ $\implies$ $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies$ $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$ $\implies$ $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d.

Teorema de Riesz-Fisher

- $L_p(\mu)$ es un espacio de Banach $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

  $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d.

Teorema de Riesz-Fisher

- $L_p(\mu)$ es un espacio de Banach $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$
- $L_p(\mu)$ es un espacio métrico completo $(0 \leqslant p < 1)$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega (\mathrm{Re}\, f)^+ \, d\mu - \int_\Omega (\mathrm{Re}\, f)^- \, d\mu + i \int_\Omega (\mathrm{Im}\, f)^+ \, d\mu - i \int_\Omega (\mathrm{Im}\, f)^- \, d\mu$$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty$

Propiedades

$$I : L_1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty$

Propiedades

$$I : L_1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

- Lineal

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty$

Propiedades

$$I : L_1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

- Lineal
- Continuo:

$$|I(f)| = \left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu = \|f\|_1$$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega (\mathrm{Re}\,f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\mathrm{Re}\,f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\mathrm{Im}\,f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\mathrm{Im}\,f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty$

Propiedades

$$I : L_1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

- Lineal
- Continuo:

$$|I(f)| = \left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu = \|f\|_1$$

- Positivo:

$$f \in L_1(\mu,\mathbb{R}),\ f \geqslant 0 \implies \int_\Omega f\,d\mu \geqslant 0$$

Teorema de la convergencia dominada

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f.

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \right\} \to 0$$

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \right\} \to 0$$

En particular, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y

$$\left\{ \int_\Omega f_n \, d\mu \right\} \to \int_\Omega f \, d\mu$$

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \right\} \to 0$$

En particular, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y

$$\left\{ \int_\Omega f_n \, d\mu \right\} \to \int_\Omega f \, d\mu$$

Si hubiéramos supuesto que $g \in \mathcal{L}_p(\mu)$, con $0 < p < \infty$, hubiéramos obtenido:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$$

y en particular $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$.

Corolario muy útil

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \operatorname{Lin}\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

¿$p = \infty$?

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

¿$p = \infty$?

Funciones simples:

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

¿$p = \infty$?

Funciones simples:

$$\tilde{S}(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A}\}$$

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

¿$p = \infty$?

Funciones simples:

$$\tilde{S}(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A}\}$$

- $\tilde{S}(\mu)$ es denso en $L_\infty(\mu)$

Tema 4: Teorema de Fubini

1. Producto de medidas
   - Producto de espacios medibles
   - Medida producto
   - Caso de $\mathbb{R}^n$

2. Teorema de Fubini
   - Para funciones positivas
   - Aplicaciones
   - Para funciones integrables

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}),\,(Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}),\ (Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{A\times B : A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\}$

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}),\,(Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \{A\times B : A\in\mathcal{A},\, B\in\mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \;=\; \sigma$-álgebra engendrada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$-álgebra engendrada por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

Ejemplos

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}),\,(Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{A\times B : A\in\mathcal{A},\, B\in\mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \;=\; \sigma$-álgebra engendrada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}_n\otimes\mathcal{B}_k=\mathcal{B}_{n+k}$

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \;=\; \sigma$-álgebra engendrada por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}),\ (Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{A\times B : A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\ =\ \sigma$-álgebra engendrada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}_n\otimes\mathcal{B}_k=\mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{M}_k\subsetneq\mathcal{M}_{n+k}$
- X numerable $\implies$ $\mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(Y)=\mathcal{P}(X\times Y)$

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}),\ (Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{A\times B : A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\ =\ \sigma$-álgebra engendrada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}_n\otimes\mathcal{B}_k=\mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{M}_k\subsetneqq\mathcal{M}_{n+k}$
- X numerable $\implies$ $\mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(Y)=\mathcal{P}(X\times Y)$
- $\mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(X)=\mathcal{P}(X\times X)\implies \operatorname{card}X\leqslant\operatorname{card}\mathbb{R}$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- **Sección** de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z\,, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z\,, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z\,, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z\,, \quad f_x(y) = f(x, y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z\,, \quad f^y(x) = f(x, y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

$$(X,\mathcal{A}), (Y,\mathcal{B}), (Z,\mathcal{C}) \quad \text{espacios medibles}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \quad \text{espacio medible producto}$$

$$E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z\,, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z\,, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

$$(X,\mathcal{A}), (Y,\mathcal{B}), (Z,\mathcal{C}) \text{ espacios medibles}$$
$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \text{ espacio medible producto}$$
$$E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X\,, \quad E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z\,, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z\,, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

$$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C}) \quad \text{espacios medibles}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \quad \text{espacio medible producto}$$

$$E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \ \forall x \in X\,, \quad E^y \in \mathcal{A} \ \ \forall y \in Y$

  Las secciones de conjuntos medibles son medibles

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z\,, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z\,, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

$$(X,\mathcal{A}), (Y,\mathcal{B}), (Z,\mathcal{C}) \quad \text{espacios medibles}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \quad \text{espacio medible producto}$$

$$E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad E_x \in \mathcal{B} \;\; \forall x \in X\,, \quad E^y \in \mathcal{A} \;\; \forall y \in Y$

  Las secciones de conjuntos medibles son medibles
- f medible $\quad \Longrightarrow \quad f_x$ medible $\forall x \in X\,,\; f^y$ medible $\forall y \in Y$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z\,, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z\,, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

$$(X,\mathcal{A}), (Y,\mathcal{B}), (Z,\mathcal{C}) \text{ espacios medibles}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \text{ espacio medible producto}$$

$$E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \;\; \forall x \in X\,, \quad E^y \in \mathcal{A} \;\; \forall y \in Y$

  Las secciones de conjuntos medibles son medibles
- f medible $\implies f_x$ medible $\forall x \in X\,,\ f^y$ medible $\forall y \in Y$

  Las funciones medibles son separadamente medibles

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$\varphi(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall\, A\in\mathcal{A}\,,\ \forall\, B\in\mathcal{B}$$

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to[0,\infty]$ verificando que

$$\varphi(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B)\quad \forall\,A\in\mathcal{A},\ \forall\,B\in\mathcal{B}$$

Medida σ-finita

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X, \mathcal{A}, \mu)\,,\ (Y, \mathcal{B}, \nu) \ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall\, A \in \mathcal{A},\ \forall\, B \in \mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$\varphi(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall\, A\in\mathcal{A},\ \forall\, B\in\mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n\in\mathcal{A},\ \mu(A_n)<\infty \ \ \forall\, n\in\mathbb{N}$$

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu) \ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$\varphi(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall\, A\in\mathcal{A},\ \forall\, B\in\mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n\in\mathcal{A},\ \mu(A_n)<\infty \ \ \forall\, n\in\mathbb{N}$$

Existencia y unicidad de la medida producto

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$\varphi(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall\, A\in\mathcal{A},\ \forall\, B\in\mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n\in\mathcal{A},\ \mu(A_n)<\infty \ \ \forall\, n\in\mathbb{N}$$

Existencia y unicidad de la medida producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida } \sigma\text{-finita}$$

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X, \mathcal{A}, \mu),\ (Y, \mathcal{B}, \nu) \ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n \in \mathcal{A},\ \mu(A_n) < \infty \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Existencia y unicidad de la medida producto

$$(X, \mathcal{A}, \mu),\ (Y, \mathcal{B}, \nu) \ \text{ espacios de medida } \sigma\text{-finita}$$

Existe una única medida $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando que

$$[\mu \otimes \nu](A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{B}$$

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n \in \mathcal{A}, \ \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Existencia y unicidad de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

Existe una única medida $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando que

$$[\mu \otimes \nu](A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \mathcal{B}$$

$\mu \otimes \nu$ medida producto, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Completación de una medida

Medida completa

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$
$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$
$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$
- $\overline{\mu}$ está bien definida, es una medida y extiende a μ

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$
- $\overline{\mu}$ está bien definida, es una medida y extiende a μ
- El espacio de medida $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es completo

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$
- $\overline{\mu}$ está bien definida, es una medida y extiende a μ
- El espacio de medida $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es completo
- Si $(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ es un espacio de medida completo,

$$\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}},\ \widetilde{\mu}\big|_{\mathcal{A}} = \mu \implies \overline{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{A}},\ \widetilde{\mu}\big|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$$

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$
- $\overline{\mu}$ está bien definida, es una medida y extiende a μ
- El espacio de medida $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es completo
- Si $(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ es un espacio de medida completo,

$$\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}},\ \widetilde{\mu}\big|_{\mathcal{A}} = \mu \implies \overline{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{A}},\ \widetilde{\mu}\big|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$$

$(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es la completación de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, y $\overline{\mu}$ la completación de la medida μ

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \;\; \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0, \infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B}_n \;\; \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \;\; \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty]$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}$, medida de Borel-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty]$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}$, medida de Borel-Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$

$$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$

$$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Suponemos:

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$

$$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \ \mu(A) = 0$

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$
$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$
$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$
$$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \ \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$

$$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \ \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

Entonces la medida producto $\mu \otimes \nu$ no es completa

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$
$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$
$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$
$$\beta_n = \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \ \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

Entonces la medida producto $\mu \otimes \nu$ no es completa

$\lambda_n \otimes \lambda_k$ no es completa

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneqq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneqq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además, λ_{n+k} extiende a $\lambda_n \otimes \lambda_k$,

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneqq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneqq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además, λ_{n+k} extiende a $\lambda_n \otimes \lambda_k$, que a su vez extiende a β_{n+k}

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneqq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneqq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además, λ_{n+k} extiende a $\lambda_n \otimes \lambda_k$, que a su vez extiende a β_{n+k}
- De hecho:

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneqq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneqq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además, λ_{n+k} extiende a $\lambda_n \otimes \lambda_k$, que a su vez extiende a β_{n+k}
- De hecho:

$$(\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{M}_{n+k}, \lambda_{n+k}) = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \overline{\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k}, \overline{\lambda_n \otimes \lambda_k})$$

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema

Para $f : X \times Y \to [0, \infty]$ medible, definimos:

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema

Para $f : X \times Y \to [0, \infty]$ medible, definimos:

$$\phi : X \to [0, \infty], \quad \phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \to [0, \infty], \quad \psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \quad \forall y \in Y$$

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema

Para $f : X \times Y \to [0, \infty]$ medible, definimos:

$$\phi : X \to [0, \infty], \quad \phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \to [0, \infty], \quad \psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \quad \forall y \in Y$$

Entonces ϕ y ψ son medibles y se verifica que:

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \phi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema

Para $f : X \times Y \to [0, \infty]$ medible, definimos:

$$\phi : X \to [0, \infty], \quad \phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \to [0, \infty], \quad \psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \quad \forall y \in Y$$

Entonces ϕ y ψ son medibles y se verifica que:

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \phi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \; d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \; d\nu(y)$$

Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Cálculo de la medida producto

Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Cálculo de la medida producto

Para $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, definimos:

$$\phi : X \to [0, \infty], \quad \phi(x) = \nu(E_x) \quad \forall x \in X$$
$$\psi : Y \to [0, \infty], \quad \psi(y) = \mu(E^y) \quad \forall y \in Y$$

Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Cálculo de la medida producto

Para $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, definimos:

$$\phi : X \to [0, \infty], \quad \phi(x) = \nu(E_x) \quad \forall x \in X$$
$$\psi : Y \to [0, \infty], \quad \psi(y) = \mu(E^y) \quad \forall y \in Y$$

Entonces ϕ, ψ son medibles y se tiene

$$[\mu \otimes \nu](E) = \int_X \phi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

Cálculo de la medida producto

$$(X, \mathcal{A}, \mu),\ (Y, \mathcal{B}, \nu) \text{ espacios de medida } \sigma\text{-finita}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \text{ espacio de medida producto}$$

Cálculo de la medida producto

Para $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, definimos:

$$\phi : X \to [0, \infty]\,, \quad \phi(x) = \nu(E_x) \quad \forall x \in X$$
$$\psi : Y \to [0, \infty]\,, \quad \psi(y) = \mu(E^y) \quad \forall y \in Y$$

Entonces ϕ, ψ son medibles y se tiene

$$[\mu \otimes \nu](E) = \int_X \phi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$[\mu \otimes \nu](E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

La integral como medida

La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finita

La integral como medida

La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finita

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$ medida de Borel-Lebesgue

La integral como medida

La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finita

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$ medida de Borel-Lebesgue

Para $f : X \to [0, \infty[$, definimos

$$S(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

La integral como medida

La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finita

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$ medida de Borel-Lebesgue

Para $f : X \to [0, \infty[$, definimos

$$S(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

Entonces, f es medible si, y sólo si, $S(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, en cuyo caso,

$$\int_X f \, d\mu = [\mu \otimes \beta]\big(S(f)\big)$$

Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema de Hobson-Tonelli

Para $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ medible, son equivalentes:

Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema de Hobson-Tonelli

Para $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ medible, son equivalentes:

(1) $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$

Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ espacio de medida producto

Teorema de Hobson-Tonelli

Para $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ medible, son equivalentes:

(1) $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$

(2) $\displaystyle\int_X \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \; d\mu(x) < \infty$

Teorema de Hobson-Tonelli

$(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ espacio de medida producto

Teorema de Hobson-Tonelli

Para $f : X\times Y \to \mathbb{K}$ medible, son equivalentes:

(1) $f \in \mathcal{L}_1(\mu\otimes\nu)$

(2) $$\int_X \int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y)\;d\mu(x) < \infty$$

(3) $$\int_Y \int_X |f(x,y)|\,d\mu(x)\;d\nu(y) < \infty$$

Teorema de Fubini para funciones integrables

Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$.

Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$.
Existen conjuntos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que:

$$\begin{aligned} \mu(X \setminus A) = 0\,, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \ \ \forall x \in A \\ \nu(Y \setminus B) = 0\,, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \ \ \forall y \in B \end{aligned}$$

Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$.
Existen conjuntos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que:

$$\mu(X \setminus A) = 0\,, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \ \ \forall x \in A$$
$$\nu(Y \setminus B) = 0\,, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \ \ \forall y \in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \ \ \forall x \in A\,, \quad \phi(x) = 0 \ \ \forall x \in X \setminus A$$
$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \ \ \forall y \in B\,, \quad \psi(y) = 0 \ \ \forall y \in Y \setminus B$$

Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$.
Existen conjuntos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que:

$$\mu(X \setminus A) = 0\,, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \;\; \forall x \in A$$
$$\nu(Y \setminus B) = 0\,, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \;\; \forall y \in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \;\; \forall x \in A\,, \quad \phi(x) = 0 \;\; \forall x \in X \setminus A$$
$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \;\; \forall y \in B\,, \quad \psi(y) = 0 \;\; \forall y \in Y \setminus B$$

se tiene que $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \phi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu\otimes\nu)$.
Existen conjuntos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que:

$$\mu(X\setminus A)=0\,,\quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu)\ \ \forall x \in A$$
$$\nu(Y\setminus B)=0\,,\quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu)\ \ \forall y \in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x) = \int_Y f_x\,d\nu = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\ \ \forall x \in A\,,\quad \phi(x)=0\ \ \forall x \in X\setminus A$$
$$\psi(y) = \int_X f^y\,d\mu = \int_X f(x,y)\,d\mu(x)\ \ \forall y \in B\,,\quad \psi(y)=0\ \ \forall y \in Y\setminus B$$

se tiene que $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \phi\,d\mu = \int_Y \psi\,d\nu$$

Todo ello se resume de nuevo en la expresión:

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\ d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\,d\mu(x)\ d\nu(y)$$

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.
Para $f \in \mathcal{L}_1\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right)$, se tiene:

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.
Para $f \in \mathcal{L}_1\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right)$, se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.
Para $f \in \mathcal{L}_1\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right)$, se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones ϕ y ψ definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \quad \text{para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \quad \text{para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.
Para $f \in \mathcal{L}_1\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right)$, se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones ϕ y ψ definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \quad \text{para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \quad \text{para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

verifican que $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X \times Y} f \, d\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right) = \int_X \phi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.
Para $f \in \mathcal{L}_1\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right)$, se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones ϕ y ψ definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \quad \text{para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

verifican que $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X\times Y} f \, d\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right) = \int_X \phi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

Podemos de nuevo escribir:

$$\int_{X\times Y} f \, d\left(\overline{\mu \otimes \nu}\right) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \; d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \; d\nu(y)$$

Tema 5: Teorema de Radon-Nikodỳm

Integral indefinida de una función medible positiva

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Integral indefinida de f:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Integral indefinida de f:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible,

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\lambda$$

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Integral indefinida de f:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible,

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f \, d\lambda$$

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Integral indefinida de f:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible,

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f \, d\lambda$$

Relación entre λ y μ:

$$E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$$

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Integral indefinida de f:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible,

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f \, d\lambda$$

Relación entre λ y μ:

$$E \in \mathcal{A}, \ \lambda(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$$

Decimos que φ es absolutamente continua con respecto a λ: $\varphi \ll \lambda$

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$?

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$ ¿Es suficiente?

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$ ¿Es suficiente?

En general NO: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ conjuntos medibles Lebesgue, λ número de elementos, μ medida de Lebesgue

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$ ¿Es suficiente?

En general NO: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ conjuntos medibles Lebesgue, λ número de elementos, μ medida de Lebesgue

Teorema de Radon-Nikodým para medidas positivas

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f \, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$ ¿Es suficiente?

En general NO: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ conjuntos medibles Lebesgue, λ número de elementos, μ medida de Lebesgue

Teorema de Radon-Nikodỳm para medidas positivas

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A}, \ \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f \, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$ ¿Es suficiente?

En general NO: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ conjuntos medibles Lebesgue, λ número de elementos, μ medida de Lebesgue

Teorema de Radon-Nikodỳm para medidas positivas

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Entonces existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f \, d\lambda$:

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad \forall \, E \in \mathcal{A}$$

Integral indefinida de una función integrable

Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$.

Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$. Integral indefinida de f:

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$. Integral indefinida de f:

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$. Integral indefinida de f:

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \; (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

μ es combinación lineal de medidas (positivas):

$$\mu(E) = \int_E (\operatorname{Re} f)^+ \, d\lambda - \int_E (\operatorname{Re} f)^- \, d\lambda + i \int_E (\operatorname{Im} f)^+ \, d\lambda - i \int_E (\operatorname{Im} f)^- \, d\lambda$$

Medidas reales o complejas

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones: $\mu(\emptyset) = 0$ y, más importante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \; (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones: $\mu(\emptyset) = 0$ y, más importante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación: $M(\mathcal{A})$ medidas reales o complejas definidas en $\mathcal{A}$, espacio vectorial.
$M^+(\mathcal{A})$ medidas positivas y finitas

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i\, M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \; (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones: $\mu(\emptyset) = 0$ y, más importante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación: $M(\mathcal{A})$ medidas reales o complejas definidas en $\mathcal{A}$, espacio vectorial.
$M^+(\mathcal{A})$ medidas positivas y finitas

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i\, M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ espacio vectorial ordenado: $\mu_1 \leqslant \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones: $\mu(\emptyset) = 0$ y, más importante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación: $M(\mathcal{A})$ medidas reales o complejas definidas en $\mathcal{A}$, espacio vectorial.
$M^+(\mathcal{A})$ medidas positivas y finitas

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i\, M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ espacio vectorial ordenado: $\mu_1 \leqslant \mu_2 \iff \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

¿Es $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ un retículo vectorial?

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \implies \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones: $\mu(\emptyset) = 0$ y, más importante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación: $M(\mathcal{A})$ medidas reales o complejas definidas en $\mathcal{A}$, espacio vectorial.
$M^+(\mathcal{A})$ medidas positivas y finitas

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i\, M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ espacio vectorial ordenado: $\mu_1 \leqslant \mu_2 \iff \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

¿Es $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ un retículo vectorial?
¿Podemos definir coherentemente el valor absoluto de una medida real o incluso el módulo de una medida compleja?

Variación de una medida compleja

Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$ medida real o compleja.

Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$ medida real o compleja. Para $E \in \mathcal{A}$ escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,, \; A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N} , \; A_n \cap A_m = \emptyset \; (n \neq m) \right\}$$

Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$ medida real o compleja. Para $E \in \mathcal{A}$ escribimos:

$$\Pi(E) = \Big\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,,\ A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \Big\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \Big\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$ medida real o compleja. Para $E \in \mathcal{A}$ escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,,\; A_n \in \mathcal{A} \;\forall n \in \mathbb{N},\; A_n \cap A_m = \emptyset \;(n \neq m) \right\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \right\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

$|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es la variación de la medida μ

Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$ medida real o compleja. Para $E \in \mathcal{A}$ escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,,\ A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \right\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \right\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

$|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es la variación de la medida μ

Teorema (la propiedad clave de la variación)

La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:

$$\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$$

Propiedades de retículo

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \; \forall\, E \in \mathcal{A}$$

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad |\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \ \ \forall E \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \ \ \forall E \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|)\,; \quad \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \ \ \forall E \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A},\mathbb{R})$ es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|)\,; \quad \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

- Descomposición de Jordan de una medida real:

$$\mu \in M(\mathcal{A},\mathbb{R}) \implies \begin{cases} \mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \mu \vee 0 \\ \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = -(\mu \wedge 0) \end{cases}$$

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \ \ \forall E \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|)\,; \quad \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

- Descomposición de Jordan de una medida real:

$$\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \implies \begin{cases} \mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \mu \vee 0 \\ \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = -(\mu \wedge 0) \end{cases}$$

  Propiedades:

$$\mu^+, \mu^- \in M^+(\mathcal{A}), \quad \mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \ \text{ con } \ \mu_1, \mu_2 \in M^+(\mathcal{A}) \implies \mu^+ \leqslant \mu_1\,, \ \mu^- \leqslant \mu_2$$

Norma de una medida

Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

se obtiene una norma en $M(\mathcal{A})$, "Variación total"

Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

se obtiene una norma en $M(\mathcal{A})$, "Variación total"

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega)\,, \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

se obtiene una norma en $M(\mathcal{A})$, "Variación total"

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

Ambas normas son equivalentes

$$\|\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\| \leqslant 4\,\|\mu\|_\infty \qquad \big(\lambda \in M(\mathcal{A})\big)$$

Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

se obtiene una norma en $M(\mathcal{A})$, "Variación total"

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

Ambas normas son equivalentes

$$\|\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\| \leqslant 4\,\|\mu\|_\infty \qquad \big(\lambda \in M(\mathcal{A})\big)$$

Y ambas son completas. $M(\mathcal{A})$ espacio de Banach con la norma de la variación total

Continuidad absoluta

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación: $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ E \in \mathcal{A}, \ \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación: $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

Teorema de Radon-Nikodỳm

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación: $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

Teorema de Radon-Nikodỳm

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = 0$$

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación: $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

Teorema de Radon-Nikodỳm

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Entonces existe una única $f \in L_1(\lambda)$ tal que μ es la integral indefinida de f, es decir,

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Unicidad

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \, : \, E \in \mathcal{A}, \; 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \, : \, E \in \mathcal{A}, \; 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\Big(\{x \in \Omega \, : \, f(x) \notin \overline{R(f)}\}\Big) = 0 \quad \Big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\Big)$

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \, : \, E \in \mathcal{A}, \; 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\Big(\{x \in \Omega \, : \, f(x) \notin \overline{R(f)}\}\Big) = 0 \qquad \Big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\Big)$

Descomposición polar

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f\, d\lambda \,:\, E \in \mathcal{A},\ 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\Big(\{x \in \Omega \,:\, f(x) \notin \overline{R(f)}\}\Big) = 0 \quad \Big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\Big)$

Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A})$.

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \, : \, E \in \mathcal{A}, \; 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\Big(\{x \in \Omega \, : \, f(x) \notin \overline{R(f)}\}\Big) = 0 \quad \Big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\Big)$

Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A})$. Existe $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \;\; \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h \, d|\mu| \;\; \forall E \in \mathcal{A}$$

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda : E \in \mathcal{A}, \; 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\Big(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}\Big) = 0 \quad \Big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\Big)$

Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A})$. Existe $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \;\; \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h \, d|\mu| \;\; \forall E \in \mathcal{A}$$

h está determinada $|\mu|$-c.p.d. "Descomposición polar"

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \, : \, E \in \mathcal{A}, \; 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\big(\{x \in \Omega \, : \, f(x) \notin \overline{R(f)}\}\big) = 0 \quad \big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\big)$

Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A})$. Existe $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \;\; \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h \, d|\mu| \;\; \forall E \in \mathcal{A}$$

h está determinada $|\mu|$-c.p.d. "Descomposición polar"

Integral asociada a una medida real o compleja:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \, h \, d|\mu| \quad \big(f \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \, : \, E \in \mathcal{A}, \ 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\Big(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}\Big) = 0 \quad \Big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\Big)$

Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A})$. Existe $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \ \ \forall x \in \Omega \quad \text{ y } \quad \mu(E) = \int_E h \, d|\mu| \ \ \forall E \in \mathcal{A}$$

h está determinada $|\mu|$-c.p.d. "Descomposición polar"

Integral asociada a una medida real o compleja:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \, h \, d|\mu| \quad \big(f \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

Simbólicamente: $d\mu = h \, d|\mu|$

Descomposición de Hahn de una medida real

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real).

