MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS. ¿CÓMO SURGE UN MODELO?[i]

Mathematical modelling within the process of solving contextualized problems. How does a model arise?

Autor 1.[a], Autor 2.[b], Autor 3.[b]

[a]Institución 1, [b]Institución 2

Resumen

Este estudio indaga en el proceso de resolución de problemas contextualizados en los que intervienen elementos de modelización matemática. La literatura previa incide en el carácter procesual de la modelización que implica cambios de representación y el desarrollo de ciertas habilidades. Estas características permitieron proporcionar una noción operativa para estudiar el proceso de modelización de profesores en formación inicial. El análisis combinado de registros de audio y escritos reveló la gran variedad de modelos que surgieron para abordar problemas abiertos, así como baja dedicación a la interpretación de los resultados entre los participantes. La importancia de la validación de los modelos quedó también de manifiesto.

Palabras clave: *modelización matemática, resolución de problemas, análisis de procesos*

Abstract

This study look into the process of solving contextualized problems involving mathematical modelling elements. Previous literature points to modelling as a process that entails both change of representations and development of certain skills. These features enabled to provide an operative idea in order to examine modelling processes carried out by pre-service teachers. The combined analysis of audio and written records revealed a wide range of models to deal with open problems, as well as individuals' low levels of commitment to interpret results. The relevance of validating the models was also exposed.

Keywords: *mathematical modelling; solving problems; analysis of processes.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

La sociedad global de la información que se está desarrollando durante los últimos años acentúa la necesidad de que los individuos cuenten con una formación matemática sólida que permita desarrollar una ciudadanía activa (Maaß & Gurlitt, 2010). Para responder a esta necesidad, la investigación en educación matemática y las políticas educativas internacionales vienen apostando por modelos educativos basados en el desarrollo de la competencia matemática, que promueven la aplicación del conocimiento matemático a la vida diaria (DeLange, 2003; OECD, 2013; Van den Heuvel-Panhuizen, y Drijvers, 2014). En los últimos años el debate sobre qué capacidades debe incorporar la competencia matemática apunta hacia destrezas relacionadas con la resolución de problemas abiertos presentados en contexto. Este tipo de actividades matemáticas generan situaciones que estimulan el desarrollo de procesos matemáticos como el razonamiento, la matematización y la generalización, promoviendo de esta manera el compromiso de los estudiantes con la comprensión y la aplicación de los contenidos matemáticos escolares (De Lange, 2003).

Autor1, Autor2, y Autor3. (2018). Modelización matemática dentro del proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. inicial-final). Gijón: SEIEM.

La resolución de problemas contextualizados está íntimamente ligada a la noción de modelización en educación matemática (Castro y Castro, 1997), de forma que el proceso de creación, uso e interpretación de un modelo matemático no solo incluye habilidades de resolución de problemas (Niss y Højgaard, 2011), sino que también promueve el pensamiento crítico y la reflexión sobre la importancia de las matemáticas (Kaiser, Blomhoj, & Sriraman, 2006). Desde esta perspectiva, la presente comunicación explora el proceso de modelización para analizar necesidades formativas de profesores en formación inicial. La primera dificultad que surge es cómo debe entenderse el término modelización matemática para la investigación, cuestión que se debate en la siguiente subsección.