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

- $\Omega = A^+ \cup A^-$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \ \Rightarrow \ \mu(E) \geqslant 0 \\ E \subseteq A^- \ \Rightarrow \ \mu(E) \leqslant 0 \end{cases}$$

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

- $\Omega = A^+ \cup A^-$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$,

$$E \in \mathcal{A} \ \begin{cases} E \subseteq A^+ \ \Rightarrow \ \mu(E) \geqslant 0 \\ E \subseteq A^- \ \Rightarrow \ \mu(E) \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

- $\Omega = A^+ \cup A^-$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$,

$$E \in \mathcal{A} \ \begin{cases} E \subseteq A^+ \ \Rightarrow \ \mu(E) \geqslant 0 \\ E \subseteq A^- \ \Rightarrow \ \mu(E) \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

- $\Omega = A^+ \cup A^-$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \ \Rightarrow \ \mu(E) \geqslant 0 \\ E \subseteq A^- \ \Rightarrow \ \mu(E) \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+)$, $\mu^-(E) = -\mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

- $\Omega = A^+ \cup A^-$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ & \Rightarrow \quad \mu(E) \geqslant 0 \\ E \subseteq A^- & \Rightarrow \quad \mu(E) \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+)$, $\mu^-(E) = -\mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- Unicidad: si (B^+, B^-) es otra descomposición de Hahn,

$$|\mu|\Big[(A^+ \setminus B^+) \cup (B^+ \setminus A^+)\Big] = |\mu|\Big[(A^- \setminus B^-) \cup (B^- \setminus A^-)\Big] = 0$$

Revisión de la integral indefinida

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \displaystyle\int_E f \, d\lambda \ \ (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \;\; (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f|\, d\lambda \;\; \forall E \in \mathcal{A}$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f| \, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f|\, d\lambda \ \ \forall\, E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que $|h(x)| = 1$ y $f(x) = h(x)|f(x)|$ para casi todo $x \in \Omega$, se tiene $d\mu = h\, d|\mu|$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \ \ (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f|\, d\lambda \ \ \forall\, E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que $|h(x)| = 1$ y $f(x) = h(x)|f(x)|$ para casi todo $x \in \Omega$, se tiene $d\mu = h\, d|\mu|$
- Integral asociada a μ:

$$\int_E g\, d\mu = \int_E g\, f\, d\lambda \quad \big(g \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

De hecho, $L_1(|\mu|) = \{g \in L_0(\mu) : gf \in L_1(\lambda)\}$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f|\, d\lambda \ \ \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que $|h(x)| = 1$ y $f(x) = h(x)|f(x)|$ para casi todo $x \in \Omega$, se tiene $d\mu = h\, d|\mu|$
- Integral asociada a μ:

$$\int_E g\, d\mu = \int_E g\, f\, d\lambda \quad \big(g \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

  De hecho, $L_1(|\mu|) = \{g \in L_0(\mu) : gf \in L_1(\lambda)\}$
- Si $f \in L_1(\mu, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \text{Jordan: } \mu^+(E) = \int_E f^+\, d\lambda, \quad \mu^-(E) = \int_E f^-\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A} \\ \text{Hahn: } \quad A^+ = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant 0\}, \quad A^- = \{x \in \Omega : f(x) < 0\} \end{cases}$$

Ortogonalidad de medidas

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \ \text{concentrada en} \ A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \ \ \forall E \in \mathcal{A}$$

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \ \text{concentrada en} \ A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si} \ \mu \geqslant 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si} \ \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geqslant 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

μ_1 y μ_2 son ortogonales (o mutuamente singulares) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \iff \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \ \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \ \text{concentrada en} \ A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \ \ \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geqslant 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

μ_1 y μ_2 son ortogonales (o mutuamente singulares) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \ \Leftrightarrow \ \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \ \mu_k \ \text{concentrada en} \ A_k, \, k = 1, 2$$

Descomposición de Lebesgue

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \ \text{concentrada en} \ A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \ \ \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si} \ \ \mu \geqslant 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si} \ \ \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

μ_1 y μ_2 son ortogonales (o mutuamente singulares) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \ \Leftrightarrow \ \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \ \mu_k \ \text{concentrada en} \ A_k, \ k = 1, 2$$

Descomposición de Lebesgue

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$.

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \ \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geqslant 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

μ_1 y μ_2 son ortogonales (o mutuamente singulares) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \ \Leftrightarrow \ \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \ \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

Descomposición de Lebesgue

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$. Entonces μ admite una única descomposición de la forma $\mu = \mu_a + \mu_s$ donde $\mu_a \ll \lambda$ y $\mu_s \perp \lambda$

Resumen

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \ \forall\, E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \;\forall\, E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

(2) $M(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) \quad (\mu \in M(\mathcal{A})$. La convergencia es la uniforme en $\mathcal{A}$

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

(2) $M(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) \quad (\mu \in M(\mathcal{A})$. La convergencia es la uniforme en $\mathcal{A}$

(3) $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, con el orden natural, es también un retículo vectorial

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

(2) $M(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ $(\mu \in M(\mathcal{A})$. La convergencia es la uniforme en $\mathcal{A}$

(3) $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, con el orden natural, es también un retículo vectorial

Fijada ahora una medida σ-finita $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ consideramos dos subespacios de $M(\mathcal{A})$: $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$ y $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

(2) $M(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ $(\mu \in M(\mathcal{A})$. La convergencia es la uniforme en $\mathcal{A}$

(3) $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, con el orden natural, es también un retículo vectorial

Fijada ahora una medida σ-finita $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ consideramos dos subespacios de $M(\mathcal{A})$: $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$ y $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

(4) Se verifica que $M(\mathcal{A}) = M_a(\lambda) \oplus M_s(\lambda)$, suma topológico-directa, ya que $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ para cualesquiera $\mu \in M_a(\lambda)$ y $\nu \in M_s(\lambda)$

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

(2) $M(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ $(\mu \in M(\mathcal{A})$. La convergencia es la uniforme en $\mathcal{A}$

(3) $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, con el orden natural, es también un retículo vectorial

Fijada ahora una medida σ-finita $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ consideramos dos subespacios de $M(\mathcal{A})$: $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$ y $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

(4) Se verifica que $M(\mathcal{A}) = M_a(\lambda) \oplus M_s(\lambda)$, suma topológico-directa, ya que $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ para cualesquiera $\mu \in M_a(\lambda)$ y $\nu \in M_s(\lambda)$

(5) Para $f \in L_1(\lambda)$ sea $T(f)$ su integral indefinida:

$$[T(f)](E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

Entonces T es una biyección lineal isométrica de $L_1(\lambda)$ sobre $M_a(\lambda)$. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, T es también un isomorfismo de retículos

Tema 6: Teorema de Representación de Riesz

Funciones continuas de soporte compacto

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L\,, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

Funcionales lineales positivos

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f \, d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f \, d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\Phi_\mu : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), \ f \geqslant 0 \implies \Phi_\mu(f) \geqslant 0$$

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f \, d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\Phi_\mu : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), \ f \geqslant 0 \implies \Phi_\mu(f) \geqslant 0$$

¡El recíproco también es cierto!: Todo funcional lineal positivo es una integral

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L)\,,\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L),\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Entonces existe una única medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando:

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L),\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Entonces existe una única medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando:

(1) $\mu(E) = \inf \{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\} \quad (E \in \mathcal{B})$

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L),\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Entonces existe una única medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando:

(1) $\mu(E) = \inf \{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\} \quad (E \in \mathcal{B})$

(2) $\mu(U) = \sup \{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq U\} \quad (U \subseteq L,\ U$ abierto)

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L),\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Entonces existe una única medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando:

(1) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto},\ E \subseteq U \subseteq L\} \quad (E \in \mathcal{B})$

(2) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto},\ K \subseteq U\} \quad (U \subseteq L,\ U \text{ abierto})$

(3) μ es localmente finita

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L),\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Entonces existe una única medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ verificando:

(1) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\} \quad (E \in \mathcal{B})$

(2) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq U\} \quad (U \subseteq L,\ U$ abierto)

(3) μ es localmente finita

(4) $\Phi(f) = \int_L f\, d\mu \quad \big(f \in C_{00}(L)\big)$

Medidas de Borel regulares

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \operatorname{ínf}\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular $=$ regular exterior e interior

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular $=$ regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular $=$ regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Algunas observaciones

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular $=$ regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Algunas observaciones

- Si μ es una medida de Radon, todo conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}$ que verifique $\mu(E) < \infty$ es regular interior para μ.

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular $=$ regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Algunas observaciones

- Si μ es una medida de Radon, todo conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}$ que verifique $\mu(E) < \infty$ es regular interior para μ. Por tanto, toda medida de Radon finita es regular

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular $=$ regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Algunas observaciones

- Si μ es una medida de Radon, todo conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}$ que verifique $\mu(E) < \infty$ es regular interior para μ. Por tanto, toda medida de Radon finita es regular
- Si X es σ-compacto, toda medida de Borel positiva en X, regular exterior y localmente finita es regular

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ abierto, $E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ compacto, $K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular $=$ regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Algunas observaciones

- Si μ es una medida de Radon, todo conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}$ que verifique $\mu(E) < \infty$ es regular interior para μ. Por tanto, toda medida de Radon finita es regular
- Si X es σ-compacto, toda medida de Borel positiva en X, regular exterior y localmente finita es regular
- Si X es localmente compacto y todo abierto de X es unión numerable de compactos, entonces toda medida de Borel positiva y localmente finita en X es regular

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$.

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Radon μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Radon μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso σ-compacto

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Radon μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y σ-compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$.

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Radon μ en L que verifica

$$\int_K f\, d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y σ-compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en L, regular exterior y localmente finita, que verifica

$$\int_K f\, d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Radon μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y σ-compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en L, regular exterior y localmente finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho, μ es regular

TRR, caso compacto

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$.

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\, d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\, d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Teorema de representación de Riesz, caso localmente σ-compacto

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Teorema de representación de Riesz, caso localmente σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de L puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$.

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Teorema de representación de Riesz, caso localmente σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de L puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel localmente finita μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Teorema de representación de Riesz, caso localmente σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de L puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel localmente finita μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Consecuencias de la regularidad

Teorema de Lusin

Consecuencias de la regularidad

Teorema de Lusin

Sea μ una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L y sea $f : L \to \mathbb{K}$ una función medible verificando:

$$\mu\Big(\{t \in L : f(t) \neq 0\}\Big) < \infty$$

Consecuencias de la regularidad

Teorema de Lusin

Sea μ una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L y sea $f : L \to \mathbb{K}$ una función medible verificando:

$$\mu\Big(\{t \in L : f(t) \neq 0\}\Big) < \infty$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $g \in C_{00}(L)$ verificando:

$$\mu\Big(\{t \in L : f(x) \neq g(x)\}\Big) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_\infty \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

Consecuencias de la regularidad

Teorema de Lusin

Sea μ una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L y sea $f : L \to \mathbb{K}$ una función medible verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(t) \neq 0\}\big) < \infty$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $g \in C_{00}(L)$ verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(x) \neq g(x)\}\big) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_\infty \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

Corolario importante

Consecuencias de la regularidad

Teorema de Lusin

Sea μ una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L y sea $f : L \to \mathbb{K}$ una función medible verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(t) \neq 0\}\big) < \infty$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $g \in C_{00}(L)$ verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(x) \neq g(x)\}\big) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_\infty \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

Corolario importante

Si μ es una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L, entonces $C_{00}(L)$ es denso en $L_p(\mu)$ para $0 < p < \infty$

Motivación

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \implies \exists\ K, U\ :\ \begin{cases} K \text{ compacto},\ U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \ \text{ y } \ |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \implies \exists\, K, U \ : \begin{cases} K \text{ compacto},\ U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \ \text{ y } \ |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \implies \exists\ K, U\ :\ \begin{cases} K \text{ compacto},\ U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \text{ y } |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de $M(\mathcal{B})$, luego espacio de Banach con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \qquad \big(\lambda \in M(L)\big)$$

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \implies \exists\, K, U \ : \begin{cases} K \text{ compacto},\ U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \ \text{ y } \ |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de $M(\mathcal{B})$, luego espacio de Banach con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \qquad \big(\lambda \in M(L)\big)$$

$$\lambda \in M(L) \ \Rightarrow \ C_{00}(L) \subseteq \mathcal{L}_1(|\lambda|) \text{ y podemos definir } \Phi_\lambda : C_{00}(L) \to \mathbb{K} \text{ por}$$

$$\Phi_\lambda(f) = \int_L f\, d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \implies \exists\, K, U\ :\ \begin{cases} K \text{ compacto},\ U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \ \text{ y } \ |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de $M(\mathcal{B})$, luego espacio de Banach con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \qquad \big(\lambda \in M(L)\big)$$

$\lambda \in M(L) \ \Rightarrow\ C_{00}(L) \subseteq \mathcal{L}_1(|\lambda|)$ y podemos definir $\Phi_\lambda : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ por

$$\Phi_\lambda(f) = \int_L f\, d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

Φ_λ es lineal, puede no ser positivo, pero es continuo: $\Phi_\lambda \in C_{00}(L)^*$

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M \|x\|, \ \forall x \in X$

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\,\|x\|, \ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

X, Y espacios normados,
$L(X, Y)$ espacio vectorial de los operadores lineales continuos de X en Y.

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M \|x\|, \ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

X, Y espacios normados,
$L(X, Y)$ espacio vectorial de los operadores lineales continuos de X en Y.

$$\|T\| = \min\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \ \forall x \in X\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$$

$$= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$$

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M \|x\|, \ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

X, Y espacios normados,
$L(X, Y)$ espacio vectorial de los operadores lineales continuos de X en Y.

$$\|T\| = \text{mín}\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \ \forall x \in X\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$$
$$= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$$

Norma de operadores. $L(X, Y)$ espacio normado, espacio de operadores

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M \|x\|, \ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

X, Y espacios normados,
$L(X, Y)$ espacio vectorial de los operadores lineales continuos de X en Y.

$$\|T\| = \text{mín}\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \ \forall x \in X\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$$
$$= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$$

Norma de operadores. $L(X, Y)$ espacio normado, espacio de operadores
Convergencia en $L(X, Y)$ $=$ Convergencia uniforme en B_X

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M \|x\|, \ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

X, Y espacios normados,
$L(X,Y)$ espacio vectorial de los operadores lineales continuos de X en Y.

$$\|T\| = \min\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \ \forall x \in X\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$$
$$= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$$

Norma de operadores. $L(X,Y)$ espacio normado, espacio de operadores
Convergencia en $L(X,Y)$ $=$ Convergencia uniforme en B_X
Y completo $\Longrightarrow$ $L(X,Y)$ completo

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \|x\|, \ \forall x \in X$

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall\, x \in X$

(3) f está acotado en B_X

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall\, x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall\, x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Norma dual

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \|x\|, \forall x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Norma dual

X espacio normado, X^* funcionales lineales continuos en X, espacio de Banach.

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Norma dual

X espacio normado, X^* funcionales lineales continuos en X, espacio de Banach.

$$\|f\| = \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Norma dual

X espacio normado, X^* funcionales lineales continuos en X, espacio de Banach.

$$\|f\| = \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

Norma dual. X^* espacio dual de X

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists\, M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Norma dual

X espacio normado, X^* funcionales lineales continuos en X, espacio de Banach.

$$\|f\| = \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

Norma dual. X^* espacio dual de X

Para espacios X concretos, es útil tener descripciones concretas de X^*

Teorema de representación de Riesz

Teorema de representación de Riesz

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \equiv M(L)$$

Teorema de representación de Riesz

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \equiv M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico Ψ de $M(L)$ sobre $C_{00}(L)^*$ viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f \, d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L)\big)$$

Teorema de representación de Riesz

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \equiv M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico Ψ de $M(L)$ sobre $C_{00}(L)^*$ viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f \, d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L)\big)$$

Caso compacto

Teorema de representación de Riesz

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \equiv M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico Ψ de $M(L)$ sobre $C_{00}(L)^*$ viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f \, d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L)\big)$$

Caso compacto

$$C(K)^* \equiv M(K)$$

Ejemplo

Ejemplo

Fijada $g \in L_1[0,1]$, para $f \in C[0,1]$ se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

Ejemplo

Fijada $g \in L_1[0,1]$, para $f \in C[0,1]$ se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

Es claro que $\varphi \in C[0,1]^*$.

Ejemplo

Fijada $g \in L_1[0,1]$, para $f \in C[0,1]$ se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

Es claro que $\varphi \in C[0,1]^*$. De hecho tenemos

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |g(t)|\, dt = \|g\|_1$$

Ejemplo

Fijada $g \in L_1[0,1]$, para $f \in C[0,1]$ se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

Es claro que $\varphi \in C[0,1]^*$. De hecho tenemos

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |g(t)|\, dt = \|g\|_1$$

Obsérvese que estamos viendo

$$L_1[0,1] \subseteq M[0,1] \equiv C[0,1]^*$$

Tema 7: Espacios Vectoriales Topológicos

Preliminares algebraicos

Notación

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}, \ \ \alpha \in \mathbb{K}, \ \ A, B \subset X, \ \ x \in X,$

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \qquad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \qquad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}, \ \ \alpha \in \mathbb{K}, \ \ A, B \subset X, \ \ x \in X,$

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \qquad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \qquad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de $X \iff \mathbb{K} A + A \subset A$

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \qquad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \qquad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de X $\iff$ $\mathbb{K} A + A \subset A$
- A convexo $\iff$ $(1 - \rho) A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0, 1]$

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de X $\iff$ $\mathbb{K} A + A \subset A$
- A convexo $\iff$ $(1-\rho) A + \rho A \subset A \;\; \forall \rho \in [0,1]$

Conjuntos absorbentes y equilibrados

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de X $\iff$ $\mathbb{K} A + A \subset A$
- A convexo $\iff$ $(1-\rho) A + \rho A \subset A \ \ \forall \rho \in [0,1]$

Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$ es absorbente cuando $X = \mathbb{R}^+ A$

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de $X \iff \mathbb{K} A + A \subset A$
- A convexo $\iff (1-\rho) A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0,1]$

Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$ es absorbente cuando $X = \mathbb{R}^+ A$
- $B \subset X$ es equilibrado cuando $\mathbb{D} B = B$, donde $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant 1\}$

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \qquad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \qquad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de $X \iff \mathbb{K} A + A \subset A$
- A convexo $\iff (1-\rho) A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0,1]$

Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$ es absorbente cuando $X = \mathbb{R}^+ A$
- $B \subset X$ es equilibrado cuando $\mathbb{D} B = B$, donde $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant 1\}$
  Para $A \subset X$, $\mathbb{D} A$ es la envolvente equilibrada de A

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \ \ (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \ \ (\lambda,x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \ \ (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \ \ (\lambda,x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \ (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)

EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \ \ (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \ \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)

EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \ \ (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \ \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)
EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X.

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda,x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)
EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X.

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)
EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X.

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$$\begin{gathered} \mathcal{B} \text{ base de entornos de cero en } X \\ \Downarrow \\ \{x + B : B \in \mathcal{B}\} \text{ base de entornos de cada } x \in X \end{gathered}$$

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda,x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)

EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X.

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$$\mathcal{B} \text{ base de entornos de cero en } X$$
$$\Downarrow$$
$$\{x+B : B \in \mathcal{B}\} \text{ base de entornos de cada } x \in X$$

La topología de X queda determinada por $\mathcal{B}$

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda,x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)
EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X.
Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$$\mathcal{B} \text{ base de entornos de cero en } X$$
$$\Downarrow$$
$$\{x + B : B \in \mathcal{B}\} \text{ base de entornos de cada } x \in X$$

La topología de X queda determinada por $\mathcal{B}$
¿Cómo son las bases de entornos de cero para una topología vectorial?

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D} V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D} V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

(a) $\forall U, V \in \mathcal{B} \;\; \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D} V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

(a) $\forall U, V \in \mathcal{B} \ \ \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

(b) $U \in \mathcal{B} \implies U$ absorbente

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

(a) $\forall U, V \in \mathcal{B} \;\; \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

(b) $U \in \mathcal{B} \implies U$ absorbente

(c) $U \in \mathcal{B} \implies U$ equilibrado

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D} V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

(a) $\forall U, V \in \mathcal{B} \ \ \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

(b) $U \in \mathcal{B} \implies U$ absorbente

(c) $U \in \mathcal{B} \implies U$ equilibrado

(d) $\forall U \in \mathcal{B} \ \ \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D} V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

(a) $\forall U, V \in \mathcal{B} \;\; \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

(b) $U \in \mathcal{B} \implies U$ absorbente

(c) $U \in \mathcal{B} \implies U$ equilibrado

(d) $\forall U \in \mathcal{B} \;\; \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

Entonces existe una (única) topología vectorial en X para la cual $\mathcal{B}$ es base de entornos de cero

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \quad \forall\, x,y \in X$$

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

(1) $\nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \quad \forall x,y \in X$

(2) $\lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

(1) $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$

(2) $\lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \nu\left(\dfrac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$\text{(1)}\quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \quad \forall x,y \in X$$

$$\text{(2)}\quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$\text{(3)}\quad \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x)\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$, luego toda seminorma es una pseudonorma

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$\text{(1)} \quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$\text{(2)} \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$\text{(3)} \quad \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X,$
luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$\text{(1)}\quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$\text{(2)}\quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$\text{(3)}\quad \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\, \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$, luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$$

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \quad \forall x,y \in X$$

$$(2) \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \quad \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$, luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$$

La familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en X,

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$\text{(1)}\quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \quad \forall x,y \in X$$

$$\text{(2)}\quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$\text{(3)}\quad \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$,
luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$$

La familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en X, la topología asociada a la pseudonorma ν, con la que X es un EVT pseudonormable (seminormable cuando ν es una seminorma)

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$(1)\quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \quad \forall x,y \in X$$

$$(2)\quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$,
luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$$

La familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en X, la topología asociada a la pseudonorma ν, con la que X es un EVT pseudonormable (seminormable cuando ν es una seminorma)
Definiendo $\delta(x,y) = \nu(x-y)$ para $x,y \in X$, se obtiene una semidistancia que genera la misma topología.

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

(1) $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$

(2) $\lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$,
luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$$

La familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en X, la topología asociada a la pseudonorma ν, con la que X es un EVT pseudonormable (seminormable cuando ν es una seminorma)

Definiendo $\delta(x,y) = \nu(x-y)$ para $x, y \in X$, se obtiene una semidistancia que genera la misma topología.

Seminormable $\implies$ Pseudonormable $\implies$ Semimetrizable

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados
- X es un espacio topológico regular

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados
- X es un espacio topológico regular
- Los axiomas de separación $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ son equivalentes para X.
  EVT separado

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados
- X es un espacio topológico regular
- Los axiomas de separación $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ son equivalentes para X. EVT separado
- X separado $\iff$ $\{0\}$ cerrado

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados
- X es un espacio topológico regular
- Los axiomas de separación $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ son equivalentes para X. EVT separado
- X separado $\iff$ $\{0\}$ cerrado
- Un espacio pseudonormable es separado cuando su pseudonorma ν es total: $x \in X,\ \nu(x) = 0 \implies x = 0$

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados
- X es un espacio topológico regular
- Los axiomas de separación $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ son equivalentes para X. EVT separado
- X separado $\iff$ $\{0\}$ cerrado
- Un espacio pseudonormable es separado cuando su pseudonorma ν es total: $x \in X, \ \nu(x) = 0 \implies x = 0$

seminorma total $=$ norma

Continuidad uniforme

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$

f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

Continuidad uniforme

X,Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$

f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a,b \in A,\ a-b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a)-f(b) \in V$$

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$
f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a, b \in A, \ a - b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$
f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a, b \in A, \ a - b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ operador lineal. Equivalen:

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$

f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a, b \in A,\ a - b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ operador lineal. Equivalen:

(i) T es uniformemente continuo en X

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$

f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a, b \in A,\ a - b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ operador lineal. Equivalen:

(i) T es uniformemente continuo en X

(ii) T es continuo en X

Continuidad uniforme

X,Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$
f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a,b \in A,\ a-b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a)-f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X,Y EVT, $T : X \to Y$ operador lineal. Equivalen:

(i) T es uniformemente continuo en X

(ii) T es continuo en X

(iii) T es continuo en 0

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$
f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a, b \in A,\ a - b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ operador lineal. Equivalen:

(i) T es uniformemente continuo en X

(ii) T es continuo en X

(iii) T es continuo en 0

$L(X, Y)$ operadores lineales continuos

Redes

Redes

- Conjunto dirigido: $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leqslant \lambda, \; \lambda_2 \leqslant \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

Redes

- Conjunto dirigido: $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leqslant \lambda, \ \lambda_2 \leqslant \lambda$$

  Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

- Red en un conjunto X: Aplicación $\varphi : \Lambda \to X$, con Λ dirigido. Notación: $x_\lambda = \varphi(\lambda)$, $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$. Ejemplo: sucesión

Redes

- Conjunto dirigido: $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leqslant \lambda, \; \lambda_2 \leqslant \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

- Red en un conjunto X: Aplicación $\varphi : \Lambda \to X$, con Λ dirigido. Notación: $x_\lambda = \varphi(\lambda)$, $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$. Ejemplo: sucesión
- Red convergente: X espacio topológico, $\{x_\lambda\}$ red en X, $x \in X$:

$$\{x_\lambda\} \to x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \;\; \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leqslant \lambda\} \subset U$$

Redes

- Conjunto dirigido: $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leqslant \lambda, \ \lambda_2 \leqslant \lambda$$

  Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

- Red en un conjunto X: Aplicación $\varphi : \Lambda \to X$, con Λ dirigido. Notación: $x_\lambda = \varphi(\lambda)$, $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$. Ejemplo: sucesión

- Red convergente: X espacio topológico, $\{x_\lambda\}$ red en X, $x \in X$:

$$\{x_\lambda\} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leqslant \lambda\} \subset U$$

- Las redes convergentes caracterizan la topología:

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \{a_\lambda\} \ : \ a_\lambda \in A \ \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \{a_\lambda\} \to x$$

Redes

- Conjunto dirigido: $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \ \ \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leqslant \lambda, \ \lambda_2 \leqslant \lambda$$

  Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

- Red en un conjunto X: Aplicación $\varphi : \Lambda \to X$, con Λ dirigido. Notación: $x_\lambda = \varphi(\lambda)$, $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$. Ejemplo: sucesión

- Red convergente: X espacio topológico, $\{x_\lambda\}$ red en X, $x \in X$:

$$\{x_\lambda\} \to x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leqslant \lambda\} \subset U$$

- Las redes convergentes caracterizan la topología:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{a_\lambda\} \ : \ a_\lambda \in A \ \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \{a_\lambda\} \to x$$

- Ejemplo: En todo EVT, el cierre de un subespacio es un subespacio

Complitud

Red de Cauchy

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \ \Rightarrow \ d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \ \Rightarrow \ x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Uso de la complitud

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Uso de la complitud

- E completo, $F = \overline{F} \cap E \;\Rightarrow\; F$ completo

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Uso de la complitud

- E completo, $F = \overline{F} \cap E \;\;\Rightarrow\;\; F$ completo
- X separado, $X \supset E$ completo $\;\;\Rightarrow\;\; E = \overline{E}$

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \ \Rightarrow \ d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \ \Rightarrow \ x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Uso de la complitud

- E completo, $F = \overline{F} \cap E \ \ \Rightarrow \ \ F$ completo
- X separado, $X \supset E$ completo $\ \ \Rightarrow \ \ E = \overline{E}$
- Todo EVT se puede completar

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; d\big(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\big) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Uso de la complitud

- E completo, $F = \overline{F} \cap E \;\;\Rightarrow\;\; F$ completo
- X separado, $X \supset E$ completo $\;\;\Rightarrow\;\; E = \overline{E}$
- Todo EVT se puede completar
- Extensión de funciones: X, Y EVT, Y separado y completo, $M \subset X$ subespacio denso, $T \in L(M,Y)$. Existe única extensión $\widetilde{T} \in L(X,Y)$. Por tanto $L(M,Y) \equiv L(X,Y)$

Precompacidad

Conjuntos precompactos

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \;\text{ precompacto } \iff \forall\, \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \ \text{ precompacto } \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto } \iff \forall U \in \mathcal{U}(0),\ \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \ \text{ precompacto } \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \ \text{precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \ \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0),\ \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0),\ \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies$ $\overline{A}$ precompacto

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \ \text{ precompacto } \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto } \iff \forall U \in \mathcal{U}(0),\ \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies$ $\overline{A}$ precompacto
- A precompacto, f uniformemente continua $\implies$ $f(A)$ precompacto

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \;\; \text{precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \; \text{precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \; \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies$ $\overline{A}$ precompacto
- A precompacto, f uniformemente continua $\implies$ $f(A)$ precompacto

Caracterización de la compacidad

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \ \text{precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \ \text{precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0),\ \exists F \ \text{finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies$ $\overline{A}$ precompacto
- A precompacto, f uniformemente continua $\implies$ $f(A)$ precompacto

Caracterización de la compacidad

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{compacto} \iff A \ \text{precompacto y completo}$$

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \ \text{ precompacto } \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \ \text{precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \ \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies$ $\overline{A}$ precompacto
- A precompacto, f uniformemente continua $\implies$ $f(A)$ precompacto

Caracterización de la compacidad

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{ compacto } \iff A \ \text{ precompacto y completo}$$

Por tanto, si X es completo,

$$A \ \text{ precompacto } \iff A \ \text{ relativamente compacto}$$

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \text{ acotado} \iff \forall U \text{ entorno de cero en } X, \ \exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{acotado} \iff \forall U \ \text{entorno de cero en } X, \ \exists \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \;\text{ acotado } \iff \forall U \;\text{ entorno de cero en } X, \;\exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \;\text{ acotado } \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{ acotado } \iff \forall U \ \text{ entorno de cero en } X, \ \exists \, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \ \text{ acotado } \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general,

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{ acotado } \iff \forall U \ \text{ entorno de cero en } X, \ \exists \, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \ \text{ acotado } \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \ \text{acotado} \iff \forall U \ \text{ entorno de cero en } X, \ \exists \, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \ \ \text{acotado} \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{ acotado } \iff \forall U \ \text{ entorno de cero en } X, \ \exists \, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \ \text{ acotado } \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto $\implies$ Acotado

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \text{ acotado } \iff \forall U \text{ entorno de cero en } X, \ \exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \text{ acotado } \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto $\implies$ Acotado
- A acotado $\iff \left[\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow \left\{\dfrac{a_n}{n}\right\} \to 0\right]$

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{acotado} \iff \forall U \ \text{entorno de cero en } X, \ \exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \ \text{acotado} \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto $\implies$ Acotado
- A acotado $\iff \left[\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow \left\{\dfrac{a_n}{n}\right\} \to 0\right]$
- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \text{ acotado} \iff \forall U \text{ entorno de cero en } X, \; \exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \text{ acotado} \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto $\implies$ Acotado
- A acotado $\iff \left[\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow \left\{\dfrac{a_n}{n}\right\} \to 0\right]$
- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A acotado $\implies \overline{A}$ acotado

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

Acotación de operadores lineales

X,Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:

$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:

$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:
$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:

$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X,\ A \text{ acotado} \implies T(A) \ \text{ acotado en } \ Y$$

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:
$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X,\ A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d)

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:
$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X,\ A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d)
- En general, ninguna reversible

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:

$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X, \ A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d)
- En general, ninguna reversible
- Si X tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:

$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X, \ A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d)
- En general, ninguna reversible
- Si X tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes
- Si Y tiene un entorno de cero acotado, (b) $\Rightarrow$ (a)

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:
$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X, \ A \text{ acotado} \implies T(A) \ \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d)
- En general, ninguna reversible
- Si X tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes
- Si Y tiene un entorno de cero acotado, (b) $\Rightarrow$ (a)
- Si X es semimetrizable, (d) $\Rightarrow$ (b)

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i$ $(i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ G_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in J \right\}$$

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:
$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ G_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Convergencia en la topología inicial:
$$\{x_\lambda\} \to x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \to f_i(x) \ \forall i \in I$$

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:
$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) \ : \ J \subset I,\ J \text{ finito},\ G_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Convergencia en la topología inicial:
$$\{x_\lambda\} \to x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \to f_i(x) \ \forall i \in I$$
- Criterio de continuidad: Y espacio topológico, $f : Y \to X$,
$$f \ \text{ continua } \iff f_i \circ f \ \text{ continua } \ \forall i \in I$$

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:
$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ G_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Convergencia en la topología inicial:
$$\{x_\lambda\} \to x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \to f_i(x) \ \forall i \in I$$
- Criterio de continuidad: Y espacio topológico, $f : Y \to X$,
$$f \ \text{ continua } \iff f_i \circ f \ \text{ continua } \quad \forall i \in I$$
- Ejemplos: inducida, producto, supremo

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ G_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in J \right\}$$

- Convergencia en la topología inicial:

$$\{x_\lambda\} \to x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \to f_i(x) \ \forall i \in I$$

- Criterio de continuidad: Y espacio topológico, $f : Y \to X$,

$$f \ \text{ continua } \iff f_i \circ f \ \text{ continua } \quad \forall i \in I$$

- Ejemplos: inducida, producto, supremo
- Teorema de Tichonoff: Un producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en X:
$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ U_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in J \right\}$$

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en X:
$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ U_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en X:
$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ U_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si X_i es separado para todo $i \in I$,
$$X \ \text{ separado } \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en X:
$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ U_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si X_i es separado para todo $i \in I$,
$$X \ \text{ separado } \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$
- Acotación y Precompacidad: $A \subset X$,
$$A \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \iff f_i(A) \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \quad \forall i \in I$$

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en X:
$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \ : \ J \subset I, \ J \text{ finito}, \ U_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si X_i es separado para todo $i \in I$,
$$X \ \text{ separado } \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$
- Acotación y Precompacidad: $A \subset X$,
$$A \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \iff f_i(A) \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \quad \forall i \in I$$
- Complitud: $\prod_{i \in I} X_i$ completo $\iff$ X_i completo $\forall i \in I$

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente

Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT
- X/M separado $\iff \overline{M} = M$

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto } \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT
- X/M separado $\iff \overline{M} = M$
- Y espacio topológico, $f : X/M \to Y$,

$$f \text{ continua } \iff f \circ \pi \text{ continua}$$

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT
- X/M separado $\iff \overline{M} = M$
- Y espacio topológico, $f : X/M \to Y$,
  $$f \text{ continua} \iff f \circ \pi \text{ continua}$$
- Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, definiendo:
  $$\widetilde{\nu}(x+M) = \inf\{\nu(x+m) : m \in M\},$$
  $\widetilde{\nu}$ es una pseudonorma en X/M que genera la topología cociente.

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT
- X/M separado $\iff$ $\overline{M} = M$
- Y espacio topológico, $f : X/M \to Y$,
$$f \text{ continua} \iff f \circ \pi \text{ continua}$$
- Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, definiendo:
$$\widetilde{\nu}(x+M) = \operatorname{ínf}\{\nu(x+m) : m \in M\},$$
$\widetilde{\nu}$ es una pseudonorma en X/M que genera la topología cociente. Si ν es una seminorma, igual le ocurre a $\widetilde{\nu}$

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

Homomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Homomorfismo de X en Y: Operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que $T : X \to T(X)$ es una aplicación abierta

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

Homomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Homomorfismo de X en Y: Operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que $T : X \to T(X)$ es una aplicación abierta

Inyectivo $\Rightarrow$ Monomorfismo;

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Factorización canónica de un operador lineal

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/\ker T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
$$

Homomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Homomorfismo de X en Y: Operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que $T : X \to T(X)$ es una aplicación abierta

Inyectivo $\Rightarrow$ Monomorfismo; Sobreyectivo $\Rightarrow$ Epimorfismo

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

Homomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Homomorfismo de X en Y: Operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que $T : X \to T(X)$ es una aplicación abierta

Inyectivo $\Rightarrow$ Monomorfismo; Sobreyectivo $\Rightarrow$ Epimorfismo

Todo homomorfismo (T) es composición de un epimorfismo (π), un isomorfismo $(\widetilde{T})$ y un monomorfismo (I)

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y, z) = y + z$ biyección lineal

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

(1) Φ^{-1} es continua (Φ es un isomorfismo)

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

(1) Φ^{-1} es continua (Φ es un isomorfismo)

(2) P es continua

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

(1) Φ^{-1} es continua (Φ es un isomorfismo)

(2) P es continua

(3) Ψ^{-1} es continua (Ψ es un isomorfismo)

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

(1) Φ^{-1} es continua (Φ es un isomorfismo)

(2) P es continua

(3) Ψ^{-1} es continua (Ψ es un isomorfismo)

Suma topológico-directa

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\Longrightarrow$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Y complementado: $\exists Z : X = Y \oplus Z$ suma topológico-directa

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Y **complementado**: $\exists Z : X = Y \oplus Z$ suma topológico-directa

Equivalentemente: $\exists P : X \to X$ proyección lineal continua, $P(X) = Y$

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Y complementado: $\exists Z : X = Y \oplus Z$ suma topológico-directa

Equivalentemente: $\exists P : X \to X$ proyección lineal continua, $P(X) = Y$

$Z = \ker P$ complemento topológico de Y en X, isomorfo a X/Y

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Y complementado: $\exists Z : X = Y \oplus Z$ suma topológico-directa

Equivalentemente: $\exists P : X \to X$ proyección lineal continua, $P(X) = Y$

$Z = \ker P$ complemento topológico de Y en X, isomorfo a X/Y

X EVT separado, Y subespacio complementado de X $\implies$ Y cerrado

Tema 8: Tipos de EVT

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es

  (a) Continuo $\iff$ su núcleo es cerrado

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es
  - (a) Continuo $\iff$ su núcleo es cerrado
  - (b) Abierto $\iff$ es sobreyectivo

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es
  (a) Continuo $\iff$ su núcleo es cerrado
  (b) Abierto $\iff$ es sobreyectivo
- En un EVT separado, todo subespacio cerrado de codimensión finita está complementado

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

Teorema de Riesz generalizado

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es localmente compacto

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es localmente compacto

(2) Existe en X un entorno de cero precompacto

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es localmente compacto

(2) Existe en X un entorno de cero precompacto

(3) X tiene dimensión finita

Espacios L_p de dimensión finita

Los espacios l_p^N

Espacio de medida: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \mu =$ número de elementos

Espacios L_p de dimensión finita

Los espacios l_p^N

Espacio de medida: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu =$ número de elementos

$$\int_\Omega x \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} x(k) \qquad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos: $\mathbb{K}^N$ con la topología producto

Espacios L_p de dimensión finita

Los espacios l_p^N

Espacio de medida: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, μ = número de elementos

$$\int_\Omega x \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} x(k) \qquad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos: $\mathbb{K}^N$ con la topología producto

$$l_p^N = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in \mathbb{K}^N, 1 \leqslant p < \infty)$$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant N\} \quad (x \in \mathbb{K}^N)$$

Espacios L_p de dimensión finita

Los espacios l_p^N

Espacio de medida: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu =$ número de elementos

$$\int_\Omega x \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} x(k) \qquad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos: $\mathbb{K}^N$ con la topología producto

$$l_p^N = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in \mathbb{K}^N, 1 \leqslant p < \infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant N\} \quad (x \in \mathbb{K}^N)$$

Desigualdad de Hölder:

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)| \, |y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0, \infty[\qquad \nu_E(x) = \inf \{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0, \infty[\qquad \nu_E(x) = \inf \{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0, \infty[\qquad \nu_E(x) = \inf \{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0,\infty[\qquad \nu_E(x) = \inf\{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$
- Positivamente homogéneo: $\nu_E(rx) = r\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0, \infty[\qquad \nu_E(x) = \inf \{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$
- Positivamente homogéneo: $\nu_E(rx) = r\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$
- E equilibrado o convexo $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0,\infty[\qquad \nu_E(x) = \inf\{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$
- Positivamente homogéneo: $\nu_E(rx) = r\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$
- E equilibrado o convexo $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- E equilibrado $\implies \nu_E(\lambda x) = |\lambda|\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0, \infty[\qquad \nu_E(x) = \inf\{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$
- Positivamente homogéneo: $\nu_E(rx) = r\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$
- E equilibrado o convexo $\implies$ $\{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- E equilibrado $\implies$ $\nu_E(\lambda x) = |\lambda|\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$
- E convexo $\implies$ $\nu_E(x+y) \leqslant \nu_E(x) + \nu_E(y) \quad (x, y \in X)$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0, \infty[\qquad \nu_E(x) = \inf\{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$
- Positivamente homogéneo: $\nu_E(rx) = r\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$
- E equilibrado o convexo $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- E equilibrado $\implies \nu_E(\lambda x) = |\lambda|\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$
- E convexo $\implies \nu_E(x+y) \leqslant \nu_E(x) + \nu_E(y) \quad (x, y \in X)$
- E absolutamente convexo (convexo + equilibrado)

$$\implies \begin{cases} \nu_E \text{ seminorma} \\ \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\} \end{cases}$$

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E.

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k \, x_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ x_1, \ldots, x_n \in E, \ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0, \ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente absolutamente convexa: $|\operatorname{co}|\, E = \operatorname{co}(\mathbb{D}\, E) = \operatorname{co}(\mathbb{T}\, E)$ mínimo subconjunto convexo y equilibrado de X que contiene a E.

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente absolutamente convexa: $|\operatorname{co}|\, E = \operatorname{co}(\mathbb{D}\, E) = \operatorname{co}(\mathbb{T}\, E)$ mínimo subconjunto convexo y equilibrado de X que contiene a E. Descripción:

$$|\operatorname{co}|\, E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}$$

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente absolutamente convexa: $|\operatorname{co}| E = \operatorname{co}(\mathbb{D} E) = \operatorname{co}(\mathbb{T} E)$ mínimo subconjunto convexo y equilibrado de X que contiene a E. Descripción:

$$|\operatorname{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}$$

Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente absolutamente convexa: $|\operatorname{co}| E = \operatorname{co}(\mathbb{D} E) = \operatorname{co}(\mathbb{T} E)$ mínimo subconjunto convexo y equilibrado de X que contiene a E. Descripción:

$$|\operatorname{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}$$

Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

Un EVT es seminormable si, y sólo si, contiene un entorno de cero convexo y acotado.

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente absolutamente convexa: $|\operatorname{co}| E = \operatorname{co}(\mathbb{D} E) = \operatorname{co}(\mathbb{T} E)$ mínimo subconjunto convexo y equilibrado de X que contiene a E. Descripción:

$$|\operatorname{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}$$

Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

Un EVT es seminormable si, y sólo si, contiene un entorno de cero convexo y acotado. Por tanto, un EVT es normable si, y sólo si, es separado y contiene un entorno de cero convexo y acotado

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

(1) $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$

(2) $\exists\, M > 0 \ : \ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x) + \nu(y)\big) \ \ \forall x, y \in X$

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists\, M > 0\ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x) + \nu(y)\big)\ \ \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν:

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists M > 0 \ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x)+\nu(y)\big) \quad \forall x,y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists M > 0\ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x) + \nu(y)\big)\ \ \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

Propiedades

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists M > 0 \ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x)+\nu(y)\big) \quad \forall x,y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

Propiedades

- Localmente acotado $=$ Casinormable

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists\, M > 0\ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x)+\nu(y)\big)\quad \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

Propiedades

- Localmente acotado $=$ Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists M > 0 \ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x)+\nu(y)\big) \quad \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

Propiedades

- Localmente acotado $=$ Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales,

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1) \quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2) \quad \exists\, M > 0 \ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x) + \nu(y)\big) \quad \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

Propiedades

- Localmente acotado $=$ Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales,

$$\prod_{i \in I} X_i \ \text{localmente acotado} \iff \begin{cases} X_i \ \text{localmente acotado} \ \forall i \in I \\ I \ \text{finito} \end{cases}$$

Espacios localmente convexos

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos
Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas: X espacio vectorial, Φ familia de pseudonormas en X. Cada $\nu \in \Phi$ genera una topología vectorial $\mathcal{T}_\nu$. Topología (vectorial) asociada a Φ:

$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu \ : \ \nu \in \Phi\}$$

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos
Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas: X espacio vectorial, Φ familia de pseudonormas en X. Cada $\nu \in \Phi$ genera una topología vectorial $\mathcal{T}_\nu$. Topología (vectorial) asociada a Φ:

  $$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu \;:\; \nu \in \Phi\}$$

  Si Φ es una familia de seminormas, $\mathcal{T}_\Phi$ es localmente convexa

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos
Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas: X espacio vectorial, Φ familia de pseudonormas en X. Cada $\nu \in \Phi$ genera una topología vectorial $\mathcal{T}_\nu$. Topología (vectorial) asociada a Φ:
$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu \ : \ \nu \in \Phi\}$$
Si Φ es una familia de seminormas, $\mathcal{T}_\Phi$ es localmente convexa
- Recíprocamente: la topología de cualquier ELC es la asociada a una familia de seminormas.