Modelización en educación matemática. Enfoque adoptado y precedentes

Durante los últimos años se ha discutido el concepto de modelización desde enfoques muy diversos dentro de la educación matemática, por lo que no existe definición consensuada por los investigadores de modelización. No obstante, el análisis de las diferentes aproximaciones presentes en la literatura revela tres características complementarias entre sí y que se pueden conjugar para dar una definición operativa de modelización matemática útil en la presente investigación: (i) está asociada al proceso de resolución de problemas contextualizados. En este sentido, como se indicaba anteriormente, Castro y Castro (1997) señalaron que la modelización es “fundamentalmente una forma de resolución de problemas de la vida real” (p. 110). Por su parte, Borromeo-Ferri (2006) y Blum y Leiß (2007) propusieron esquemas teóricos basados en procesos cíclicos donde el proceso de modelización se identifica con una propuesta de solución a una situación problemática planteada (Borromeo-Ferri, 2006 proporcionó una revisión sobre otros esquemas que siguen este enfoque). De forma análoga, Ärlebäck (2009) utilizó diagramas centrados en la secuencia temporal de las tareas realizadas por estudiantes para describir el proceso de resolución de problemas de Fermi; (ii) involucra un cambio de lenguaje o de representación, ya sea entre el mundo real y las matemáticas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009) o entre diferentes descripciones matemáticas (García, Gascón, Higueras y Bosch, 2006). Esta característica de la modelización invita a la discusión sobre qué es un modelo matemático, cuestión que fue abordada por Less y Harel (2003), entre otros; (iii) está asociada al desarrollo de ciertas destrezas matemáticas. Bajo esta premisa, Niss y Højgaard (2011) contemplaron la modelización como una competencia matemática que debe trabajarse en la matemática escolar. En esta línea, Blomhøj (2004) describió la modelización como una práctica de enseñanza que focaliza el proceso de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática. García et al. (2006), por su parte, hicieron hincapié en el doble valor didáctico de la modelización matemática, destacando que se puede utilizar como herramienta didáctica para la enseñanza de otros contenidos matemáticos o trabajar específicamente el desarrollo de la competencia de modelización matemática. La conjunción de las tres características destacadas anteriormente permite entender *modelización* en el contexto de esta investigación como *el proceso de descripción de una situación problemática dada que se desarrolla a partir de ciertas destrezas de los individuos y que permite utilizar las matemáticas para dar respuesta a la situación*. En este contexto, un *modelo* sería una descripción (que puede englobar diferentes representaciones) de una situación problemática que permite utilizar las matemáticas para darle respuesta.

La propiedad principal de la definición dada, que fue la que se asumió para este trabajo, es que presenta la modelización matemática como un proceso que evoluciona a lo largo del tiempo. Por tanto, para analizar este proceso deben distinguirse etapas dentro del mismo. En este sentido, el ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007) distingue siete fases en las que se divide el proceso de modelización: comprensión de la tarea (F1), simplificación y estructuración (F2), matematización (F3), trabajo matemático (F4), interpretación (F5), validación (F6) y exposición (F7). Estas etapas idealmente conforman un proceso cíclico, pero la investigación revela que la complejidad de las relaciones que se establecen al resolver problemas contextualizados rompe este orden *a priori* esperable (Ärlebäck, 2009; Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014). A pesar de ello, el ciclo de Blum y Leiß proporciona categorías para focalizar el análisis del proceso de modelización que son de utilidad en este estudio, que busca dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo surge la resolución de un problema matemático planteado en contexto?

Existen diversos precedentes que centraron el interés en el análisis del proceso de modelización. En educación secundaria, Ärlebäck (2009) utilizó un diagrama de evolución temporal para estudiar las praxeologías desarrolladas por alumnos que resolvieron problemas de Fermi. Gallart et al. (2014) estudiaron el transcurso de las acciones de estudiantes para resolver problemas abiertos y el efecto de utilizar este tipo de tareas sobre el rendimiento en pruebas PISA. En el contexto de formación de profesores de secundaria, Bukova-Güzel (2011) examinó las propuestas planteadas por los participantes a la hora de proponer y resolver problemas de modelización matemática e hizo un seguimiento de las dificultades encontradas en las fases del ciclo. Hıdıroğlu, Dede, Kula-Ünver y Bukova-Güzel (2017) llevaron a cabo un seguimiento del proceso de modelización según las fases del ciclo de Blum y Leiß ante un problema que involucraba razonamiento geométrico y medida.

OBJETIVOS

De forma general, se buscó analizar el proceso de modelización matemática en situaciones abiertas y contextualizadas para conocer cómo se determina la propuesta de solución ante un problema contextualizado. Específicamente se persigue:

O1: Analizar el proceso que da lugar a la propuesta de resolución de una situación abierta presentada en contexto realista desde la secuenciación de eventos que generan dicha propuesta.