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas: X espacio vectorial, Φ familia de pseudonormas en X. Cada $\nu \in \Phi$ genera una topología vectorial $\mathcal{T}_\nu$. Topología (vectorial) asociada a Φ:

  $$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu \ : \ \nu \in \Phi\}$$

  Si Φ es una familia de seminormas, $\mathcal{T}_\Phi$ es localmente convexa
- Recíprocamente: la topología de cualquier ELC es la asociada a una familia de seminormas.
- Todo ELC separado es isomorfo a un subespacio de un producto de espacios normados

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Consecuencias

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio de un producto de EVT metrizables

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio de un producto de EVT metrizables
- Todo EVT es completamente regular

EVT metrizables

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i\in I} X_i \ \text{ semimetrizable } \iff \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \ \forall\, i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i\in I} X_i \ \text{ semimetrizable } \iff \begin{cases} X_i \ \text{semimetrizable} \ \ \forall i \in I \\ I \ \text{numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1+\nu_n\big(x(n)\big)}$$

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i\in I} X_i \;\; \text{semimetrizable} \quad \iff \quad \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable} \;\; \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1+\nu_n\big(x(n)\big)}$$

F-espacios

F-espacio $=$ EVT completo metrizable

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \quad \text{semimetrizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X_i \ \text{semimetrizable} \quad \forall i \in I \\ I \ \text{numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1 + \nu_n\big(x(n)\big)}$$

F-espacios

F-espacio $=$ EVT completo metrizable

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, X es un F-espacio cuando

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i\in I} X_i \quad \text{semimetrizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \ \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1+\nu_n\big(x(n)\big)}$$

F-espacios

F-espacio $=$ EVT completo metrizable

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, X es un F-espacio cuando

$$x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(x_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geqslant 1} x_n \quad \text{converge}$$

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \quad \text{semimetrizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \ \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1 + \nu_n\big(x(n)\big)}$$

F-espacios

F-espacio $=$ EVT completo metrizable

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, X es un F-espacio cuando

$$x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(x_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n \geqslant 1} x_n \quad \text{converge}$$

(Toda serie absolutamente convergente es convergente)

Estabilidad y completación

Estabilidad y completación

- X EVT metrizable, $M \subseteq X$ subespacio, $M = \overline{M}$:

$$X \quad \mathrm{F-espacio} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ y } X/M \quad \mathrm{F-espacios}$$

Estabilidad y completación

- X EVT metrizable, $M \subseteq X$ subespacio, $M = \overline{M}$:

$$X \quad \mathrm{F-espacio} \iff M \text{ y } X/M \quad \mathrm{F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio

Estabilidad y completación

- X EVT metrizable, $M \subseteq X$ subespacio, $M = \overline{M}$:

$$X \ \ \mathrm{F-espacio} \iff M \ \mathrm{y} \ X/M \ \ \mathrm{F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio
- Todo EVT metrizable es isomorfo a un subespacio denso de un (único) F-espacio

Estabilidad y completación

- X EVT metrizable, $M \subseteq X$ subespacio, $M = \overline{M}$:

$$X \quad \mathrm{F-espacio} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ y } X/M \quad \mathrm{F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio
- Todo EVT metrizable es isomorfo a un subespacio denso de un (único) F-espacio
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio denso de un (único) EVT separado y completo

Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet $=$ F-espacio localmente convexo
$=$ ELC completo metrizable

Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet $=$ F-espacio localmente convexo
$=$ ELC completo metrizable

Hechos básicos

Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet $=$ F-espacio localmente convexo
$=$ ELC completo metrizable

Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas

Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet $=$ F-espacio localmente convexo
$=$ ELC completo metrizable

Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1 + \nu_n\big(x(n)\big)}$$

Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet $=$ F-espacio localmente convexo
$=$ ELC completo metrizable

Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1 + \nu_n\big(x(n)\big)}$$

- La clase de los espacios de Fréchet es estable por subespacios cerrados, cocientes separados y productos numerables

$$
\begin{tikzcd}[arrows=Rightarrow]
\boxed{\textsc{espacio de dimensión finita}} \arrow[d] & \\
\boxed{\textsc{seminormable}\ \text{(seminorma)}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\textsc{localmente acotado}\ \text{(casinorma)}} \arrow[d] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{ELC } \textsc{semimetrizable} \\ \text{(familia numerable de seminormas)}\end{array}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\textsc{semimetrizable}\ \text{(pseudonorma)}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{ELC (familia de seminormas)}} \arrow[r] & \boxed{\text{EVT (familia de pseudonormas)}}
\end{tikzcd}
$$

Tema 9: Ejemplos de EVT

Espacios l_p

Espacios l_p

Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ número de elementos

Espacios l_p

Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \mathbb{N} \to [0, \infty] \qquad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

Espacios l_p

Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \mathbb{N} \to [0, \infty] \qquad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \; = \; l_p \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios l_p

Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \mathbb{N} \to [0, \infty] \qquad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \; = \; l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

Espacios l_p

Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \mathbb{N} \to [0, \infty] \qquad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \; = \; l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \; : \; \sup\{|x(n)| \, : \, n \in \mathbb{N}\} < \infty \right\} \; = \; l_\infty$$

Espacios l_p

Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ = número de elementos

$$x : \mathbb{N} \to [0, \infty] \qquad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \; = \; l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \; : \; \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \right\} \; = \; l_\infty$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \omega$$

El espacio l_∞

El espacio l_∞

$$l_\infty \;=\; \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;:\; \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\right\}$$

El espacio l_∞

$$l_\infty = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

El espacio l_∞

$$l_\infty = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en $\mathbb{N}$: $\quad x_n \in l_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k) \ \text{ uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

El espacio l_∞

$$l_\infty = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en $\mathbb{N}$: $x_n \in l_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k) \ \text{ uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

Subespacio denso:

$$l_\infty = \overline{\operatorname{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \mathbb{N}\}}$$

El espacio l_∞

$$l_\infty \;=\; \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;:\; \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty \;=\; \sup\left\{|x(n)| \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en $\mathbb{N}$: $\quad x_n \in l_\infty \;\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k) \;\; \text{uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

Subespacio denso:

$$l_\infty = \overline{\mathrm{Lin}\left\{\chi_E \,:\, E \subseteq \mathbb{N}\right\}}$$

l_∞ no es separable: $\quad E, F \subseteq \mathbb{N},\; E \neq F \;\;\Rightarrow\;\; \|\chi_E - \chi_F\|_\infty = 1$

Subespacios destacados de l_∞

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \;\; e_n(n) = 1, \;\; e_n(k) = 0 \;\forall\, k \neq n$

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ e_n(n) = 1, \ e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} = \operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \Big\}$$

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad e_n(n) = 1, \quad e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} \ = \ \mathrm{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \ = \ \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 \ = \ \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \right\}$$

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad e_n(n) = 1, \quad e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} = \operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists \lim_{n \to \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K} u \quad \big(u(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \big)$$

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad e_n(n) = 1, \quad e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} = \operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \Big\}$$

$$c_0 = \Big\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \Big\}$$

$$c = \Big\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists \lim_{n \to \infty} x(n) \Big\} = c_0 \oplus \mathbb{K} u \quad \big(u(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \big)$$

Observaciones

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad e_n(n) = 1, \quad e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} = \operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists \lim_{n \to \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K} u \qquad \big(u(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \big)$$

Observaciones

- c_0 y c son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞)

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad e_n(n) = 1, \quad e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} = \operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists \lim_{n \to \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K} u \quad \big(u(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \big)$$

Observaciones

- c_0 y c son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞)
- c_{00} es denso en c_0: $x \in c_0 \quad \Rightarrow \quad x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$

  Serie incondicionalmente convergente en c_0. Los vectores unidad forman una base de Schauder, de hecho una base incondicional, de c_0

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$ que le convierte en un F-espacio

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O mejor, la casinorma: $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O mejor, la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

$$\|x+y\|_p \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \quad (x, y \in l_p, 0 < p < 1)$$

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O mejor, la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

$$\|x+y\|_p \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1} \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big) \quad (x, y \in l_p, 0 < p < 1)$$

Para $0 < p < 1$, l_p no es localmente convexo

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

- c_{00} es un subespacio denso en l_p:

$$x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$$

serie (incondicionalmente) convergente en l_p. Los vectores unidad forman una base (incondicional) de l_p

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

- c_{00} es un subespacio denso en l_p:

$$x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$$

  serie (incondicionalmente) convergente en l_p. Los vectores unidad forman una base (incondicional) de l_p

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\ x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x \in l_q\,,\ \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

- c_{00} es un subespacio denso en l_p:

$$x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$$

  serie (incondicionalmente) convergente en l_p. Los vectores unidad forman una base (incondicional) de l_p

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\ x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x \in l_q\,,\ \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

  La inclusión $l_p \subseteq l_q$ es estricta y el operador $Id : l_p \to l_q$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la pseudonorma

$$\lceil x \rceil_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la pseudonorma

$$\lceil x \rceil_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \qquad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en ω es la puntual:

$$\lceil x_n - x \rceil_0 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la pseudonorma

$$\lceil x \rceil_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \qquad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en ω es la puntual:

$$\lceil x_n - x \rceil_0 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} x_n(k) = x(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ω es un espacio de Fréchet no normable

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la pseudonorma

$$\lceil x \rceil_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1+|x(n)|} \qquad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en ω es la puntual:

$$\lceil x_n - x \rceil_0 \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

ω es un espacio de Fréchet no normable

- c_{00} es denso en ω y ω es separable

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la pseudonorma

$$\lceil x \rceil_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en ω es la puntual:

$$\lceil x_n - x \rceil_0 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} x_n(k) = x(k) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

  ω es un espacio de Fréchet no normable

- c_{00} es denso en ω y ω es separable
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00} \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty \subset \omega$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset, \;\; \mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \;\; \text{finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \qquad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \qquad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \{S_J\} \text{ convergente}$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{ J \subseteq \Lambda : J \text{ finito} \}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \qquad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \{S_J\} \text{ convergente}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \to x$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \qquad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \{S_J\} \text{ convergente}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \to x$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \; : \; J \in \mathcal{F}(\Lambda), \; J \supseteq J_0 \;\Rightarrow\; \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \in U$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{ J \subseteq \Lambda : J \text{ finito} \}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \qquad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \{S_J\} \text{ convergente}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \to x$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \ : \ J \in \mathcal{F}(\Lambda), \ J \supseteq J_0 \ \Rightarrow \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \in U$$

Condición de Cauchy:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \ : \ K \in \mathcal{F}(\Lambda), \ K \cap J_0 = \emptyset \ \Rightarrow \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \in U$$

Hechos básicos

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha\, a_\lambda+\beta b_\lambda)=\alpha\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda+\beta\sum_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda$

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha\, a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I \to \Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$$

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha\, a_\lambda+\beta b_\lambda)=\alpha\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda+\beta\sum_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I\to\Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I}x_{\sigma(i)}=x$$

- Operadores: X,Y EVT separados, $T\in L(X,Y)$,

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda \ \text{ en } \ X \implies T(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}T(x_\lambda) \ \text{ en } \ Y$$

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha\, a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I \to \Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores: X, Y EVT separados, $T \in L(X,Y)$,

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \ \text{ en } \ X \implies T(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} T(x_\lambda) \ \text{ en } \ Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha\, a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I \to \Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores: X, Y EVT separados, $T \in L(X,Y)$,

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \ \text{ en } \ X \implies T(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} T(x_\lambda) \ \text{ en } \ Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

  (1) Subfamilias: $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \ \Rightarrow \ \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ Cauchy

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha\, a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I \to \Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores: X, Y EVT separados, $T \in L(X,Y)$,

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

  (1) Subfamilias: $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \Rightarrow \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ Cauchy
  (2) $U \in \mathcal{U}(0) \implies \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \notin U\}$ finito

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I \to \Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores: X, Y EVT separados, $T \in L(X,Y)$,

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:
  (1) Subfamilias: $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \Rightarrow \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ Cauchy
  (2) $U \in \mathcal{U}(0) \implies \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \notin U\}$ finito
  (3) Si X es metrizable: $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable

Relación con las series

Relación con las series

- X EVT separado, Λ numerable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:

  (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable

Relación con las series

- X EVT separado, Λ numerable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
  - (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
  - (b) $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda$ biyectiva $\Rightarrow$ $\sum_{n \geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge.

  Si se cumplen (a) y (b): $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$

Relación con las series

- X EVT separado, Λ numerable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
  - (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
  - (b) $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda$ biyectiva $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge.

  Si se cumplen (a) y (b): $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$
- X EVT metrizable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
  - (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
  - (b) $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable y para cualquier biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda_1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge

Sumabilidad absoluta

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \Big\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \Big\}$$

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \Big\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \Big\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν:

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \Big\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \Big\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν:

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad y sumabilidad absoluta

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \Big\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \Big\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν:

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- X F-espacio $\iff$ toda familia absolutamente sumable es sumable

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0,\infty[\qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda = \sup\left\{\sum_{\lambda\in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda)\right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{ sumable } \iff \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν:

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{ absolutamente sumable } \iff \sum_{\lambda\in\Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- X F-espacio $\iff$ toda familia absolutamente sumable es sumable
- En dimensión finita toda familia sumable es absolutamente sumable

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda = \sup\left\{\sum_{\lambda\in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda)\right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{sumable} \iff \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν:

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda\in\Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- X F-espacio $\iff$ toda familia absolutamente sumable es sumable
- En dimensión finita toda familia sumable es absolutamente sumable
- Teorema de Dvoretsky-Rogers (1950): En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente, equivalentemente una familia sumable que no es absolutamente sumable

Espacios l_p^Λ

Espacios l_p^Λ

Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, $\mu =$ número de elementos

Espacios l_p^Λ

Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \Lambda \to [0, \infty] \qquad \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

Espacios l_p^Λ

Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, μ = número de elementos

$$x : \Lambda \to [0, \infty] \qquad \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \Big\} \ = \ l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios l_p^Λ

Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \Lambda \to [0, \infty] \qquad \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \Big\} \;=\; l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

Espacios l_p^Λ

Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, μ = número de elementos

$$x : \Lambda \to [0, \infty] \qquad \int_\Lambda x\, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \Big\} \;=\; l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Lambda x\, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda \;:\; \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \Big\} \;=\; l_\infty^\Lambda$$

Espacios l_p^Λ

Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \Lambda \to [0, \infty] \qquad \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \Big\} = l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \Big\} = l_\infty^\Lambda$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^\Lambda$$

El espacio l_∞^Λ

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda \ = \ \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda \ : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\}$$

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda \;=\; \left\{x \in \mathbb{K}^\Lambda \;:\; \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty \;=\; \sup\{|x(\lambda)| \,:\, \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

Convergencia uniforme en Λ: $\quad x_n \in l_\infty^\Lambda \;\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \;\text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda = \left\{x \in \mathbb{K}^\Lambda \; : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

Convergencia uniforme en Λ: $\quad x_n \in l_\infty^\Lambda \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

Subespacio denso:

$$l_\infty^\Lambda = \overline{\operatorname{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \Lambda\}}$$

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

Convergencia uniforme en Λ: $\quad x_n \in l_\infty^\Lambda \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \ \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

Subespacio denso:

$$l_\infty^\Lambda = \overline{\operatorname{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \Lambda\}}$$

Λ infinito $\implies$ l_∞^Λ no es separable: $\quad l_\infty \subseteq l_\infty^\Lambda$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda, \ \ e_\lambda(\lambda) = 1, \ \ e_\lambda(\delta) = 0 \ \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda, \;\; e_\lambda(\lambda) = 1, \;\; e_\lambda(\delta) = 0 \;\forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$
Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) \; = \; \mathrm{Lin}\,\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda, \quad e_\lambda(\lambda) = 1, \quad e_\lambda(\delta) = 0 \;\forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) \;=\; \operatorname{Lin}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \;\; \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda, \quad e_\lambda(\lambda) = 1, \quad e_\lambda(\delta) = 0 \ \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) \ = \ \operatorname{Lin}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \ \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) \ = \ c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}\, u \qquad \big(u(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \Lambda\big)$$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$, $e_\lambda(\lambda) = 1$, $e_\lambda(\delta) = 0 \ \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \operatorname{Lin}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \ \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \qquad \big(u(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \Lambda\big)$$

Observaciones

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda, \quad e_\lambda(\lambda) = 1, \quad e_\lambda(\delta) = 0 \ \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) \ = \ \mathrm{Lin}\,\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \ \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) \ = \ c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}\,u \qquad \big(u(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \Lambda\big)$$

Observaciones

- $c_0(\Lambda)$ y $c(\Lambda)$ son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞^Λ)

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$, $e_\lambda(\lambda) = 1$, $e_\lambda(\delta) = 0 \ \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \operatorname{Lin}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \ \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \qquad \big(u(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \Lambda\big)$$

Observaciones

- $c_0(\Lambda)$ y $c(\Lambda)$ son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞^Λ)
- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $c_0(\Lambda)$: $\quad x \in c_0(\Lambda) \ \Rightarrow \ x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$

  Los vectores unidad forman una base, de $c_0(\Lambda)$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty\right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p^Λ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p^\Lambda)$$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p^Λ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para $0 < p < 1$, l_p^Λ tiene la topología asociada a:

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p^Λ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para $0 < p < 1$, l_p^Λ tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$ que le convierte en un F-espacio

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p^Λ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para $0 < p < 1$, l_p^Λ tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p^Λ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para $0 < p < 1$, l_p^Λ tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

Si Λ es infinito y $0 < p < 1$, l_p^Λ no es localmente convexo

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$ es un subespacio denso en l_p^Λ:

$$x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

Los vectores unidad forman una base de l_p^Λ

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$ es un subespacio denso en l_p^Λ:

$$x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

  Los vectores unidad forman una base de l_p^Λ

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\ x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x \in l_q^\Lambda\,,\ \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$ es un subespacio denso en l_p^Λ:

$$x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

Los vectores unidad forman una base de l_p^Λ

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\; x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x \in l_q^\Lambda\,,\; \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

Si Λ es infinito, la inclusión $l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda$ es estricta y el operador $Id : l_p^\Lambda \to l_q^\Lambda$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

Caso $p = 0$

- En $\mathbb{K}^\Lambda$ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un ELC separado y completo. Si Λ no es numerable, $\mathbb{K}^\Lambda$ no es metrizable

Caso $p = 0$

- En $\mathbb{K}^\Lambda$ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un ELC separado y completo. Si Λ no es numerable, $\mathbb{K}^\Lambda$ no es metrizable
- Convergencia puntual: $\{x_i\}$ red en $\mathbb{K}^\Lambda$, $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \to x \iff \{x_i(\lambda)\} \to x(\lambda) \ \ \forall \lambda \in \Lambda$$

Caso $p = 0$

- En $\mathbb{K}^\Lambda$ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un ELC separado y completo. Si Λ no es numerable, $\mathbb{K}^\Lambda$ no es metrizable
- Convergencia puntual: $\{x_i\}$ red en $\mathbb{K}^\Lambda$, $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \to x \iff \{x_i(\lambda)\} \to x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $\mathbb{K}^\Lambda$:

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

Caso $p = 0$

- En $\mathbb{K}^\Lambda$ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un ELC separado y completo. Si Λ no es numerable, $\mathbb{K}^\Lambda$ no es metrizable
- Convergencia puntual: $\{x_i\}$ red en $\mathbb{K}^\Lambda$, $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \to x \iff \{x_i(\lambda)\} \to x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $\mathbb{K}^\Lambda$:

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

- $\mathbb{K}^\Lambda$ tiene la propiedad de Heine-Borel: todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{K}^\Lambda$ es compacto

Caso $p = 0$

- En $\mathbb{K}^\Lambda$ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un ELC separado y completo. Si Λ no es numerable, $\mathbb{K}^\Lambda$ no es metrizable
- Convergencia puntual: $\{x_i\}$ red en $\mathbb{K}^\Lambda$, $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \to x \iff \{x_i(\lambda)\} \to x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $\mathbb{K}^\Lambda$:

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

- $\mathbb{K}^\Lambda$ tiene la propiedad de Heine-Borel: todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{K}^\Lambda$ es compacto
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00}(\Lambda) \subseteq l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda \subseteq c_0(\Lambda) \subseteq c(\Lambda) \subseteq l_\infty^\Lambda \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$$

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.
   - Para cada $f \in C(K_n)$, notamos

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.
    - Para cada $f \in C(K_n)$, notamos
    $$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$
    - Llamamos $C(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas en Ω y lo dotamos de la pseudonorma
    $$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1+\|f\|_n}$$
    que lo convierte en un espacio de Fréchet.

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.
   - Para cada $f \in C(K_n)$, notamos
   $$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$
   - Llamamos $C(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas en Ω y lo dotamos de la pseudonorma
   $$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1+\|f\|_n}$$
   que lo convierte en un espacio de Fréchet.
   - La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.
   - Para cada $f \in C(K_n)$, notamos
   $$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$
   - Llamamos $C(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas en Ω y lo dotamos de la pseudonorma
   $$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1+\|f\|_n}$$
   que lo convierte en un espacio de Fréchet.
   - La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.
2. Para $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, escribimos $\mathcal{H}(\Omega)$ para denotar el espacio de las funciones holomorfas en Ω.

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.
   - Para cada $f \in C(K_n)$, notamos
   $$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$
   - Llamamos $C(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas en Ω y lo dotamos de la pseudonorma
   $$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1+\|f\|_n}$$
   que lo convierte en un espacio de Fréchet.
   - La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.
2. Para $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, escribimos $\mathcal{H}(\Omega)$ para denotar el espacio de las funciones holomorfas en Ω.
   - Es un subespacio de $C(\Omega)$ y lo dotamos entonces de la topología inducida.

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.
   - Para cada $f \in C(K_n)$, notamos
     $$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$
   - Llamamos $C(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas en Ω y lo dotamos de la pseudonorma
     $$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1 + \|f\|_n}$$
     que lo convierte en un espacio de Fréchet.
   - La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.
2. Para $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, escribimos $\mathcal{H}(\Omega)$ para denotar el espacio de las funciones holomorfas en Ω.
   - Es un subespacio de $C(\Omega)$ y lo dotamos entonces de la topología inducida.
   - Así, $\mathcal{H}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.

Otros espacios II

Otros espacios II

3. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.

Otros espacios II

3. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
4. K compacto en Ω, llamamos $\mathcal{D}(K)$ al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte está en Ω. Con la topología inducida, es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.

Otros espacios II

3. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
4. K compacto en Ω, llamamos $\mathcal{D}(K)$ al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte está en Ω. Con la topología inducida, es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
5. El espacio de las funciones test es

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{sop}(f) \text{ compacto}\} = \bigcup \mathcal{D}(K)$$

Otros espacios II

3. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
4. K compacto en Ω, llamamos $\mathcal{D}(K)$ al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte está en Ω. Con la topología inducida, es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
5. El espacio de las funciones test es

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{sop}(f) \text{ compacto}\} = \bigcup \mathcal{D}(K)$$

   - **¿Qué topología le asociamos que lo haga completo?** el supremo de las topologías localmente convexas que hacen continuas todas las inclusiones $\mathcal{D}(K) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ ("límite inductivo de espacios de Fréchet").
6. El espacio de las distribuciones, $\mathcal{D}'(\Omega)$, es el "espacio dual" de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar:

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2) =$ forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
($(1) + (2)$ = forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2) =$ forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
$(x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2) =$ forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2)$ $=$ forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2)$ = forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X)$$

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2)$ = forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2)$ $=$ forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

Espacio de Hilbert cuando la norma es completa

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2) =$ forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

Espacio de Hilbert cuando la norma es completa

Polarización: $\operatorname{Re}(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right); \quad \operatorname{Im}(x|y) = \operatorname{Re}(x|iy)$

Teorema de Jordan-von Neumann

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Ejemplos

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida no trivial:

$$\exists\ A, B \in \mathcal{A}\ :\ A \cap B = \emptyset,\ 0 < \mu(A) < \infty,\ 0 < \mu(B) < \infty$$

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida no trivial:

$$\exists\ A, B \in \mathcal{A}\ :\ A \cap B = \emptyset,\ 0 < \mu(A) < \infty,\ 0 < \mu(B) < \infty$$

Entonces:

$$L_p(\mu)\ \text{ Espacio de Hilbert } \iff p = 2$$

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida no trivial:

$$\exists\ A, B \in \mathcal{A}\ :\ A \cap B = \emptyset,\ 0 < \mu(A) < \infty,\ 0 < \mu(B) < \infty$$

Entonces:

$$L_p(\mu)\ \text{ Espacio de Hilbert } \iff \quad p = 2$$

Producto escalar en $L_2(\mu)$:

$$(f|g) = \int_\Omega f\,\overline{g}\,d\mu \ \ \big(f, g \in L_2(\mu)\big)\,; \qquad (x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\,\overline{y(\lambda)} \ \ \big(x, y \in l_2^\Lambda\big)$$

Teorema de la Proyección Ortogonal

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\ P_C(x) \in C : \ \|x - P_C(x)\| = \text{mín}\{\|x-y\| : y \in C\}$$

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\ P_C(x) \in C : \ \|x - P_C(x)\| = \text{mín}\,\{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\quad \operatorname{Re}\,(x - P_C(x) | y - P_C(x)) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C$

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\ P_C(x) \in C : \ \|x - P_C(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x) | y - P_C(x)) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x) | m) = 0 \ \ \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^{\perp} := \{z \in H : (z|m) = 0 \ \forall m \in M\}$$

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\, P_C(x) \in C : \ \|x - P_C(x)\| = \text{mín}\{\|x-y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x) | y - P_C(x)) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x)|m) = 0 \ \ \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \ \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^\perp$ suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \qquad (x \in X)$$

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! \; P_C(x) \in C : \; \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x) | y - P_C(x)) \leqslant 0 \;\; \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x)|m) = 0 \;\; \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^{\perp} := \{z \in H : (z|m) = 0 \; \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^{\perp}$ suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \qquad (x \in X)$$

- Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\ P_C(x) \in C : \ \|x - P_C(x)\| = \min\{\|x-y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x) | y - P_C(x)) \leqslant 0 \quad \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x)|m) = 0 \quad \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^{\perp} := \{z \in H : (z|m) = 0 \ \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^{\perp}$ suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \qquad (x \in X)$$

- Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado

Teorema de Lindenstrauss-Tzafriri (1971)

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\ P_C(x) \in C : \ \|x - P_C(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x)|m) = 0 \ \ \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^{\perp} := \{z \in H : (z|m) = 0\ \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^{\perp}$ suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \qquad (x \in X)$$

- Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado

Teorema de Lindenstrauss-Tzafriri (1971)

Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, todo subespacio cerrado de X está complementado en X.

Sistemas y bases ortonormales

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \;\; \forall \lambda \in \Lambda$$

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \;\; \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\text{Lin}\,(E)}$

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \ \ \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\mathrm{Lin}\,(E)}$

Propiedades de los sistemas ortonormales

H Hilbert, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ ortonormal, $M = \overline{\mathrm{Lin}\,(E)}$, $x \in H$.

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \ \ \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\mathrm{Lin}\,(E)}$

Propiedades de los sistemas ortonormales

H Hilbert, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ ortonormal, $M = \overline{\mathrm{Lin}\,(E)}$, $x \in H$.

- Desigualdad de Bessel: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2$

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \;\; \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\operatorname{Lin}(E)}$

Propiedades de los sistemas ortonormales

H Hilbert, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ ortonormal, $M = \overline{\operatorname{Lin}(E)}$, $x \in H$.

- Desigualdad de Bessel: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2$
- Proyección ortogonal sobre M: $\displaystyle P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda$

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \ \ \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\mathrm{Lin}\,(E)}$

Propiedades de los sistemas ortonormales

H Hilbert, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ ortonormal, $M = \overline{\mathrm{Lin}\,(E)}$, $x \in H$.

- Desigualdad de Bessel: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2$
- Proyección ortogonal sobre M: $\displaystyle P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda$
- $\displaystyle \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\,(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\,(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda \quad (x \in H)$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\,(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)\,(e_\lambda|y) \quad (x,y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)\,e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\,(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\,(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: dimensión hilbertiana.

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: dimensión hilbertiana.
- Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda) e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: dimensión hilbertiana.
- Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana
- Salvo isomorfismos isométricos, los únicos espacios de Hilbert separables son l_2^N con $N \in \mathbb{N}$ y l_2

Tema 10: El Teorema de Hahn-Banach

1. Versión analítica
   - Enunciado del teorema
   - Consecuencias
   - Sistemas ecuaciones lineales
   - Aplicaciones

2. Versión geométrica
   - Separación de convexos
   - Teoremas Generales de Separación
   - Hiperplanos de soporte
   - Separación fuerte
   - Aplicación: La integral de Pettis

Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Funcional sublineal

X espacio vectorial, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ para $x,y \in X$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geqslant 0$ y $x \in X$.

Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Funcional sublineal

X espacio vectorial, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ para $x, y \in X$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geqslant 0$ y $x \in X$.

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Funcional sublineal

X espacio vectorial, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ para $x, y \in X$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geqslant 0$ y $x \in X$.

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

Teorema de Hahn-Banach, 1929

X e.v. p funcional sublineal en X.
Si M es un subespacio de X y $g \in M^\sharp$ verifica

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \qquad (m \in M),$$

entonces existe $f \in X^\sharp$ cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Funcional sublineal

X espacio vectorial, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ para $x, y \in X$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geqslant 0$ y $x \in X$.

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

Teorema de Hahn-Banach, 1929

X e.v. p funcional sublineal en X.
Si M es un subespacio de X y $g \in M^\sharp$ verifica

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \qquad (m \in M),$$

entonces existe $f \in X^\sharp$ cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

★ En otras palabras, todo funcional lineal en M dominado por p se puede extender a un funcional lineal en X que sigue estando dominado por p.

Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Funcional sublineal

X espacio vectorial, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ para $x, y \in X$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geqslant 0$ y $x \in X$.

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

Teorema de Hahn-Banach, 1929

X e.v. p funcional sublineal en X.
Si M es un subespacio de X y $g \in M^\sharp$ verifica

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \qquad (m \in M),$$

entonces existe $f \in X^\sharp$ cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

★ En otras palabras, todo funcional lineal en M dominado por p se puede extender a un funcional lineal en X que sigue estando dominado por p.
★ Si p es una seminorma se tiene, de hecho,

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

Consecuencias en espacios normados

Consecuencias en espacios normados

Teorema de Hahn, 1927

X un espacio normado, Y subespacio de X y $g \in Y^*$. entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Consecuencias en espacios normados

Teorema de Hahn, 1927

X un espacio normado, Y subespacio de X y $g \in Y^*$. entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Corolario

X un espacio normado, Y subespacio cerrado de X. Si $x_0 \in X \setminus Y$, entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, Y)$ e $Y \subseteq \ker(f)$.

Consecuencias en espacios normados

Teorema de Hahn, 1927

X un espacio normado, Y subespacio de X y $g \in Y^*$. entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Corolario

X un espacio normado, Y subespacio cerrado de X. Si $x_0 \in X \setminus Y$, entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$ e $Y \subseteq \ker(f)$.

Corolario

X un espacio normado no trivial. Entonces, para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Equivalentemente, se tiene la siguiente expresión para la norma de X:

$$\|x\| = \max\{\, |f(x)| \ : \ f \in S_{X^*} \,\} \qquad (x \in X).$$

Consecuencias en EVT

Consecuencias en EVT

Observaciones

X EVT.

Consecuencias en EVT

Observaciones

X EVT.

- Si $f \in X^* \setminus \{0\}$,
$$\varphi(x) = |f(x)| \qquad (x \in X)$$
es una seminorma continua en X.

Consecuencias en EVT

Observaciones

X EVT.

- Si $f \in X^* \setminus \{0\}$,
$$\varphi(x) = |f(x)| \qquad (x \in X)$$
es una seminorma continua en X.
- Si $\varphi \neq 0$ es cualquier seminorma continua en X, el conjunto
$$U = \{x \in X \ : \ \varphi(x) < 1\}$$
es un entorno convexo de cero en X y $U \neq X$.

Consecuencias en EVT

Observaciones

X EVT.

- Si $f \in X^* \setminus \{0\}$,
$$\varphi(x) = |f(x)| \qquad (x \in X)$$
es una seminorma continua en X.
- Si $\varphi \neq 0$ es cualquier seminorma continua en X, el conjunto
$$U = \{x \in X \ : \ \varphi(x) < 1\}$$
es un entorno convexo de cero en X y $U \neq X$.
- **Consecuencia del Tª de Hahn-Banach:**
Si U es un entorno de cero convexo en X, $U \neq X$, y $x_0 \notin U$, entonces existe $f \in X^*$ tal que
$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant 1 \quad (x \in U) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re} f(x_0) \geqslant 1.$$

Consecuencias en EVT. II

Consecuencias en EVT. II

Proposition

X EVT. Equivalen:

- X^* separa los puntos de X.
- Para cada $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existe una seminorma continua φ en X tal que $\varphi(x_0) \neq 0$.
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en X es $\{0\}$.

Consecuencias en EVT. II

Proposition

X EVT. Equivalen:

- X^* separa los puntos de X.
- Para cada $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existe una seminorma continua φ en X tal que $\varphi(x_0) \neq 0$.
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en X es $\{0\}$.

Corolario

X ELC. Son equivalentes:

- X^* separa los puntos de X.
- X es separado.

Consecuencias en EVT. II

Proposition

X EVT. Equivalen:

- X^* separa los puntos de X.
- Para cada $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existe una seminorma continua φ en X tal que $\varphi(x_0) \neq 0$.
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en X es $\{0\}$.

Corolario

X ELC. Son equivalentes:

- X^* separa los puntos de X.
- X es separado.

Ejemplos

- Para $0 < p < 1$, ℓ_p no es localmente convexo aunque ℓ_p^* separa puntos.
- Para $0 < p < 1$, el espacio $L_p[0,1]$ tiene dual $\{0\}$.

Consecuencias en EVT. II

Proposition

X EVT. Equivalen:

- X^* separa los puntos de X.
- Para cada $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existe una seminorma continua φ en X tal que $\varphi(x_0) \neq 0$.
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en X es $\{0\}$.

Corolario

X ELC. Son equivalentes:

- X^* separa los puntos de X.
- X es separado.

Ejemplos

- Para $0 < p < 1$, ℓ_p no es localmente convexo aunque ℓ_p^* separa puntos.
- Para $0 < p < 1$, el espacio $L_p[0,1]$ tiene dual $\{0\}$.

La teoría de dualidad se ha desarrollado tradicionalmente en el ambiente de los ELC separados.

Consecuencias en EVT. III

Consecuencias en EVT. III

Teorema de extensión Hahn-Banach para ELC

X un ELC, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Existe $f \in X^*$ cuya restricción a M coincide con g.

Consecuencias en EVT. III

Teorema de extensión Hahn-Banach para ELC

X un ELC, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Existe $f \in X^*$ cuya restricción a M coincide con g.

X ELC, $A \subseteq X$, el anulador de A es

$$A^{\perp} := \{f \in X^* \ : \ f(A) = 0\}.$$

Consecuencias en EVT. III

Teorema de extensión Hahn-Banach para ELC

X un ELC, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Existe $f \in X^*$ cuya restricción a M coincide con g.

X ELC, $A \subseteq X$, el anulador de A es

$$A^\perp := \{f \in X^* \ : \ f(A) = 0\}.$$

Corolario: caracterización dual del cierre de un subespacio

Sea X un ELC y M un subespacio de X. Se verifica que:

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\perp} \ker f.$$

En particular, M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$.

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X,

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^\perp = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}$

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^\perp = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^\perp$

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^\perp = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^\perp$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^{\perp} = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^{\perp}$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Dual de un cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X. Como espacios vectoriales:

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^{\perp} = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^{\perp}$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Dual de un cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X. Como espacios vectoriales:

$$(X/M)^* \equiv M^{\perp}$$

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^{\perp} = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^{\perp}$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Dual de un cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X. Como espacios vectoriales:

$$(X/M)^* \equiv M^{\perp}$$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Sistemas de ecuaciones lineales. I

Sistemas de ecuaciones lineales. I

Teorema de Hahn, 1927

X espacio normado, $A = \{z_i : i \in I\} \subset X$ y $\{c_i : i \in I\} \subset \mathbb{K}$. Equivalen:

- Existe f en X^* tal que $f(z_i) = c_i$ para todo $i \in I$.
- Existe $M \geqslant 0$ verificando

$$|\alpha_1 c_{i_1} + \cdots + \alpha_n c_{i_n}| \leqslant M \, \|\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}\|$$

para cualquier combinación lineal $\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}$ de elementos de A.

En este caso, se puede elegir f de forma que $\|f\| \leqslant M$.

Sistemas de ecuaciones lineales. II

Sistemas de ecuaciones lineales. II

Teorema de Helly, 1921

X espacio normado, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X^*$ y $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$. Equivalen:

- Existe x en X tal que $f_k(x) = c_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.
- Existe $M \geqslant 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k c_k \right| \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|$$

  para cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

En este caso, $\forall \varepsilon > 0$ se puede elegir x tal que $\|x\| \leqslant M + \varepsilon$.

Límites generalizados

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

Límites generalizados

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n) \quad (y \in c)$

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n \to \infty} y(n) \quad (y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1\,,\ h(y) = \lim\limits_{n \to \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Límites generalizados

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n) \quad (y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1\,,\ h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n) \quad \forall\, y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\ h \in l_\infty^* : \|h\| = 1\,,\ h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)\ \ \forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n) \quad (y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\ h \in l_\infty^* : \|h\| = 1,\ h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1\,,\ h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)\ \ \forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

Límites generalizados

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1$, $h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $\forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ $\forall x \in l_\infty$

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1,\ h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $\forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ $\forall x \in l_\infty$

(3) $f\left(x^{(k)}\right) = f(x)$ $\forall x \in l_\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$, donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Límites generalizados

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1$, $h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $\forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ $\forall x \in l_\infty$

(3) $f\left(x^{(k)}\right) = f(x)$ $\forall x \in l_\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$, donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como consecuencia se tiene que $f \in l_\infty^*$, $\|f\| = 1$ y

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \leqslant f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x(n) \quad \forall x \in l_\infty$$

Límites generalizados

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n\in\mathbb{N}\}$ $(x\in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y\in c)$

$g\in c^*$, $\|g\|=1$. Por tanto: $\exists\, h\in l_\infty^* : \|h\|=1\,,\ h(y)=\lim\limits_{n\to\infty} y(n)\ \ \forall y\in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(n) : n\in\mathbb{N}\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(n) : n\in\mathbb{N}\}$ $\forall x\in l_\infty$

(3) $f\left(x^{(k)}\right) = f(x)$ $\forall x\in l_\infty$, $\forall k\in\mathbb{N}$, donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n\in\mathbb{N})$$

Como consecuencia se tiene que $f\in l_\infty^*$, $\|f\|=1$ y

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \leqslant f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x(n) \quad \forall x\in l_\infty$$

En particular $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $\forall y\in c$. Se dice que f es un límite de Banach

Medias invariantes

Medias invariantes

$(\Lambda, +)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

Medias invariantes

$(\Lambda, +)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

Medias invariantes

$(\Lambda, +)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\text{ínf}\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

Medias invariantes

$(\Lambda,+)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda,\ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda+\gamma) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

Medias invariantes

$(\Lambda, +)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medias invariantes

$(\Lambda,+)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda+\gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medidas finitamente aditivas

Medias invariantes

$(\Lambda,+)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda,\ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda+\gamma) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medidas finitamente aditivas

Existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

Medias invariantes

$(\Lambda,+)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda,\ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda+\gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medidas finitamente aditivas

Existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

(a) Es finitamente aditiva:

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Medias invariantes

$(\Lambda,+)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda,\ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda+\gamma) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medidas finitamente aditivas

Existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

(a) Es finitamente aditiva:

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(b) Es invariante por traslaciones:

$$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \implies \mu(A+x) = \mu(A)$$

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A\,, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A\,, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$ también separa A y B

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

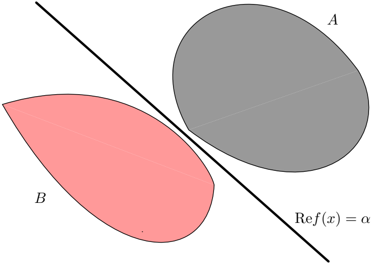
¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$ también separa A y B



Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$ también separa A y B

Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$ también separa A y B

Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad, $B = \{0\}$,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \ \alpha_N > 0 \right\}$$

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$ también separa A y B

Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad, $B = \{0\}$,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \ \alpha_N > 0 \right\}$$

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de c_{00} pero

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$ también separa A y B

Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad, $B = \{0\}$,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \ \alpha_N > 0 \right\}$$

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de c_{00} pero

$$f : c_{00} \to \mathbb{R} \ \text{ lineal, } f \neq 0 \implies f(A) = \mathbb{R}$$

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación en EVT

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación en EVT

X EVT, A y B subconjuntos convexos.

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación en EVT

X EVT, A y B subconjuntos convexos.

Supongamos que $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, que $B \neq \emptyset$ y que $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$.

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación en EVT

X EVT, A y B subconjuntos convexos.

Supongamos que $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, que $B \neq \emptyset$ y que $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación en EVT

X EVT, A y B subconjuntos convexos.

Supongamos que $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, que $B \neq \emptyset$ y que $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

De hecho, se tiene

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \quad \forall x \in \operatorname{int} A$$

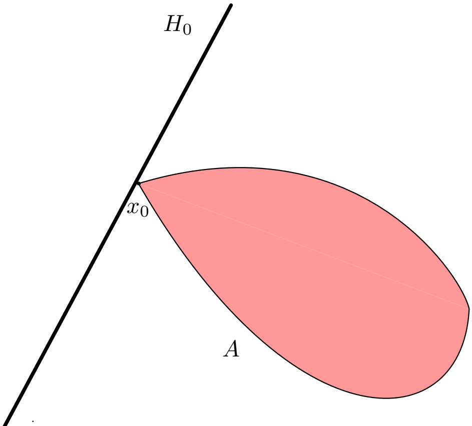
Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.



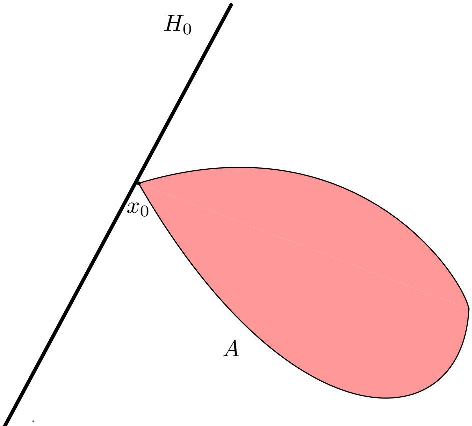
Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \text{máx}\,\{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$



Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \text{máx}\,\{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Separación en dimensión finita

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Separación en dimensión finita

A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de $\mathbb{K}^N$.

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Separación en dimensión finita

A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de $\mathbb{K}^N$.

Existen $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Separación en dimensión finita

A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de $\mathbb{K}^N$.

Existen $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Equivalentemente, existen $u \in \mathbb{K}^N \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} \left(a \middle| u\right) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} \left(b \middle| u\right) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Existen $f \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Existen $f \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Existen $f \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

X espacio normado, A, B subconjuntos no vacíos, convexos.

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Existen $f \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

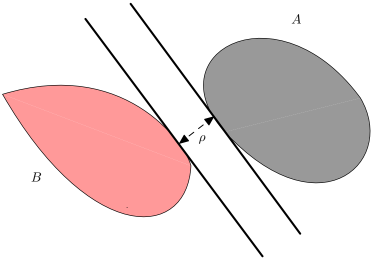
$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \ \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

X espacio normado, A, B subconjuntos no vacíos, convexos.

Supongamos que A y B están a distancia positiva: $d(A, B) = \rho > 0$.

Separación fuerte



Separación fuerte en espacios normados

X espacio normado, A, B subconjuntos no vacíos, convexos.

Supongamos que A y B están a distancia positiva: $d(A,B) = \rho > 0$.

Entonces, existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma < \gamma + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Integral de Pettis

Integración débil

Integral de Pettis

Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, X ELC separado, $\varphi : \Omega \to X$.

Integral de Pettis

Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, X ELC separado, $\varphi : \Omega \to X$.

- φ débilmente medible $\iff$ $f \circ \varphi$ medible $\forall f \in X^*$
- φ débilmente integrable $\iff$ $f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $\forall f \in X^*$

Integral de Pettis

Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, X ELC separado, $\varphi : \Omega \to X$.

- φ débilmente medible $\iff$ $f \circ \varphi$ medible $\forall f \in X^*$
- φ débilmente integrable $\iff$ $f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $\forall f \in X^*$
- φ es integrable en el sentido de Pettis cuando es débilmente integrable y existe $x \in X$ tal que

$$f(x) = \int_\Omega (f \circ \varphi)\, d\mu \quad \forall f \in X^*$$

Integral de Pettis

Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, X ELC separado, $\varphi : \Omega \to X$.

- φ débilmente medible $\iff$ $f \circ \varphi$ medible $\forall f \in X^*$
- φ débilmente integrable $\iff$ $f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $\forall f \in X^*$
- φ es integrable en el sentido de Pettis cuando es débilmente integrable y existe $x \in X$ tal que

$$f(x) = \int_\Omega (f \circ \varphi)\, d\mu \quad \forall f \in X^*$$

El vector x es único, se le llama integral de Pettis de φ con respecto a μ:

$$x = \int_\Omega \varphi\, d\mu$$

Integral de Pettis

Existencia de la integral

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

K espacio topológico compacto de Hausdorff

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

K espacio topológico compacto de Hausdorff

μ medida de Borel positiva y finita en K

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

K espacio topológico compacto de Hausdorff

μ medida de Borel positiva y finita en K

Toda función continua de K en X es integrable en el sentido de Pettis.

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

K espacio topológico compacto de Hausdorff

μ medida de Borel positiva y finita en K

Toda función continua de K en X es integrable en el sentido de Pettis.

Suponiendo, sin perder generalidad, $\mu(K) = 1$, para toda función continua $\varphi : K \to X$ se tiene:

$$\int_K \varphi \, d\mu \in \overline{\operatorname{co} \varphi(K)}$$

Tema 11: Teoremas de la Aplicación Abierta y Gráfica Cerrada

1. Lema de Categoría de Baire
    - Nociones de categoría
    - Lema de Baire y primeras aplicaciones

2. Teorema de la Aplicación Abierta
    - Esquema de la demostración
    - Versiones del Teorema
    - Aplicación a series de Fourier
    - Aplicación a ecuaciones diferenciales

3. Teorema de la Gráfica Cerrada
    - Enunciado del Teorema
    - Ejemplos de aplicación

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \; \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

(1) $A \subset E\,, \ \operatorname{int} A \neq \emptyset \implies A$ de 2^a categoría en E

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

(1) $A \subset E, \ \operatorname{int} A \neq \emptyset \implies A$ de 2^a categoría en E

(2) A de 1^a categoría en $E \implies \operatorname{int} A = \emptyset$

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

(1) $A \subset E\,,\ \operatorname{int} A \neq \emptyset \implies A$ de 2^a categoría en E

(2) A de 1^a categoría en $E \implies \operatorname{int} A = \emptyset$

(3) $F_n = \overline{F_n} \subset E \ \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \operatorname{int} F_m \neq \emptyset$

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

(1) $A \subset E\,, \ \operatorname{int} A \neq \emptyset \implies A$ de 2^a categoría en E

(2) A de 1^a categoría en $E \implies \operatorname{int} A = \emptyset$

(3) $F_n = \overline{F_n} \subset E \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \operatorname{int} F_m \neq \emptyset$

(4) $G_n = \operatorname{int} G_n\,, \ \overline{G_n} = E \ \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

(1) $A \subset E\,, \ \operatorname{int} A \neq \emptyset \implies A$ de 2^a categoría en E

(2) A de 1^a categoría en $E \implies \operatorname{int} A = \emptyset$

(3) $F_n = \overline{F_n} \subset E \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \operatorname{int} F_m \neq \emptyset$

(4) $G_n = \operatorname{int} G_n\,, \ \overline{G_n} = E \ \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

Se dice que E es un espacio de Baire cuando las verifica. En particular, un espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \;\Rightarrow\; A$ de 1^a en E_2

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \;\Rightarrow\; A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \;\Rightarrow\; A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría
- $\mathbb{Q}$ es de 1^a categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \ \Rightarrow \ A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría
- $\mathbb{Q}$ es de 1^a categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$ (luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable)

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \ \Rightarrow\ A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría
- $\mathbb{Q}$ es de 1^a categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$ (luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable)

Aplicaciones

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \Rightarrow A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría
- $\mathbb{Q}$ es de 1^a categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$ (luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable)

Aplicaciones

- "Abundan" las funciones continuas no derivables así como las de clase C^∞ no analíticas

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \;\Rightarrow\; A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría
- $\mathbb{Q}$ es de 1^a categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$ (luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable)

Aplicaciones

- "Abundan" las funciones continuas no derivables así como las de clase C^∞ no analíticas
- La dimensión de un F-espacio (en particular, de un espacio de Banach) es finita o no numerable

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X,Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en X $\Rightarrow$ $T(U)$ entorno de cero en Y

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en X $\Rightarrow$ $T(U)$ entorno de cero en Y
Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en X $\Rightarrow$ $T(U)$ entorno de cero en Y

Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en X $\Rightarrow$ $T(U)$ entorno de cero en Y
Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en X $\Rightarrow$ $T(U)$ entorno de cero en Y

Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en $X \Rightarrow T(U)$ entorno de cero en Y

Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en X $\Rightarrow$ $T(U)$ entorno de cero en Y

Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X, Y)$

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en X $\Rightarrow$ $T(U)$ entorno de cero en Y

Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X, Y)$

$$T \text{ casi-abierta} \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y,\ Y \text{ F-espacio}$$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$T(X)$ de 2^a categoría en $Y \implies T$ abierta, $T(X) = Y$, Y F-espacio

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$T(X)$ de 2^a categoría en Y $\implies$ T abierta, $T(X) = Y$, Y F-espacio

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$T(X)$ de 2^a categoría en $Y \implies T$ abierta, $T(X) = Y$, Y F-espacio

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y, \ Y \text{ F-espacio}$$

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = Y \implies T \text{ abierta}$$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y, \; Y \text{ F-espacio}$$

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = Y \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los Isomorfismos de Banach

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ abierta}, \ T(X) = Y, \ Y \text{ F-espacio}$$

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = Y \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los Isomorfismos de Banach

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ abierta}, \; T(X) = Y, \; Y \text{ F-espacio}$$

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = Y \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los Isomorfismos de Banach

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T \text{ biyectiva} \implies T^{-1} \text{ continua}$$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ abierta}, \ T(X) = Y, \ Y \text{ F-espacio}$$

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = Y \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los Isomorfismos de Banach

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T \text{ biyectiva} \implies T^{-1} \text{ continua}$$

Teorema del Homomorfismo de Banach

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ abierta}, \ T(X) = Y, \ Y \text{ F-espacio}$$

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X,Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = Y \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los Isomorfismos de Banach

X,Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T \text{ biyectiva} \implies T^{-1} \text{ continua}$$

Teorema del Homomorfismo de Banach

X,Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y \text{, } Y \text{ F-espacio}$$

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = Y \implies T \text{ abierta}$$

Teorema de los Isomorfismos de Banach

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T \text{ biyectiva} \implies T^{-1} \text{ continua}$$

Teorema del Homomorfismo de Banach

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$$T(X) = \overline{T(X)} \implies T \text{ homomorfismo}$$

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\displaystyle\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \qquad (n \in \mathbb{Z})$

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\displaystyle\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \qquad (n\in\mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\displaystyle\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \qquad (n\in\mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Problema

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\displaystyle\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \qquad (n\in\mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\, ds \qquad (n\in\mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ¿$\exists f \in L_1 : \widehat{f} = a$?

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

$$f\in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\displaystyle\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\, ds \qquad (n\in\mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ¿$\exists\, f\in L_1 : \widehat{f} = a$?

- Lema de Riemann-Lebesgue: $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty}\widehat{f}(n) = 0 \qquad \left(\widehat{f}\in c_0(\mathbb{Z})\right)$

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\displaystyle\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins}\, ds \qquad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ¿$\exists f \in L_1 : \widehat{f} = a$?