O2: Describir el proceso de modelización a partir de las fases del ciclo de Blum y Leiß, los modelos utilizados y las dificultades encontradas.

METODOLOGÍA

Muestra, procedimiento de recogida de información e instrumento utilizado

La muestra estuvo compuesta por 22 docentes en formación inicial, 9 de ellos matriculados en el máster de formación del profesorado (MFP) y 13 matriculados en el primer curso del grado de educación primaria (GEP). Los participantes trabajaron por equipos organizados de la siguiente forma: grupo 1 (2 hombres y 2 mujeres de GEP), grupo 2 (4 mujeres y 1 hombre de GEP), grupo 3 (3 mujeres y 1 hombre de GEP), grupo 4 (2 hombres y 1 mujer de MFP), grupo 5 (3 mujeres de MFP) y grupo 6 (2 hombres y 1 mujer de MFP). Todos ellos trabajaron para resolver una situación abierta presentada en un contexto escolar. Esta actividad (figura 1) fue diseñada siguiendo los principios de la matemática realista (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014) y de las *Modelling Elicit Activities* (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, 2000), con el objeto de estimular la modelización matemática asociada a pensamiento visual en respuesta a un análisis de necesidades formativas de maestros en formación inicial de educación primaria (Autores et al., 2017). El resultado del procedimiento de recogida de información proporcionó 6 registros escritos que recogieron las soluciones proporcionadas por los participantes y 6 grabaciones de audio que recogieron el proceso completo de desarrollo de la solución propuesta por cada grupo. No hubo interacciones entre los diferentes grupos.

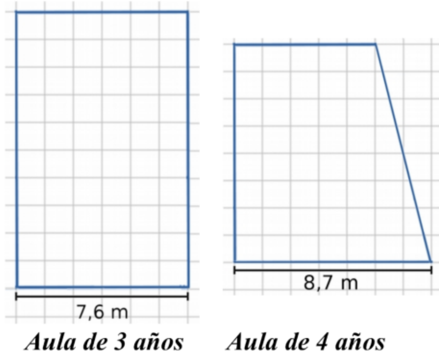
Procedimiento de análisis y variables

Para analizar los procesos de modelización se ha llevado a cabo un análisis de las grabaciones de audio y se han utilizado los registros escritos como herramienta auxiliar. El procedimiento siguió las pautas marcadas por Andrews (2013), que consisten en una audición inicial de cada registro para obtener la transcripción de todas las intervenciones, seguida por una segunda audición en la que se identificaron las fases del ciclo de modelización, finalizando con una tercera audición dedicada a la contabilización de tiempos invertidos en cada fase. En una segunda etapa, haciendo uso de las transcripciones y de los registros escritos, se analizaron las interacciones para identificar los modelos utilizados y las dificultades surgidas en torno a cada uno de los modelos, así como para consolidar la identificación de las fases.

El análisis del proceso se centró en la evolución temporal de los grupos, focalizando el interés sobre la secuenciación de las fases, las causas de la aparición de los diferentes modelos y las dificultades que condicionaron la propuesta de resolución ofrecida. Para ilustrar la metodología seguida en la investigación y por razones de espacio, en esta comunicación se muestra tan solo el análisis del proceso del grupo 6 (2 hombres y 1 mujer). El segundo objetivo se abordó mediante el recuento de los tiempos totales invertidos en cada fase, la categorización de los modelos considerados y la influencia de las dificultades sobre la configuración de los mismos.

"*El director del CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben ocupar* ***exactamente la cuarta parte del aula*** *y estar delimitadas con una valla especial. El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más, por lo que ha pedido a los maestros de infantil que le expliquen si se puede habilitar la ludoteca en su aula y cómo hacerlo.*

a) El maestro de los niños de 3 años cree que la ludoteca podría estar en su aula (tenéis debajo un plano del aula a escala), pero no sabe cómo situarla. Justificad razonadamente si lleva razón y, en caso de que sí, explicad cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.



b) Aplicad el método obtenido en a) para saber si puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil de 4 años con los diez metros de valla y cuánta valla sobraría. El plano a escala de este aula lo tenéis a continuación.

c) Si el método aplicado en a) no funciona en el aula de 4 años, decid por qué e inventad uno nuevo que sí funcione en las dos aulas. Usadlo para explicar cómo habría que situar la valla en cada una de las aulas y cuánta valla sobraría en cada caso."

Figura 1. Tarea utilizada en el presente estudio

RESULTADOS

Análisis del proceso de modelización

El grupo analizado empleó un total de 37 minutos en proporcionar un método para situar la ludoteca en un aula cualquiera (véase tarea propuesta en la figura 1). El proceso (figura 2) se inició con la lectura del enunciado del apartado (F1) tras la que, a propuesta de una participante, surgió el modelo A (F3), consistente en un problema de optimización del perímetro en el que la ludoteca ocupaba una esquina del aula. Este modelo no se tuvo en consideración en ese momento, ya que otro participante propuso el modelo B, consistente en dividir el largo del aula en cuatro partes iguales y utilizar tres paredes para delimitar la ludoteca. La introducción de este segundo modelo suscitó alternancia entre diferentes fases: primero se validó el modelo para esta situación (F6), lo que generó dudas sobre la facilidad de la tarea. Esto les llevó a hacer cálculos para representar su solución (F4) y a volver a la lectura del enunciado para asegurarse de que habían entendido bien (F1), lo que les permitió validar el modelo B para el primer apartado (F6). A continuación, leyeron el segundo apartado (F1) y rápidamente se dieron cuenta de que el modelo B no era aplicable a la segunda aula (F2). No obstante se dieron cuenta de que debían utilizar otras figuras geométricas para determinar un nuevo modelo y que era necesario dividir el área de la segunda aula en cuatro (F3), lo que les llevó a calcular el área de la segunda aula y, como consecuencia, de la segunda ludoteca (F4). Este cálculo les llevó a considerar el modelo C (F3), que consistía en un cuadrado apoyado en una esquina del aula de lado la raíz cuadrada de este área. Al contemplar este nuevo modelo, los participantes calcularon las dimensiones reales de su propuesta (F4) y discutieron cómo argumentar la imposibilidad de aplicar el modelo B en este caso (F7) y cómo describir la solución que aportaba el nuevo modelo (F1 y F7). De esta forma, el grupo pasó al último apartado (F1), en el que los participantes comenzaron discutiendo sobre la validez del modelo C en el caso más general

(F6). Llegaron a la conclusión de que sí era válido y discutieron cómo redactar su aplicación a la primera aula (F7). La aplicación del modelo C al primer apartado les llevó a hacer cálculos (F4) cuyos resultados, al ser erróneos, condujeron a invalidar el modelo C para la primera aula (F6). Esta situación llevó al grupo a la búsqueda de una alternativa (F3). Una participante propuso el modelo D, basado en un rectángulo situado en una esquina de área la cuarta parte del aula y que necesitaba 10 m o menos de valla. Otro compañero interpretó el modelo D utilizando un caso particular, modelo E, que consistió en el rectángulo cuyas dimensiones son las mitades de las dimensiones del aula y que fue invalidado ya que requería utilizar 12,76 m de valla (F6). Esta circunstancia condujo a una discusión (F3) en la que surgieron alternativas basadas en triángulos rectángulos como el modelo F (escaleno) o el modelo G (isósceles), que el grupo consideró óptimo respecto al gasto de valla. Los participantes iniciaron la validación de G para los dos apartados y la descripción escrita del mismo (F6 y F7), hasta que una participante se percató de que el modelo C había sido erróneamente descartado. Esto hizo que el grupo volviera a considerar este modelo y lo validara para el primer apartado (F6). De esta forma los compañeros de grupo aceptaron el modelo C y lo propusieron como modelo general, que es el que describieron en el registro escrito (F7).