- Lema de Riemann-Lebesgue: $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0 \qquad \left(\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})\right)$
- Teorema de unicidad: $f, g \in L_1,\ \widehat{f} = \widehat{g} \implies f = g$ (c.p.d.)

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z})\,, \quad T(f) = \widehat{f}$$

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- T es lineal, continuo e inyectivo

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- T es lineal, continuo e inyectivo
- L_1 y $c_0(\mathbb{Z})$ no son isomorfos

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- T es lineal, continuo e inyectivo
- L_1 y $c_0(\mathbb{Z})$ no son isomorfos
- Luego T no es sobreyectivo

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- T es lineal, continuo e inyectivo
- L_1 y $c_0(\mathbb{Z})$ no son isomorfos
- Luego T no es sobreyectivo
- Luego $T(L_1)$ es de 1^a categoría en $c_0(\mathbb{Z})$

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z})\,, \quad T(f) = \widehat{f}$$

- T es lineal, continuo e inyectivo
- L_1 y $c_0(\mathbb{Z})$ no son isomorfos
- Luego T no es sobreyectivo
- Luego $T(L_1)$ es de 1^a categoría en $c_0(\mathbb{Z})$
- Entre las series trigonométricas con coeficientes tendiendo a cero las series de Fourier son “atípicas”. El lema de Riemann-Lebesgue está muy lejos de caracterizar las series de Fourier.

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

$X = C^2[a,b]$ espacio de Banach: $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

$X = C^2[a,b]$ espacio de Banach: $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a,b] \times \mathbb{R}^2$ espacio de Banach: $\|(f,\alpha,\beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de X en Y: $T(x) = \big(y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x\,,\, x(a)\,,\, x(b)\big)$

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

$X = C^2[a,b]$ espacio de Banach: $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a,b] \times \mathbb{R}^2$ espacio de Banach: $\|(f,\alpha,\beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de X en Y: $T(x) = \big(y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x\,,\, x(a)\,,\, x(b)\big)$

- T es lineal y continuo

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

$X = C^2[a,b]$ espacio de Banach: $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a,b] \times \mathbb{R}^2$ espacio de Banach: $\|(f,\alpha,\beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de X en Y: $T(x) = \big(y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x\,,\,x(a)\,,\,x(b)\big)$

- T es lineal y continuo
- Problema bien planteado $\iff$ T biyectivo

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

$X = C^2[a,b]$ espacio de Banach: $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a,b] \times \mathbb{R}^2$ espacio de Banach: $\|(f,\alpha,\beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de X en Y: $T(x) = \big(y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x\,,\, x(a)\,,\, x(b)\big)$

- T es lineal y continuo
- Problema bien planteado $\iff$ T biyectivo
- Teorema de los isomorfismos de Banach: si el problema está bien planteado, la solución depende de manera continua de los datos

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \left\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \right\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua } \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x) \big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua } \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x) \big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua } \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

- f es continua cuando: $\{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x) \big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

- f es continua cuando: $\{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$
- $\operatorname{Gr} f$ es cerrada cuando: $\{x_n\} \to x\,,\ \{f(x_n)\} \to y \implies f(x) = y$

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua } \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

- f es continua cuando: $\{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$
- $\operatorname{Gr} f$ es cerrada cuando: $\{x_n\} \to x\,,\ \{f(x_n)\} \to y \implies f(x) = y$

Teorema de la Gráfica Cerrada

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua } \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

- f es continua cuando: $\{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$
- $\operatorname{Gr} f$ es cerrada cuando: $\{x_n\} \to x\,,\ \{f(x_n)\} \to y \implies f(x) = y$

Teorema de la Gráfica Cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal, $\operatorname{Gr} T$ cerrada $\implies$ T continuo

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x) \big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua } \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

- f es continua cuando: $\{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$
- $\operatorname{Gr} f$ es cerrada cuando: $\{x_n\} \to x\,,\ \{f(x_n)\} \to y \implies f(x) = y$

Teorema de la Gráfica Cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal, $\operatorname{Gr} T$ cerrada $\implies$ T continuo

Por tanto, para asegurar que T es continuo basta probar:

$$\{x_n\} \to 0\,,\ \{T x_n\} \to y \implies y = 0$$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \ \text{ continua} \quad \Longrightarrow \quad T \ \text{ continuo}$$

Caso particular

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \ \text{ continua } \implies T \ \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua } \implies T \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y\,,\quad f(y) = 0\ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

Ejemplos

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

Ejemplos

- $Y = l_p \ \ (0 < p \leqslant \infty), \quad \Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \ f_n(y) = y(n) \ \forall y \in Y, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

Ejemplos

- $Y = l_p \quad (0 < p \leqslant \infty), \quad \Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \ f_n(y) = y(n) \ \forall y \in Y, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0,1] \quad (0 < p \leqslant \infty), \ E = L_0[0,1], \ Jy = y \ \forall y \in Y$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \ \text{ continua } \implies T \ \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \ \text{ continuo } \ \forall f \in \Phi \implies T \ \text{ continuo}$$

Ejemplos

- $Y = l_p \ \ (0 < p \leqslant \infty), \quad \Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \ f_n(y) = y(n) \ \forall y \in Y, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0,1] \ \ (0 < p \leqslant \infty), \ E = L_0[0,1], \ Jy = y \ \forall y \in Y$
- $Y = C[0,1], E = \mathbb{K}^{[0,1]}, \ Jy = y \ \forall y \in Y$

Tema 12: Teorema de Banach-Steinhaus

Motivación

Motivación

Problema motivador

X, Y espacios normados, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos. Supongamos que para cada $x \in X$, $\{T_n(x)\}$ converge y llamemos $T(x)$ a límite. Entonces, T es una aplicación de X en Y obviamente lineal.

Motivación

Problema motivador

X, Y espacios normados, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$ sucesión de operadores lineales continuos. Supongamos que para cada $x \in X$, $\{T_n(x)\}$ converge y llamemos $T(x)$ a límite. Entonces, T es una aplicación de X en Y obviamente lineal.

¿Es continua?

Motivación

Problema motivador

X, Y espacios normados, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos. Supongamos que para cada $x \in X$, $\{T_n(x)\}$ converge y llamemos $T(x)$ a límite. Entonces, T es una aplicación de X en Y obviamente lineal.

¿Es continua?

Ejemplo

En c_{00} definimos $T_n \in L(c_{00}, \mathbb{K})$ por

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k) \qquad (x \in X).$$

Es claro que

$$T_n(x) \longrightarrow T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \qquad (x \in c_{00})$$

pero el operador (lineal) T no es continuo.

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset,\ E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E,\ x \in B\} < \infty$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E, \; x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E, \; x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E\,,\ x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

$\mathcal{F}$ familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E\,,\ x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

$\mathcal{F}$ familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} \text{ puntualmente acotada}$$
$$\Downarrow$$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E,\ x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

$\mathcal{F}$ familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} \text{ puntualmente acotada}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{F} \text{ uniformemente acotada en un abierto no vacío } B \subset X$$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E,\ x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

$\mathcal{F}$ familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} \text{ puntualmente acotada}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{F} \text{ uniformemente acotada en un abierto no vacío } B \subset X$$

Basta considerar: $F_n = \{x \in X : |f(x)| \leqslant n \quad \forall f \in E\} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E,\ x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

$\mathcal{F}$ familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} \text{ puntualmente acotada}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{F} \text{ uniformemente acotada en un abierto no vacío } B \subset X$$

Basta considerar: $F_n = \{x \in X : |f(x)| \leqslant n \quad \forall f \in E\} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Lema de Baire: $\Longrightarrow$ Como X se puede tomar cualquier subconjunto abierto de un espacio métrico completo

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X, Y)$ familia de operadores lineales continuos

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X, Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \ \ \forall x \in X$

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \ \ \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|T x_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|T x_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $E \subset L(X,Y)$

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X,Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $E \subset L(X,Y)$

$A = \big\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty\big\}$. Son equivalentes:

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|T x_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $E \subset L(X,Y)$

$A = \big\{x \in X : \sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty\big\}$. Son equivalentes:

(a) A es de 2^a categoría en X

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $E \subset L(X,Y)$

$A = \left\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty\right\}$. Son equivalentes:

(a) A es de 2^a categoría en X

(b) $A = X$, es decir, E está puntualmente acotada:

$$\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$$

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{\|T(x)\| : T \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $E \subset L(X,Y)$

$A = \left\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty\right\}$. Son equivalentes:

(a) A es de 2^a categoría en X

(b) $A = X$, es decir, E está puntualmente acotada:
$$\sup\{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$$

(c) E está acotada en norma:
$$\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$$

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Entonces $T \in L(X,Y)$

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Entonces $T \in L(X,Y)$

Caracterización dual de la acotación

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Entonces $T \in L(X,Y)$

Caracterización dual de la acotación

X espacio normado, $E \subset X$

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Entonces $T \in L(X,Y)$

Caracterización dual de la acotación

X espacio normado, $E \subset X$

$$E \text{ acotado} \iff f(E) \text{ acotado} \quad \forall f \in X^*$$

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Entonces $T \in L(X,Y)$

Caracterización dual de la acotación

X espacio normado, $E \subset X$

$$E \text{ acotado} \iff f(E) \text{ acotado} \quad \forall f \in X^*$$

Explícitamente:

$$\sup\{\|x\| : x \in E\} < \infty \iff \sup\{|f(x)| : x \in E\} < \infty \quad \forall f \in X^*$$

Aplicaciones bilineales continuas

Aplicaciones bilineales continuas

Teorema

Sea X un espacio de Banach, Y y Z espacios normados y $T : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal.

Aplicaciones bilineales continuas

Teorema

Sea X un espacio de Banach, Y y Z espacios normados y $T : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal. Equivalen:

- Existe $M \geqslant 0$ tal que $\|T(x,y)\| \leqslant M\|x\|\,\|y\|$ $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$,
- T es continua en $X \times Y$ (con la topología producto),
- T es separadamente continua: para cada $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, las aplicaciones lineales

$$y \mapsto T(x_0, y) \quad (y \in Y), \qquad x \mapsto T(x, y_0) \quad (x \in X)$$

son continuas.

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\mathrm{e}^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\mathrm{e}^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$f(t) = g(\mathrm{e}^{it}) \quad \Downarrow$

Función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \qquad\qquad \Uparrow \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$$

Función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$f(t) = g(e^{it}) \quad \downdownarrows \qquad\qquad \upuparrows \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$

Función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \qquad\qquad \Uparrow \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$$

Función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$\phi :]-\pi, \pi] \to \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \ \ \forall\, t \in]-\pi, \pi]$ biyectiva

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\mathrm{e}^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$f(t) = g(\mathrm{e}^{it}) \quad \downdownarrows \qquad\qquad \upuparrows \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$$

Función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$\phi :]-\pi, \pi] \to \mathbb{T} \quad \phi(t) = \mathrm{e}^{it} \quad \forall t \in]-\pi, \pi]$ biyectiva

$E \subset \mathbb{T}$ medible $\iff$ $\phi^{-1}(E)$ medible-Lebesgue en $\mathbb{R}$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \qquad\qquad \Uparrow \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$$

Función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$\phi :]-\pi, \pi] \to \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall\, t \in]-\pi, \pi]$ biyectiva

$E \subset \mathbb{T}$ medible $\iff$ $\phi^{-1}(E)$ medible-Lebesgue en $\mathbb{R}$

$$m(E) := \frac{1}{2\pi}\, \lambda\big(\phi^{-1}(E)\big)$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \qquad \Uparrow \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$$

Función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$\phi :]-\pi, \pi] \to \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall t \in]-\pi, \pi]$ biyectiva

$E \subset \mathbb{T}$ medible $\iff$ $\phi^{-1}(E)$ medible-Lebesgue en $\mathbb{R}$

$$m(E) := \frac{1}{2\pi} \lambda\big(\phi^{-1}(E)\big)$$

$$L_p(\mathbb{T}) = L_p(m) \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Espacios $L_p(\mathbb{T})$

Espacios $L_p(\mathbb{T})$

- $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ "Funciones" medibles $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|g\|_p : \left(\int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p \, dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

Espacios $L_p(\mathbb{T})$

- $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ "Funciones" medibles $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|g\|_p : \left(\int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p \, dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

o bien, "funciones" medibles 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

Espacios $L_p(\mathbb{T})$

- $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ "Funciones" medibles $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|g\|_p : \left(\int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p \, dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

o bien, "funciones" medibles 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

- $L_\infty(\mathbb{T})$. "Funciones" medibles y esencialmente acotadas $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, o bien, "funciones" medibles, 2π-periódicas y esencialmente acotadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |g| = \operatorname{ess\,sup} |f| = \|f\|_\infty \quad \big(g \equiv f \in L_\infty(\mathbb{T})\big)$$

Espacios $L_p(\mathbb{T})$

- $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ "Funciones" medibles $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|g\|_p : \left(\int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p \, dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

  o bien, "funciones" medibles 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

- $L_\infty(\mathbb{T})$. "Funciones" medibles y esencialmente acotadas $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, o bien, "funciones" medibles, 2π-periódicas y esencialmente acotadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |g| = \operatorname{ess\,sup} |f| = \|f\|_\infty \quad \big(g \equiv f \in L_\infty(\mathbb{T})\big)$$

- $C(\mathbb{T})$. Funciones continuas $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, o bien, funciones continuas y 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con
  $\|g\|_\infty = \text{máx}\,\{|g(z)| : z \in \mathbb{T}\} = \text{máx}\,\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} \quad \big(g \equiv f \in C(\mathbb{T})\big)$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador $Id : L_q(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador $Id : L_q(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \implies \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador $Id : L_q(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \quad \Longrightarrow \quad \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

Series de Fourier

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador $Id : L_q(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \quad \Longrightarrow \quad \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

Series de Fourier

$f \equiv g \in L_1(\mathbb{T})$. Coeficientes de Fourier de f:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int}\, dt = \int_{\mathbb{T}} g(z)\, z^{-n}\, dm(z) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador $Id : L_q(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \quad \Longrightarrow \quad \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

Series de Fourier

$f \equiv g \in L_1(\mathbb{T})$. Coeficientes de Fourier de f:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt = \int_{\mathbb{T}} g(z)\,z^{-n}\,dm(z) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Serie de Fourier de f: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{int} \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,z^n$

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots)$$

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots)$$

Problema: ¿ $\{S_n(f,\cdot)\} \to f$?

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\dots)$$

Problema: ¿ $\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots)$$

Problema: ¿ $\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\dots)$$

Problema: ¿$\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Riesz: $1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f,\cdot)\} \to f$ en $L_p(\mathbb{T})$:

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\dots)$$

Problema: ¿$\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Riesz: $1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f,\cdot)\} \to f$ en $L_p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f,t) - f(t)|^p\, dt = 0$$

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots)$$

Problema: ¿ $\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Riesz: $1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f,\cdot)\} \to f$ en $L_p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f,t) - f(t)|^p \, dt = 0$$

Convergencia puntual

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\dots)$$

Problema: ¿ $\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Riesz: $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f,\cdot)\} \to f$ en $L_p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f,t) - f(t)|^p\,dt = 0$$

Convergencia puntual

Para $f \in C(\mathbb{T})$ tiene sentido preguntar:

$$¿\,\{S_n(f,t)\} \to f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,?$$

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots)$$

Problema: ¿$\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Riesz: $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f,\cdot)\} \to f$ en $L_p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f,t) - f(t)|^p\, dt = 0$$

Convergencia puntual

Para $f \in C(\mathbb{T})$ tiene sentido preguntar:

$$¿\{S_n(f,t)\} \to f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}?$$

La respuesta es negativa (DuBois-Reymond) pero no es fácil dar ejemplos

Punto de vista “funcional”

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)$$

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f, 0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt} \right) dt$$

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$\begin{aligned} S_n(f,0) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt \end{aligned}$$

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt = \varphi_n(f)$$

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt = \varphi_n(f)$$

Recordemos: $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})^*$

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt = \varphi_n(f)$$

Recordemos: $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})^*$

Luego $\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$

Punto de vista “funcional”

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt = \varphi_n(f)$$

Recordemos: $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})^*$

Luego $\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$

Ahora un poco de cálculo:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt} = \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big)}{\operatorname{sen}(t/2)} \quad (0 < |t| \leqslant \pi) \quad D_n(0) = 2n+1$$

y se comprueba sin mucha dificultad que $\{\|D_n\|_1\} \to +\infty$

Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto. . .

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$ no está acotado en norma.

Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto...

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$ no está acotado en norma. Por tanto, el conjunto

$$\left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| < \infty \right\}$$

es de 1^a categoría en $C(\mathbb{T})$.

En otras palabras,

Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto...

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$ no está acotado en norma. Por tanto, el conjunto

$$\left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| < \infty \right\} \equiv \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f,0)| < \infty \right\}$$

es de 1^a categoría en $C(\mathbb{T})$.

En otras palabras,

Aplicación a las series de Fourier

El conjunto de las funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales que la sucesión $\{S_n(f,0)\}$ está acotada es de 1^a categoría en $C(\mathbb{T})$.

Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto...

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$ no está acotado en norma. Por tanto, el conjunto

$$\left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(f)| < \infty \right\} \equiv \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,0)| < \infty \right\}$$

es de 1^a categoría en $C(\mathbb{T})$.

En otras palabras,

Aplicación a las series de Fourier

El conjunto de las funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales que la sucesión $\{S_n(f,0)\}$ está acotada es de 1^a categoría en $C(\mathbb{T})$. Así pues, la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función continua es "atípica"

Tema 13: Teoría de dualidad

Notación

Notación

Dual de un espacio normado

X normado, $L(X,\mathbb{K}) = X^*$ funcionales lineales continuos, $f \in X^*$:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X\,,\ \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\} \end{aligned}$$

X^* es siempre un espacio de Banach, el dual de X.

Notación

Dual de un espacio normado

X normado, $L(X,\mathbb{K}) = X^*$ funcionales lineales continuos, $f \in X^*$:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X\,,\ \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \text{mín}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\} \end{aligned}$$

X^* es siempre un espacio de Banach, el dual de X.

Dual algebraico y dual topológico

★ X espacio vectorial

$$X^\sharp = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ f \text{ lineal}\}$$

dual algebraico de X.

Notación

Dual de un espacio normado

X normado, $L(X,\mathbb{K}) = X^*$ funcionales lineales continuos, $f \in X^*$:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X\,,\ \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in X\} \end{aligned}$$

X^* es siempre un espacio de Banach, el dual de X.

Dual algebraico y dual topológico

★ X espacio vectorial

$$X^\sharp = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ f \text{ lineal}\}$$

dual algebraico de X.

★ (X,τ) EVT (X espacio vectorial, τ topología vectorial)

$$(X,\tau)^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ f \text{ lineal y } \tau\text{-continuo}\}$$

dual topológico de (X,τ). Si τ se sobrentiende, escribimos X^*.

Par dual

Par dual

Par dual

X espacio vectorial, $Y \leqslant X^\sharp$ que separa los puntos de X.
Escribimos $\langle x, y \rangle$ para denotar la acción de $y \in Y \leqslant X^\sharp$ sobre $x \in X$.

- (X, Y) es un par dual.
- Como X separa los puntos de Y y $X \leqslant \big(Y\big)^\sharp$, (Y, X) es también un par dual.
- Si $(X, \mathcal{T})$ un ELC separado, el dual topológico $X^* = (X, \mathcal{T})^*$ separa los puntos de X (Teorema de Hahn-Banach), luego (X, X^*) es un par dual.

Una topología localmente convexa τ es compatible con el par dual (X, Y) si $(X, \tau)^* = Y$. Si no hay confusión posible, diremos solamente que la topología τ es compatible.

Par dual

Par dual

X espacio vectorial, $Y \leqslant X^\sharp$ que separa los puntos de X.
Escribimos $\langle x, y \rangle$ para denotar la acción de $y \in Y \leqslant X^\sharp$ sobre $x \in X$.

- (X, Y) es un par dual.
- Como X separa los puntos de Y y $X \leqslant \big(Y\big)^\sharp$, (Y, X) es también un par dual.
- Si $(X, \mathcal{T})$ un ELC separado, el dual topológico $X^* = (X, \mathcal{T})^*$ separa los puntos de X (Teorema de Hahn-Banach), luego (X, X^*) es un par dual.

Una topología localmente convexa τ es compatible con el par dual (X, Y) si $(X, \tau)^* = Y$. Si no hay confusión posible, diremos solamente que la topología τ es compatible.

Siempre existen topologías en X compatibles con el par dual (X, Y):

Topología débil asociada a un par dual

Topología débil asociada a un par dual

Topología débil asociada a un par dual

(X,Y) par dual. La topología inicial en X para los elementos de Y se denota por $\sigma(X,Y)$ y se llama topología débil en X asociada al par dual (X,Y).

Topología débil asociada a un par dual

Topología débil asociada a un par dual

(X,Y) par dual. La topología inicial en X para los elementos de Y se denota por $\sigma(X,Y)$ y se llama topología débil en X asociada al par dual (X,Y).

- $\sigma(X,Y)$ es una topología locamente convexa separada en X.
- Es la topología asociada a la familia de seminormas
$$\varphi_y(x) = |\langle x,y\rangle| \qquad \big(x \in X,\ y \in Y\big).$$
- Es la menor topología en X que hace continuos a los elementos de Y.
- Los conjuntos de la forma
$$U(J,\varepsilon) = \{x \in X \ : \ |\langle x,y\rangle| \leqslant \varepsilon \quad \forall y \in J\}$$
donde J es un subconjunto finito de Y y $\varepsilon > 0$, forman una base de entornos de cero para $\sigma(X,Y)$.
- Es la topología en X de la convergencia puntual sobre los elementos de Y.

Topología débil. II

Topología débil. II

Propiedad importante

Sea (X,Y) un par dual.

- Un funcional lineal f en X es $\sigma(X,Y)$-continuo si, y sólo si, existe un $y_0 \in Y$ tal que
$$f(x) = \langle x, y_0 \rangle \qquad (x \in X).$$
- La topología $\sigma(X,Y)$ es compatible con el par dual (X,Y) (esto es, $\big(X,\sigma(X,Y)\big)^* = Y$ y es la mínima topología en X con esta propiedad.

Polares absolutos

Polares absolutos

Polar absoluto. Bipolar

Dado un par dual (X,Y) y un subconjunto no vacío A de X, el polar absoluto de A es

$$A^\circ = \{y \in Y \ : \ |\langle a, y\rangle| \leqslant 1 \ \ \forall a \in A\}.$$

Análogamente, para un subconjunto no vacío B de Y se define su polar absoluto por

$$B^\circ = \{x \in X \ : \ |\langle x, b\rangle| \leqslant 1 \ \ \forall b \in B\}.$$

Para $A \subset X$ tiene sentido el bipolar $A^{\circ\circ}$, que vuelve a ser subconjunto de X.

Polares absolutos

Polar absoluto. Bipolar

Dado un par dual (X,Y) y un subconjunto no vacío A de X, el polar absoluto de A es

$$A^\circ = \{y \in Y \;:\; |\langle a,y\rangle| \leqslant 1 \;\; \forall a \in A\}.$$

Análogamente, para un subconjunto no vacío B de Y se define su polar absoluto por

$$B^\circ = \{x \in X \;:\; |\langle x,b\rangle| \leqslant 1 \;\; \forall b \in B\}.$$

Para $A \subset X$ tiene sentido el bipolar $A^{\circ\circ}$, que vuelve a ser subconjunto de X.

Observación

Si (X,Y) es un par dual, la familia de conjuntos $\{J^\circ : J \subset Y,\ J \text{ finito}\}$ es base de entornos de cero para la topología $\sigma(X,Y)$.

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

(X, Y) par dual, $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}A)$
(cierre en cualquier topología en X compatible con el par dual (X, Y)).

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

(X,Y) par dual, $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}A)$
(cierre en cualquier topología en X compatible con el par dual (X,Y)).

Consecuencia 1

(X,Y) par dual, τ_1 topología compatible en X, τ_2 topología compatible en Y. Entonces la aplicación $M \longmapsto M^\circ$ es un anti-isomorfismo del retículo de los subespacios τ_1-cerrados de X en el retículo de los subespacios τ_2-cerrados de Y. En particular, $\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)^\circ = \overline{\sum_{i\in I} M_i^\circ}$.

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

(X,Y) par dual, $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}A)$
(cierre en cualquier topología en X compatible con el par dual (X,Y)).

Consecuencia 1

(X,Y) par dual, τ_1 topología compatible en X, τ_2 topología compatible en Y. Entonces la aplicación $M \longmapsto M^\circ$ es un anti-isomorfismo del retículo de los subespacios τ_1-cerrados de X en el retículo de los subespacios τ_2-cerrados de Y. En particular, $\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)^\circ = \overline{\sum_{i\in I} M_i^\circ}$.

Consecuencia 2

(X,X_1), (Y,Y_1) pares duales, $T : X \longrightarrow Y$ lineal. Equivalen:

- T es $\sigma(X,X_1) - \sigma(Y,Y_1)$ continua,
- Existe $S : Y_1 \longrightarrow X_1$ tal que

$$\langle Tx, v\rangle = \langle x, Sv\rangle \quad \big(x \in X,\ v \in Y_1\big).$$

En este caso, S es única ($S = T^*$), lineal, $\sigma(Y_1,Y) - \sigma(X_1,X)$ continua y $T^{**} = T$.

Topologías débil y débil-$*$ de un ELC

Topologías débil y débil-$*$ de un ELC

Topología débil y topología débil-$*$ de un ELC

X ELC separado, (X,X^*) par dual.

- $\sigma(X,X^*)$ es LA topología débil de X.
  - Es la menor topología en X que hace continuos a los elementos de X^*.
  - En particular, $(X,\sigma(X,X^*))^* = X^*$.
  - Es la topología en X de la convergencia puntual sobre los elementos de X^*.
  - Esto es, topología en X de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos finitos de X^*.

- $\sigma(X^*,X)$ es la topología débil-$*$ de X^* como dual de X (o asociada al par dual (X,X^*)).
  - Es la menor topología en X^* que hace continuos a los elementos de X.
  - En particular, $(X^*,\sigma(X^*,X))^* = X$.
  - Es la topología en X^* de la convergencia puntual sobre los elementos de X.
  - Esto es, topología en X^* de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos finitos de X.

Observaciones

Observaciones

Observaciones

X ELC separado.

- En general, en X^* puede que no tengamos ninguna topología destacada.

Observaciones

Observaciones

X ELC separado.

- En general, en X^* puede que no tengamos ninguna topología destacada.
- En ese caso, al menos disponemos de la topología $\sigma(X^*, X)$.

Ejemplo: espacio de las distribuciones

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $\mathcal{D}(\Omega)$ funciones test (ELC con su topología natural).

★ En $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$ se considera la topología $\sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)$.

★ $\Big(\mathcal{D}'(\Omega), \sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)\Big)$ es un ELC separado secuencialmente completo.

★ $\Big(\mathcal{D}'(\Omega), \beta\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)\Big)$ es un ELC separado completo y con la propiedad de Heine-Borel.

Observaciones

Observaciones

X ELC separado.

- En general, en X^* puede que no tengamos ninguna topología destacada.
- En ese caso, al menos disponemos de la topología $\sigma(X^*, X)$.
- Este es sólo el comienzo de la teoría de dualidad, podemos considerar otras topologías en X^*:
    - Topología de Mackey $\tau(X^*, X)$: supremo de todas las topologías compatibles y topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos absolutamente convexos y $\sigma(X, X^*)$-compactos de X.
    - Topología fuerte $\beta(X^*, X)$: topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de X.

Ejemplo: espacio de las distribuciones

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $\mathcal{D}(\Omega)$ funciones test (ELC con su topología natural).

★ En $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$ se considera la topología $\sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)$.

★ $\Big(\mathcal{D}'(\Omega), \sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)\Big)$ es un ELC separado secuencialmente completo.

★ $\Big(\mathcal{D}'(\Omega), \beta\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)\Big)$ es un ELC separado completo y con la propiedad de Heine-Borel.

Algunos resultados

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X,τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X,τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Topología débil de un subespacio

X ELC separado, Y subespacio de X. Entonces la topología débil $\sigma(Y,Y^*)$ de Y coincide con la restricción a Y de la topología débil $\sigma(X,X^*)$ de X.

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X,τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Topología débil de un subespacio

X ELC separado, Y subespacio de X. Entonces la topología débil $\sigma(Y,Y^*)$ de Y coincide con la restricción a Y de la topología débil $\sigma(X,X^*)$ de X.

¡Los dos resultados anteriores son falsos para la topología débil-$*$!

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X, τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Topología débil de un subespacio

X ELC separado, Y subespacio de X. Entonces la topología débil $\sigma(Y, Y^*)$ de Y coincide con la restricción a Y de la topología débil $\sigma(X, X^*)$ de X.

¡Los dos resultados anteriores son falsos para la topología débil-$*$!

Teorema de Alaoglu-Bourbaki

Sea X un ELC separado y U un entorno de cero en X. Entonces U° es un subconjunto $\sigma(X^*, X)$-compacto de X^*.

Algunos resultados en espacios normados

Algunos resultados en espacios normados

Observación

X espacio normado.

- La familia de todos los conjuntos de la forma

$$\{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \varepsilon \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}^\circ$$

  moviendo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_n \in S_{X^*}$, es base de entornos de cero para la topología $\sigma(X, X^*)$.

- La familia de todos los conjuntos de la forma

$$\{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \varepsilon \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^\circ$$

  moviendo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n \in S_X$, es base de entornos de cero para la topología $\sigma(X^*, X)$.

Algunos resultados en espacios normados. II

Algunos resultados en espacios normados. II

Proposición

X espacio normado de dimensión infinita.

- Los subconjuntos $\sigma(X,X^*)$-abiertos de X y los subconjunto $\sigma(X^*,X)$-abiertos de X^* no están acotados (contienen subespacios de codimensión finita).
- $\overline{S_X}^{\sigma(X,X^*)} = B_X$ y $\overline{S_{X^*}}^{\sigma(X^*,X)} = B_{X^*}$.
- En consecuencia, las aplicaciones

$$x \longmapsto \|x\| \quad (x \in X) \quad \text{y} \quad x^* \longmapsto \|x^*\| \quad (x^* \in X)$$

  son inferiormente semicontinuas para las topologías débil y débil-* (resp.) pero no son continuas.
- (Tª de Mazur) $M \subset X$ convexo, entonces $\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\|\cdot\|}$.

Algunos resultados en espacios normados. II

Proposición

X espacio normado de dimensión infinita.

- Los subconjuntos $\sigma(X,X^*)$-abiertos de X y los subconjunto $\sigma(X^*,X)$-abiertos de X^* no están acotados (contienen subespacios de codimensión finita).
- $\overline{S_X}^{\sigma(X,X^*)} = B_X$ y $\overline{S_{X^*}}^{\sigma(X^*,X)} = B_{X^*}$.
- En consecuencia, las aplicaciones

$$x \longmapsto \|x\| \quad (x \in X) \quad \text{y} \quad x^* \longmapsto \|x^*\| \quad (x^* \in X)$$

son inferiormente semicontinuas para las topologías débil y débil-* (resp.) pero no son continuas.

- (Tª de Mazur) $M \subset X$ convexo, entonces $\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\|\cdot\|}$.

Teorema de Banach-Alaoglu

X espacio normado: B_{X^*} es $\sigma(X^*,X)$-compacto. Por tanto, todo subconjunto de X^* acotado en norma y $\sigma(X^*,X)$-cerrado es compacto.

Bidual. Espacios reflexivos

Bidual. Espacios reflexivos

Bidual. Espacio reflexivo

X espacio normado, $X^{**} = (X^*)^*$ bidual de X.
Definimos $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ por

$$[J_X(x)](x^*) = x^*(x) \qquad \big(x^* \in X^*,\ x \in X\big)$$

inclusión canónica de X en X^{**}, isométrica por el Teorema de Hahn-Banach.

★ En X^{**} podemos considerar la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ que al restringirla a $X = J_X(X)$ nos queda $\sigma(X, X^*)$.

★ Es claro (THB) que X es $\sigma(X^{**}, X)$ denso en X^{**}.

★ X es reflexivo si J_X es sobreyectiva (equivalentemente, si $J_X(B_X) = B_{X^{**}}$).

Algunos resultados importantes

Algunos resultados importantes

Teorema de Goldstine

X espacio normado, $J_X(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$.

Algunos resultados importantes

Teorema de Goldstine

X espacio normado, $J_X(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$.

Teorema de Dieudonné

X espacio normado. X reflexivo $\iff$ B_X $\sigma(X, X^*)$-compacta.

Algunos resultados importantes

Teorema de Goldstine

X espacio normado, $J_X(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$.

Teorema de Dieudonné

X espacio normado. X reflexivo $\iff$ B_X $\sigma(X, X^*)$-compacta.

Consecuencia

X reflexivo $\implies$ todo conjunto $\sigma(X, X^*)$-cerrado y acotado es $\sigma(X, X^*)$-compacto.

Convergencia débil y débil-$*$

Convergencia débil y débil-$*$

Convergencia

X espacio normado, $\{x_n\}$ sucesión en X, $\{f_n\}$ sucesión en X^*.

- $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ en la topología $\sigma(X, X^*)$ si $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $f \in X^*$.
  ★ En este caso, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.
- $\{f_n\}$ converge a $f \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ si $\{f_n(x)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $x \in X$.
  ★ Si X es completo, en este caso, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Convergencia débil y débil-$*$

Convergencia

X espacio normado, $\{x_n\}$ sucesión en X, $\{f_n\}$ sucesión en X^*.

- $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ en la topología $\sigma(X, X^*)$ si $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $f \in X^*$.
  ★ En este caso, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.
- $\{f_n\}$ converge a $f \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ si $\{f_n(x)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $x \in X$.
  ★ Si X es completo, en este caso, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Algunos casos particulares

Para las topologías

$$\sigma(c_0, \ell_1), \quad \sigma(\ell_1, c_0), \quad \sigma(\ell_\infty, \ell_1) \quad \text{y} \quad \sigma(\ell_p, \ell_q) \ \ (1 < p, q < \infty),$$

la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ es equivalente a la acotación en norma y la convergencia coordenada a coordenada.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Proposición

- Si X es separable $\implies$ $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es metrizable.
- Si X^* es separable $\implies$ $(B_X, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Proposición

- Si X es separable $\implies$ $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es metrizable.
- Si X^* es separable $\implies$ $(B_X, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

Consecuencia

- Toda sucesión acotada de un espacio reflexivo admite una subsucesión débilmente convergente.
- Toda sucesión acotada del dual de un espacio de Banach separable admite una subsucesión débil-$*$-mente convergente.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Proposición

- Si X es separable $\Longrightarrow$ $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es metrizable.
- Si X^* es separable $\Longrightarrow$ $(B_X, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

Consecuencia

- Toda sucesión acotada de un espacio reflexivo admite una subsucesión débilmente convergente.
- Toda sucesión acotada del dual de un espacio de Banach separable admite una subsucesión débil-$*$-mente convergente.

Teorema de Banach-Mazur

Todo espacio normado separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C[0,1]$.

Algunos teoremas importantes

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Teorema de Josefson-Nissenzweig

X espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión en S_{X^*} que es $\sigma(X^*, X)$-convergente a cero.

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Teorema de Josefson-Nissenzweig

X espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión en S_{X^*} que es $\sigma(X^*, X)$-convergente a cero.

Rosenthal–Odell

X espacio de Banach separable. Equivalen

- X no contiene (un subespacio isomorfo) a ℓ_1
- B_X es $\sigma(X^{**}, X^*)$-secuencialmente densa en $B_{X^{**}}$.

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Teorema de Josefson-Nissenzweig

X espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión en S_{X^*} que es $\sigma(X^*, X)$-convergente a cero.

Rosenthal–Odell

X espacio de Banach separable. Equivalen

- X no contiene (un subespacio isomorfo) a ℓ_1
- B_X es $\sigma(X^{**}, X^*)$-secuencialmente densa en $B_{X^{**}}$.

Observaciones

- La topología $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$ no es metrizable en B_{ℓ_1}.
- Para $X = \ell_1$, B_X es $\sigma(X^{**}, X^*)$-secuencialmente cerrada.

Compacidad débil y sucesiones

Compacidad débil y sucesiones

Teorema de Eberlein-Smulian

X espacio normado, $A \subset X$. Equivalen:

- A es $\sigma(X, X^*)$-compacto.
- A es $\sigma(X, X^*)$ secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de A puede extraerse una subsucesión $\sigma(X, X^*)$-convergente a un elemento de A).

Compacidad débil y sucesiones

Teorema de Eberlein-Smulian

X espacio normado, $A \subset X$. Equivalen:

- A es $\sigma(X, X^*)$-compacto.
- A es $\sigma(X, X^*)$ secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de A puede extraerse una subsucesión $\sigma(X, X^*)$-convergente a un elemento de A).

Corolario

Si X es reflexivo, cualquier sucesión acotada en norma admite una subsucesión $\sigma(X, X^*)$ convergente.

Compacidad débil y sucesiones

Teorema de Eberlein-Smulian

X espacio normado, $A \subset X$. Equivalen:

- A es $\sigma(X, X^*)$-compacto.
- A es $\sigma(X, X^*)$ secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de A puede extraerse una subsucesión $\sigma(X, X^*)$-convergente a un elemento de A).

Corolario

Si X es reflexivo, cualquier sucesión acotada en norma admite una subsucesión $\sigma(X, X^*)$ convergente.

Como hemos visto, esto último se puede demostrar sin usar el Teorema de Eberlein-Smulian

Tercer dual. Teorema de Dixmier

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^{\perp}.$$

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^{\perp}.$$

Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^{\perp}$ y la suma es topológico directa.

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^\perp.$$

Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^\perp$ y la suma es topológico directa.
Recíprocamente, si Y es un espacio de Banach y existe una proyección $P : Y^{**} \longrightarrow J_Y(Y)$ con $\|P\| = 1$ y tal que $\ker P$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-cerrado, entonces existe un espacio X tal que $Y \equiv X^*$.

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^\perp.$$

Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^\perp$ y la suma es topológico directa.
Recíprocamente, si Y es un espacio de Banach y existe una proyección $P : Y^{**} \longrightarrow J_Y(Y)$ con $\|P\| = 1$ y tal que $\ker P$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-cerrado, entonces existe un espacio X tal que $Y \equiv X^*$.

Ejemplo

$X = c_0,\ X^* = \ell_1,\ X^{**} = \ell_\infty. \implies X^{***} = \ell_\infty^* \equiv \ell_1 \oplus_1 c_0^\perp.$
Esto es, c_0 es un M-ideal en ℓ_∞.

Puntos extremos y subconjuntos extremales

Puntos extremos y subconjuntos extremales

X espacio vectorial, $A \subset X$.

★ $\emptyset \neq E \subset A$ es subconjunto extremal de A si

$$x, y \in A, \;\; 0 < t < 1, \;\; (1-t)x + ty \in E \qquad \Longrightarrow \qquad x, y \in E.$$

★ $a \in A$ es un punto extremo de A cuando $\{a\}$ es un subconjunto extremal de A, es decir,

$$x, y \in A, \;\; 0 < t < 1, \;\; (1-t)x + ty = a \qquad \Longrightarrow \qquad x = y = a.$$

★ $\mathrm{ext}(A)$ conjunto (posiblemente vacío) de los puntos extremos de A.

Puntos extremos y subconjuntos extremales

X espacio vectorial, $A \subset X$.

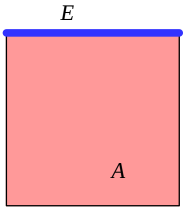
★ $\emptyset \neq E \subset A$ es subconjunto extremal de A si

$$x, y \in A, \;\; 0 < t < 1, \;\; (1-t)x + ty \in E \qquad \Longrightarrow \qquad x, y \in E.$$

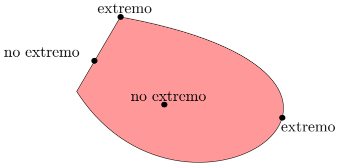
★ $a \in A$ es un punto extremo de A cuando $\{a\}$ es un subconjunto extremal de A, es decir,

$$x, y \in A, \;\; 0 < t < 1, \;\; (1-t)x + ty = a \qquad \Longrightarrow \qquad x = y = a.$$

★ $\mathrm{ext}(A)$ conjunto (posiblemente vacío) de los puntos extremos de A.



E es un subconjunto extremal de A



Teorema de Minkowski-Carathéodory

Teorema de Minkowski-Carathéodory

Teorema de Minkowski-Carathéodory

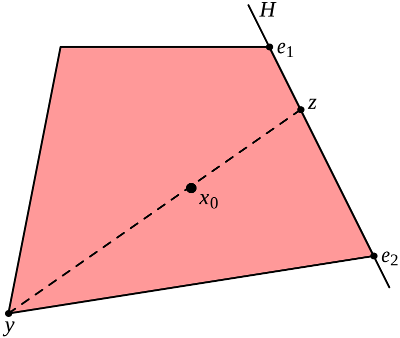
$K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces, cada $x \in K$ se puede escribir como combinación convexa de, a lo sumo, $n+1$ puntos extremos de K.
En particular,
$$K = \operatorname{co}\big(\operatorname{ext}(K)\big).$$

Teorema de Minkowski-Carathéodory

Teorema de Minkowski-Carathéodory

$K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces, cada $x \in K$ se puede escribir como combinación convexa de, a lo sumo, $n+1$ puntos extremos de K.
En particular,

$$K = \operatorname{co}\big(\operatorname{ext}(K)\big).$$



Teorema de Krein-Milman

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx } \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx } \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema

X EVT tal que X^* separa puntos, $\emptyset \neq A \subset X$ compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de A contiene un punto extremo de A. En particular, A tiene puntos extremos.

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx } \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema

X EVT tal que X^* separa puntos, $\emptyset \neq A \subset X$ compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de A contiene un punto extremo de A. En particular, A tiene puntos extremos.

Teorema de Krein-Milman para ELC

X ELC separado, $A \subset X$ compacto. Entonces $A \subseteq \overline{\text{co}}\big(\text{ext}(A)\big)$. Si A es convexo, se da la igualdad.

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx } \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema

X EVT tal que X^* separa puntos, $\emptyset \neq A \subset X$ compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de A contiene un punto extremo de A. En particular, A tiene puntos extremos.

Teorema de Krein-Milman para ELC

X ELC separado, $A \subset X$ compacto. Entonces $A \subseteq \overline{\text{co}}\big(\text{ext}(A)\big)$. Si A es convexo, se da la igualdad.

Teorema de Krein-Milman revertido

X ELC separado, $\emptyset \neq C \subset X$ convexo y compacto, $E \subset C$ tal que $C = \overline{\text{co}}(E)$. Entonces, $\text{ext}(C) \subseteq \overline{E}$.

Principio del máximo de Bauer

Principio del máximo de Bauer

Lema

K compacto T_2, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente

$$\Longrightarrow \quad f \text{ alcanza máximo en } K$$

Principio del máximo de Bauer

Lema

K compacto T_2, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente

$$\Longrightarrow \quad f \text{ alcanza máximo en } K$$

Definición

X espacio vectorial, $A \subset X$ convexo, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es casi-convexa si

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leqslant \text{máx}\{f(x),\ f(y)\} \qquad \big(x,y \in A,\ t \in [0,1]\big).$$

Principio del máximo de Bauer

Lema

K compacto T_2, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente

$$\Longrightarrow \quad f \text{ alcanza máximo en } K$$

Definición

X espacio vectorial, $A \subset X$ convexo, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es casi-convexa si

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leqslant \max\{f(x),\ f(y)\} \qquad \big(x,y \in A,\ t \in [0,1]\big).$$

Principio del máximo de Bauer

X EVT tal que X^* separa puntos, $K \subset X$ convexo y compacto, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ casi-convexa y semicontinua superiormente.

$$\Longrightarrow f \ \text{ alcanza su máximo en un punto extremo de } K$$

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema de Arens-Kelley

K compacto T_2. Entonces $\operatorname{ext}\left(B_{C(K)^*}\right) = \{\lambda\delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$.

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema de Arens-Kelley

K compacto T_2. Entonces $\operatorname{ext}\left(B_{C(K)^*}\right) = \{\lambda\,\delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$.

Teorema clásico de Banach-Stone

H y K compactos y $\Phi : C(H) \longrightarrow C(K)$ isomorfismo isométrico. Entonces, existe $\sigma : K \longrightarrow H$ homeomorfismo y $\theta \in C(K)$ con $\theta(K) \subseteq \mathbb{T}$ tales que

$$\big[\Phi(x)\big](t) = \theta(t)\, x\big(\sigma(t)\big) \qquad \big(t \in K,\ x \in C(H)\big)$$

En particular, K y H son homeomorfos.

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema de Arens-Kelley

K compacto T_2. Entonces $\operatorname{ext}\left(B_{C(K)^*}\right) = \{\lambda\,\delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$.

Teorema clásico de Banach-Stone

H y K compactos y $\Phi : C(H) \longrightarrow C(K)$ isomorfismo isométrico. Entonces, existe $\sigma : K \longrightarrow H$ homeomorfismo y $\theta \in C(K)$ con $\theta(K) \subseteq \mathbb{T}$ tales que

$$\big[\Phi(x)\big](t) = \theta(t)\,x\big(\sigma(t)\big) \qquad \big(t \in K,\ x \in C(H)\big)$$

En particular, K y H son homeomorfos.

Observación (Milyutin)

K y H compactos metrizables no numerables

$$\Longrightarrow\ C(K) \text{ y } C(H) \text{ son isomorfos}$$

Una extensión: el Teorema de Choquet

Una extensión: el Teorema de Choquet

Teorema de Choquet

X ELC separado, $K \subset X$ convexo, compacto y metrizable. Entonces para cada $x_0 \in K$, existe una medida de probabilidad μ_{x_0} en K tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k)\, d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \qquad \mu_{x_0}\big(\mathrm{ext}(K)\big) = 1.$$

Una extensión: el Teorema de Choquet

Teorema de Choquet

X ELC separado, $K \subset X$ convexo, compacto y metrizable. Entonces para cada $x_0 \in K$, existe una medida de probabilidad μ_{x_0} en K tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k)\, d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \qquad \mu_{x_0}\big(\mathrm{ext}(K)\big) = 1.$$

Se puede aplicar a...

- X separable, $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$.
- X reflexivo separable, $K = (B_X, \sigma(X, X^*))$.

Una extensión: el Teorema de Choquet

Teorema de Choquet

X ELC separado, $K \subset X$ convexo, compacto y metrizable. Entonces para cada $x_0 \in K$, existe una medida de probabilidad μ_{x_0} en K tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k)\, d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \qquad \mu_{x_0}\big(\mathrm{ext}(K)\big) = 1.$$

Se puede aplicar a...

- X separable, $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$.
- X reflexivo separable, $K = (B_X, \sigma(X, X^*))$.

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Teorema de Rainwater

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Teorema de Rainwater

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Es una extensión del siguiente resultado:

Teorema de Rainwater

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Es una extensión del siguiente resultado:

Proposición

K espacio topológico compacto, $\{f_n\}$ sucesión en $C(K)$, $f \in C(K)$. Equivalen:

- $\{f_n\} \longrightarrow f$ en la topología $\sigma(C(K), C(K)^*)$,
- $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado y $\{f_n(t)\} \longrightarrow f(t)$ para cada $t \in K$.

Teorema de Rainwater

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Es una extensión del siguiente resultado:

Proposición

K espacio topológico compacto, $\{f_n\}$ sucesión en $C(K)$, $f \in C(K)$. Equivalen:

- $\{f_n\} \longrightarrow f$ en la topología $\sigma(C(K), C(K)^*)$,
- $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado y $\{f_n(t)\} \longrightarrow f(t)$ para cada $t \in K$.

- Si conocemos que $C(K)^* \equiv M(K)$, este resultado es consecuencia inmediata del Teorema del Convergencia dominada de Lebesgue.
- Si no conocemos ninguna representación de $C(K)^*$, el resultado es consecuencia del Teorema de Rainwater y la descripción de los puntos extremos de la bola unidad de $C(K)^*$ como deltas de Dirac.

Tema 14: El Teorema Espectral

Operador adjunto (I)

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, T^* y) \quad \forall x \in X\,, \;\; \forall y \in Y$$

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx\,|\,y) = (x\,|\,T^*y) \quad \forall x \in X\,, \ \ \forall y \in Y$$

Se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X,Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx\,|\,y) = (x\,|\,T^*y) \quad \forall x \in X\,, \;\; \forall y \in Y$$

Se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Propiedades inmediatas

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^* y) \quad \forall x \in X\,, \ \ \forall y \in Y$$

Se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X,Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx\,|\,y) = (x\,|\,T^* y) \quad \forall x \in X\,, \ \ \forall y \in Y$$

Se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y,X)\,, \quad \|T^*\| = \|T\| = \|T^* T\|^{1/2}$

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, T^* y) \quad \forall x \in X\,, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y,X)\,, \quad \|T^*\| = \|T\| = \|T^* T\|^{1/2}$
- $(T+S)^* = T^* + S^* \qquad \forall S \in L(X,Y)$

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, T^* y) \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y$$

Se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y, X), \quad \|T^*\| = \|T\| = \|T^* T\|^{1/2}$
- $(T + S)^* = T^* + S^* \quad \forall S \in L(X, Y)$
- $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

X,Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$. Existe $T^* : Y \to X$ verificando:

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, T^* y) \quad \forall x \in X\,, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y,X)\,, \quad \|T^*\| = \|T\| = \|T^* T\|^{1/2}$
- $(T+S)^* = T^* + S^* \qquad \forall S \in L(X,Y)$
- $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- Z Hilbert, $S \in L(Y,Z) \implies (ST)^* = T^* S^*$

Operador adjunto (II)

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$.

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo,

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^* T = I_X$

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y
  $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$
  Se dice entonces que T es un operador unitario

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$
  Se dice entonces que T es un operador unitario

Operadores autoadjuntos y operadores normales

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X, Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$
  Se dice entonces que T es un operador unitario

Operadores autoadjuntos y operadores normales

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^{\perp}$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$
  Se dice entonces que T es un operador unitario

Operadores autoadjuntos y operadores normales

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$

- T es autoadjunto cuando $T^* = T$.

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$
  Se dice entonces que T es un operador unitario

Operadores autoadjuntos y operadores normales

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$

- T es autoadjunto cuando $T^* = T$. Entonces:

$$\|T\| = \sup\left\{ |(Tx|x)| \ : \ \|x\| = 1 \right\}$$

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$
  Se dice entonces que T es un operador unitario

Operadores autoadjuntos y operadores normales

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$

- T es autoadjunto cuando $T^* = T$. Entonces:

$$\|T\| = \sup \left\{ |(Tx|x)| \ : \ \|x\| = 1 \right\}$$

- T es normal cuando $T^*T = TT^*$.

Operador adjunto (II)

Relaciones entre un operador y su adjunto

X, Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- T inyectivo $\Leftrightarrow$ $T^*(Y)$ denso en X
- T isomorfismo $\Leftrightarrow$ T^* isomorfismo, en cuyo caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- T isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$
- T isomorfismo isométrico $\Leftrightarrow$ $T^*T = I_X$ y $TT^* = I_Y$ $\Leftrightarrow$ $T^* = T^{-1}$
  Se dice entonces que T es un operador unitario

Operadores autoadjuntos y operadores normales

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$

- T es autoadjunto cuando $T^* = T$. Entonces:

$$\|T\| = \sup\left\{ |(Tx|x)| \ : \ \|x\| = 1 \right\}$$

- T es normal cuando $T^*T = TT^*$. Equivalentemente:

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \ \ \forall x \in H$$

Operador adjunto (III)

Operador adjunto (III)

Idempotentes

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

(iii) P es la proyección ortogonal de H sobre $P(H)$

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

(iii) P es la proyección ortogonal de H sobre $P(H)$

Se dice simplemente que P es una proyección

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

(iii) P es la proyección ortogonal de H sobre $P(H)$

Se dice simplemente que P es una proyección

Caso complejo

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

(iii) P es la proyección ortogonal de H sobre $P(H)$

Se dice simplemente que P es una proyección

Caso complejo

H espacio de Hilbert complejo, $T \in L(H)$.

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

(iii) P es la proyección ortogonal de H sobre $P(H)$

Se dice simplemente que P es una proyección

Caso complejo

H espacio de Hilbert complejo, $T \in L(H)$.

- $(Tx|x) = 0 \ \ \forall x \in H \implies T = 0$

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

(iii) P es la proyección ortogonal de H sobre $P(H)$

Se dice simplemente que P es una proyección

Caso complejo

H espacio de Hilbert complejo, $T \in L(H)$.

- $(Tx|x) = 0 \;\; \forall x \in H \implies T = 0$
- $T = T^* \iff (Tx|x) \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in H$

Operador adjunto (III)

Idempotentes

H espacio de Hilbert, $P \in L(H)$, $P^2 = P$. Equivalen:

(i) P es autoadjunto: $P^* = P$

(ii) P es normal: $P^* P = P P^*$

(iii) P es la proyección ortogonal de H sobre $P(H)$

Se dice simplemente que P es una proyección

Caso complejo

H espacio de Hilbert complejo, $T \in L(H)$.

- $(Tx|x) = 0 \ \forall x \in H \implies T = 0$
- $T = T^* \iff (Tx|x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in H$
- T se expresa de manera única como $T = A + iB$ con $A = A^*$ y $B = B^*$.
  Por tanto T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.

Operadores de rango finito

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

H espacio de Hilbert, $u, v \in H$.

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

H espacio de Hilbert, $u, v \in H$.

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

H espacio de Hilbert, $u, v \in H$.

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)\,, \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u, v \in H.$$

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H), \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H), \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u, v \in H$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u, v \in H.$$

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H), \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H), \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \, \|v\|$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u, v \in H.$$

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)\,, \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H)\,, \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\|\,\|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u, v \in H.$$

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)\,, \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H)\,, \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v \text{ con } u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\|\,\|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S\,[u \otimes v] = u \otimes Sv\,, \quad [u \otimes v]\,S = S^* u \otimes v$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u, v \in H.$$
$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)\,, \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H)\,, \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\|\,\|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S\,[u \otimes v] = u \otimes Sv\,, \quad [u \otimes v]\,S = S^* u \otimes v$

Operadores de rango finito

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

H espacio de Hilbert, $u, v \in H$.

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H), \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H), \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \, \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S\,[u \otimes v] = u \otimes Sv, \quad [u \otimes v]\,S = S^* u \otimes v$

Operadores de rango finito

$$F(H) = \Big\{ T \in L(H) : \dim \big(T(H) \big) < \infty \Big\}$$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u, v \in H.$$
$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)\,, \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)\,, \quad \dim T(H) \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad T = u \otimes v$ con $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\|\,\|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \quad \Longrightarrow \quad S\,[u \otimes v] = u \otimes Sv\,, \quad [u \otimes v]\,S = S^* u \otimes v$

Operadores de rango finito

$$F(H) = \Big\{ T \in L(H) : \dim \big(T(H) \big) < \infty \Big\}$$

- $T \in F(H) \quad \Longrightarrow \quad T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u, v \in H.$$
$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$, $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H)$, $\dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \, \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv$, $[u \otimes v] S = S^* u \otimes v$

Operadores de rango finito

$$F(H) = \Big\{ T \in L(H) : \dim \big(T(H) \big) < \infty \Big\}$$

- $T \in F(H) \implies T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$
- $F(H)$ subespacio vectorial de $L(H)$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u,v \in H.$$

$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H), \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H), \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u,v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\|\, \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S\,[u \otimes v] = u \otimes Sv, \quad [u \otimes v]\, S = S^* u \otimes v$

Operadores de rango finito

$$F(H) = \Big\{ T \in L(H) : \dim \big(T(H) \big) < \infty \Big\}$$

- $T \in F(H) \implies T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$
- $F(H)$ subespacio vectorial de $L(H)$
- $T \in F(H) \implies T^* \in F(H)$

Operadores de rango finito

Operadores de rango uno

$$H \text{ espacio de Hilbert, } u,v \in H.$$
$$[u \otimes v](x) = (x \,|\, u)\, v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)\,, \quad [u \otimes v](H) \subset \mathbb{K} v$
- $T \in L(H)\,, \quad \dim T(H) \leqslant 1 \implies T = u \otimes v$ con $u,v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\|\,\|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S\,[u \otimes v] = u \otimes Sv\,, \quad [u \otimes v]\,S = S^* u \otimes v$

Operadores de rango finito

$$F(H) = \Big\{ T \in L(H) : \dim \big(T(H)\big) < \infty \Big\}$$

- $T \in F(H) \implies T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$
- $F(H)$ subespacio vectorial de $L(H)$
- $T \in F(H) \implies T^* \in F(H)$
- $T \in F(H)\,, \; S \in L(H) \implies ST\,, TS \in F(H)$

Operadores compactos

Operadores compactos

Definición de operador compacto

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$.

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{ operadores compactos en } H \}$$

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{ operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$, subespacio cerrado

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{ operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$, subespacio cerrado
- $F(H) \subset K(H)$

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{ operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$, subespacio cerrado
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), \quad S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{ operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$, subespacio cerrado
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), \quad S \in L(H) \quad \Longrightarrow \quad ST\,, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \quad \Longrightarrow \quad \overline{T(H)}$ es separable.

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{\text{ operadores compactos en } H\}$$

- $K(H) \subset L(H)$, subespacio cerrado
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), \quad S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \implies \overline{T(H)}$ es separable. Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ base ortonormal de $\overline{T(H)}$ y P_n la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Lin}\{e_k : k \leqslant n\}$. Entonces $\{\|P_n T - T\|\} \to 0$. Por tanto:

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{\text{ operadores compactos en } H\}$$

- $K(H) \subset L(H)$, subespacio cerrado
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), \quad S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \implies \overline{T(H)}$ es separable. Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ base ortonormal de $\overline{T(H)}$ y P_n la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Lin}\{e_k : k \leqslant n\}$. Entonces $\{\|P_n T - T\|\} \to 0$. Por tanto:
- $K(H) = \overline{F(H)}$

Operadores compactos

Definición de operador compacto

H espacio de Hilbert, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$. Operador compacto en H:

Aplicación lineal $T : H \to H$ tal que

$\overline{T(B_H)}$ es compacto

equivalentemente, tal que $T(B_H)$ es precompacto

Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{ operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$, subespacio cerrado
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), \quad S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \implies \overline{T(H)}$ es separable. Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ base ortonormal de $\overline{T(H)}$ y P_n la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Lin}\{e_k : k \leqslant n\}$. Entonces $\{\|P_n T - T\|\} \to 0$. Por tanto:
- $K(H) = \overline{F(H)}$
- $T \in K(H) \implies T^* \in K(H)$

Ejemplos (I)

Ejemplos (I)

Matrices

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}, \ \{y_j : j \in J\}$.

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \;\; \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j\,)$$

Ejemplos (I)

Matrices

X,Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \;\; \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j\,)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i\,) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \;\; \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)$, $\phi \in L_\infty(\mu)$

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)$, $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)$, $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L\big(L_2(\mu)\big)$, $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \;\; \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)$, $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L\big(L_2(\mu)\big)$, $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)$, $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L\big(L_2(\mu)\big)$, $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$, $\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}$ $(t \in \Omega)$

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)$, $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L\big(L_2(\mu)\big)$, $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$, $\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}$ $(t \in \Omega)$
- M_ϕ siempre es normal

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \quad \longrightarrow \quad \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \quad \longrightarrow \quad \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \; H = L_2(\mu), \quad \phi \in L_\infty(\mu)$$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L\big(L_2(\mu)\big)$, $\quad \|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$, $\quad \phi^*(t) = \overline{\phi(t)} \quad (t \in \Omega)$
- M_ϕ siempre es normal
- M_ϕ autoadjunto $\iff$ $\overline{\phi} = \phi$ c.p.d.

Ejemplos (I)

Matrices

X, Y espacios de Hilbert con bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$.

$$T \in L(X,Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \to \mathbb{K}, \quad \alpha(i,j) = (Tx_i \,|\, y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x \,|\, x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i,j)\, y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i,j) = \overline{\alpha(j,i)}$$

Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)$, $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L\big(L_2(\mu)\big)$, $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$, $\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}$ $(t \in \Omega)$
- M_ϕ siempre es normal
- M_ϕ autoadjunto $\iff$ $\overline{\phi} = \phi$ c.p.d.
- M_ϕ unitario $\iff$ $|\phi| = 1$ c.p.d.

Ejemplos(II)

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \to 0$$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \; H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

Operador integral de núcleo k:

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k\, f](s) = \displaystyle\int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \; H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k\, f](s) = \displaystyle\int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

- $T_k \in L\big(L_2(\mu)\big)\,, \quad \|T_k\| \leqslant \|k\|_2$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k\, f](s) = \displaystyle\int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

- $T_k \in L\big(L_2(\mu)\big)\,, \quad \|T_k\| \leqslant \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}\,, \quad k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k\, f](s) = \displaystyle\int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

- $T_k \in L\big(L_2(\mu)\big)\,, \quad \|T_k\| \leqslant \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}\,, \quad k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho, $T_k \in K(H)$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k\, f](s) = \displaystyle\int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

- $T_k \in L\big(L_2(\mu)\big)\,, \quad \|T_k\| \leqslant \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}\,, \quad k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho, $T_k \in K(H)$

Ejemplo (operador de Volterra):

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k\, f](s) = \displaystyle\int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

- $T_k \in L\big(L_2(\mu)\big)\,, \quad \|T_k\| \leqslant \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}\,, \quad k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho, $T_k \in K(H)$

Ejemplo (operador de Volterra): $\mu =$ medida de Lebesgue en $[0,1]$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2\,, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ medida σ-finita, $H = L_2(\mu)\,, \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k\, f](s) = \displaystyle\int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

- $T_k \in L\big(L_2(\mu)\big)\,, \quad \|T_k\| \leqslant \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}\,, \quad k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho, $T_k \in K(H)$

Ejemplo (operador de Volterra): $\mu =$ medida de Lebesgue en $[0,1]$

$$k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; t < s \\ 0 & \text{si } \; t \geqslant s \end{cases}$$

Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$
$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n\, x(n)$$
$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \to 0$$

Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \; H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

Operador integral de núcleo k: $\quad [T_k f](s) = \int_\Omega k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

- $T_k \in L\big(L_2(\mu)\big), \quad \|T_k\| \leqslant \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}, \quad k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho, $T_k \in K(H)$

Ejemplo (operador de Volterra): $\mu =$ medida de Lebesgue en $[0,1]$

$$k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < s \\ 0 & \text{si } t \geqslant s \end{cases} \qquad [T_k f](s) = \int_0^s f(t)\, dt$$

Planteamiento del problema

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

H espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_i : i \in I\}$, $T \in L(H)$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$$H \text{ espacio de Hilbert con base ortonormal } \{e_i : i \in I\}, \quad T \in L(H)$$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

H espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_i : i \in I\}$, $T \in L(H)$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$$H \text{ espacio de Hilbert con base ortonormal } \{e_i : i \in I\}, \quad T \in L(H)$$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$$H \text{ espacio de Hilbert con base ortonormal } \{e_i : i \in I\}, \quad T \in L(H)$$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

$$\alpha_T(i,j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } \ j = i \\ 0 & \text{si } \ j \neq i \end{cases}$$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$$H \text{ espacio de Hilbert con base ortonormal } \{e_i : i \in I\}, \quad T \in L(H)$$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

$$\alpha_T(i,j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } \; j = i \\ 0 & \text{si } \; j \neq i \end{cases} \qquad (Tx \,|\, e_i) = \alpha_i\,(x \,|\, e_i),$$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

H espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_i : i \in I\}$, $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

$$\alpha_T(i,j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \qquad (Tx \,|\, e_i) = \alpha_i\,(x \,|\, e_i), \qquad Te_i = \alpha_i\, e_i$$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$$H \text{ espacio de Hilbert con base ortonormal } \{e_i : i \in I\}, \quad T \in L(H)$$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

$$\alpha_T(i,j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } \; j = i \\ 0 & \text{si } \; j \neq i \end{cases} \qquad (Tx \,|\, e_i) = \alpha_i\,(x \,|\, e_i), \qquad Te_i = \alpha_i\, e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ autovalor de T cuando $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

H espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_i : i \in I\}$, $T \in L(H)$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

$$\alpha_T(i,j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } \ j = i \\ 0 & \text{si } \ j \neq i \end{cases} \qquad (Tx \,|\, e_i) = \alpha_i\,(x \,|\, e_i), \qquad Te_i = \alpha_i\, e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ autovalor de T cuando $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

$\sigma_p(T) = \{$ autovalores del operador $T \}$

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$$H \text{ espacio de Hilbert con base ortonormal } \{e_i : i \in I\}, \quad T \in L(H)$$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

$$\alpha_T(i,j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } \; j = i \\ 0 & \text{si } \; j \neq i \end{cases} \qquad (Tx \,|\, e_i) = \alpha_i\,(x \,|\, e_i), \qquad Te_i = \alpha_i\, e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ autovalor de T cuando $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

$\sigma_p(T) = \{$ autovalores del operador $T\}$

$\ker(T - \alpha I)$ subespacio propio, formado por los vectores propios

Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

H espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_i : i \in I\}$, $T \in L(H)$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \to \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i,j) = (Te_j \,|\, e_i)$$

$$(Tx \,|\, e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i,j)\,(x \,|\, e_j)$$

¿Se puede elegir $\{e_i\}$ de forma que α_T sea diagonal?

$$\alpha_T(i,j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases} \qquad (Tx \,|\, e_i) = \alpha_i\,(x \,|\, e_i), \qquad Te_i = \alpha_i\, e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ autovalor de T cuando $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

$\sigma_p(T) = \{$ autovalores del operador $T\}$

$\ker(T - \alpha I)$ subespacio propio, formado por los vectores propios

Un operador es diagonalizable si, y sólo si, admite una base ortonormal formada por vectores propios.

Teorema espectral para operadores compactos

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$

  es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores

  $S + S^*$ es autoadjunto y tampoco tiene autovalores

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores
$S + S^*$ es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador V de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores. V no es normal.

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)
  $$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
  es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores
  $S + S^*$ es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador V de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores. V no es normal.

Teorema espectral para operadores compactos

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores
$S+S^*$ es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador V de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores. V no es normal.

Teorema espectral para operadores compactos

Todo operador compacto y normal

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores
$S + S^*$ es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador V de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores. V no es normal.

Teorema espectral para operadores compactos

Todo operador compacto y normal
en un espacio de Hilbert complejo

Teorema espectral para operadores compactos

Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores
$S + S^*$ es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador V de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores. V no es normal.

Teorema espectral para operadores compactos

Todo operador compacto y normal
en un espacio de Hilbert complejo
es diagonalizable

Esquema de la demostración

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

(2) $E_\alpha = \ker(T^* - \overline{\alpha} I) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

(2) $E_\alpha = \ker(T^* - \overline{\alpha} I) \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ luego $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

(2) $E_\alpha = \ker(T^* - \overline{\alpha} I) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ luego $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$

(3) $\exists \alpha \in \sigma_p(T) \ : \ |\alpha| = \|T\|$

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $T T^* = T^* T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

(2) $E_\alpha = \ker(T^* - \overline{\alpha} I) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ luego $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$

(3) $\exists \alpha \in \sigma_p(T) \ : \ |\alpha| = \|T\|$

(4) $\alpha \in \sigma_p(T), \ \ \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

(2) $E_\alpha = \ker(T^* - \overline{\alpha} I) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ luego $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$

(3) $\exists \alpha \in \sigma_p(T) \ : \ |\alpha| = \|T\|$

(4) $\alpha \in \sigma_p(T), \ \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$

(5) $\alpha, \beta \in \sigma_p(T), \ \alpha \neq \beta \implies E_\alpha \subset E_\beta^\perp, \ \ P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \ : \ |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $T T^* = T^* T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

(2) $E_\alpha = \ker(T^* - \overline{\alpha} I) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ luego $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$

(3) $\exists \alpha \in \sigma_p(T) \ : \ |\alpha| = \|T\|$

(4) $\alpha \in \sigma_p(T), \ \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$

(5) $\alpha, \beta \in \sigma_p(T), \ \alpha \neq \beta \implies E_\alpha \subset E_\beta^\perp, \ P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

(6) $\forall \varepsilon > 0, \ \{\alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| \geqslant \varepsilon\}$ es finito

Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

H espacio de Hilbert (real o complejo), $S \in K(H)$, $S^* = S$. Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) \;:\; |\alpha| = \|S\|$$

Pasos sucesivos de la demostración

H espacio de Hilbert complejo, $T \in K(H)$, $TT^* = T^*T$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ sea $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ y $P_\alpha : H \to E_\alpha$ proyección

(1) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

(2) $E_\alpha = \ker(T^* - \overline{\alpha} I) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{C}$ luego $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$

(3) $\exists \alpha \in \sigma_p(T) \;:\; |\alpha| = \|T\|$

(4) $\alpha \in \sigma_p(T), \;\; \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$

(5) $\alpha, \beta \in \sigma_p(T), \;\; \alpha \neq \beta \implies E_\alpha \subset E_\beta^\perp, \;\; P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

(6) $\forall \varepsilon > 0, \;\; \{\alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| \geqslant \varepsilon\}$ es finito

(7) $\sigma_p(T)$ es numerable y 0 su único posible punto de acumulación.

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T), \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I), \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha \,, \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha\, P_\alpha \;, \qquad\qquad I = \sum_{\alpha\in\Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha P_\alpha \,, \qquad\qquad I = \sum_{\alpha\in\Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha \,, \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha \,, \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

Segunda versión: Diagonalización

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha \,, \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

Segunda versión: Diagonalización

Existe un sistema ortonormal numerable $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ y $\{\alpha_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}$ tales que

$$T = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma\, e_\gamma \otimes e_\gamma \qquad Tx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma\, (x | e_\gamma)\, e_\gamma$$

Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

$$\Delta = \sigma_p(T)\,, \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I)\,, \quad P_\alpha : H \to E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha \,, \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

Segunda versión: Diagonalización

Existe un sistema ortonormal numerable $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ y $\{\alpha_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}$ tales que

$$T = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma e_\gamma \otimes e_\gamma \qquad Tx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma (x | e_\gamma) e_\gamma$$

es decir, T es diagonalizable. Así pues, un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable si, y sólo si, es normal.

Tercera versión

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha \, P_\alpha \, , \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha \, P_\alpha \ , \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

Cálculo funcional acotado

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha \, P_\alpha$, $\quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \qquad \varphi[T] \, x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \, x$$

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha\, P_\alpha$, $\quad I = \sum_{\alpha\in\Delta} P_\alpha$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha\in\Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha \qquad \varphi[T]\, x = \sum_{\alpha\in\Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha\, x$$

La aplicación $\varphi \mapsto \varphi[T]$ es el cálculo funcional acotado en el operador T

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha \, P_\alpha \,, \qquad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \qquad \varphi[T] \, x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \, x$$

La aplicación $\varphi \mapsto \varphi[T]$ es el cálculo funcional acotado en el operador T

Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha\, P_\alpha$, $\quad I = \sum_{\alpha\in\Delta} P_\alpha$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha\in\Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha \qquad \varphi[T]\,x = \sum_{\alpha\in\Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha\, x$$

La aplicación $\varphi \mapsto \varphi[T]$ es el cálculo funcional acotado en el operador T

Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha\, P_\alpha$, $I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha \qquad \varphi[T]\, x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha\, x$$

La aplicación $\varphi \mapsto \varphi[T]$ es el cálculo funcional acotado en el operador T

Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de l_∞^Δ en $L(H)$

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha\, P_\alpha$, $\quad I = \sum_{\alpha\in\Delta} P_\alpha$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha\in\Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha \qquad \varphi[T]\, x = \sum_{\alpha\in\Delta} \varphi(\alpha)\, P_\alpha\, x$$

La aplicación $\varphi \mapsto \varphi[T]$ es el cálculo funcional acotado en el operador T

Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de l_∞^Δ en $L(H)$
- Un homomorfismo de álgebras: $(\varphi\psi)[T] = \varphi[T]\,\psi[T]$

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha \, P_\alpha$, $\quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \qquad \varphi[T] \, x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \, x$$

La aplicación $\varphi \mapsto \varphi[T]$ es el cálculo funcional acotado en el operador T

Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de l_∞^Δ en $L(H)$
- Un homomorfismo de álgebras: $(\varphi \psi)[T] = \varphi[T] \, \psi[T]$
- De hecho un $*$-homomorfismo: $\overline{\varphi}[T] = \varphi[T]^*$

Tercera versión

T operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H

Resolución espectral: $T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha \, P_\alpha$, $\quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$

Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada $\varphi \in l_\infty^\Delta$ escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \qquad \varphi[T]\, x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) \, P_\alpha \, x$$

La aplicación $\varphi \mapsto \varphi[T]$ es el cálculo funcional acotado en el operador T

Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de l_∞^Δ en $L(H)$
- Un homomorfismo de álgebras: $(\varphi\psi)[T] = \varphi[T]\,\psi[T]$
- De hecho un $*$-homomorfismo: $\overline{\varphi}[T] = \varphi[T]^*$
- $\varphi_0[T] = I\,, \quad \varphi_1[T] = T$ donde $\varphi_0(\alpha) = 1\,, \quad \varphi_1(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$