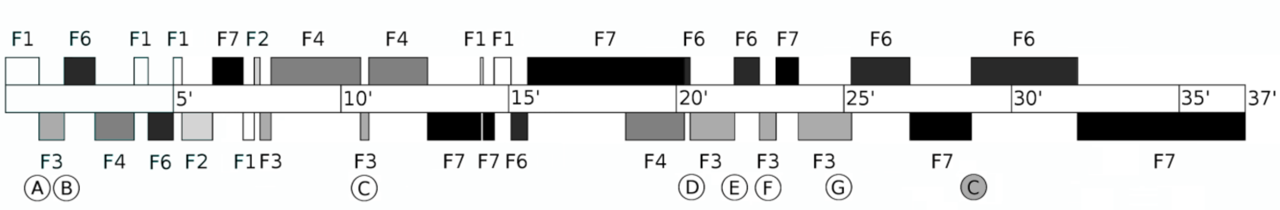


Figura 2. Evolución temporal del proceso seguido por el grupo 6 en términos de las fases del ciclo de modelización y de los modelos surgidos.

Descripción de los modelos surgidos

Fases del ciclo de modelización y tiempo invertido en las mismas

El tiempo que necesitaron los grupos para materializar una propuesta de solución fue de aproximadamente 40 minutos, excepto el grupo 3 que necesitó una hora y quince minutos.

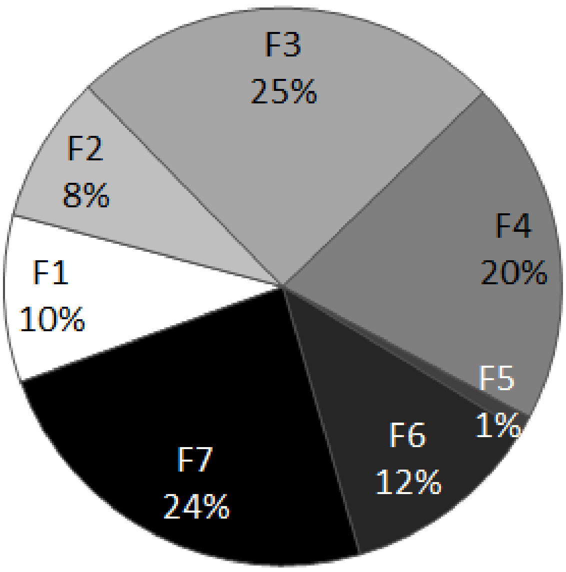


Figura 3. Distribución del tiempo total empleado por los participantes según las diferentes fases del ciclo de modelización.

Las distribuciones de los tiempos invertidos por los grupos en las diferentes fases fueron, en términos generales, similares entre sí. No obstante, la elaboración de los modelos utilizados por los grupos 2 y 5 condujeron a mayor esfuerzo en la fase de matematización, ya que los recintos se fueron construyendo siguiendo estrategias de ensayo y error, y la consiguiente menor dedicación al trabajo matemático. Por lo demás, la contabilización de los tiempos invertidos por los participantes en cada una de las fases del ciclo reveló predominio de las fases de matematización, de exposición y de trabajo matemático (la figura 3 muestra la distribución completa). Por el contrario, los participantes dedicaron menor tiempo a la validación, a la simplificación y prestaron especial poca atención a la interpretación.

Modelos consideradas a lo largo de los procesos

Los modelos utilizados por los participantes para modelizar la situación a lo largo de los procesos de resolución presentaron mucha riqueza de ideas y se pueden distribuir en cuatro categorías, que van desde los enfoques más geométricos a otros más algebraicos. La primera de ellas, puramente geométrica, engloba distintas aproximaciones que buscaron dividir las aulas en cuatro partes iguales (figura 4a). La segunda categoría está constituida por modelos basados en el cálculo de la cuarta parte del área de las aulas y la construcción de recintos que ocupaban dicha cuarta parte, comprobando para cada recinto conseguido si se disponía de valla suficiente (figura 4b). Las estrategias de la tercera categoría eligieron una figura geométrica apoyada en una esquina (cuadrados, rectángulos, triángulos o círculos) y buscaron ajustar una o varias dimensiones de esa figura para conseguir el área deseada (figura 4c) para después comprobar si se disponía de valla suficiente. Finalmente, los enfoques más algebraicos (cuarta categoría) buscaron incluir la condición del uso de 10 m de valla o menos junto a la restricción sobre el área (figura 4d).

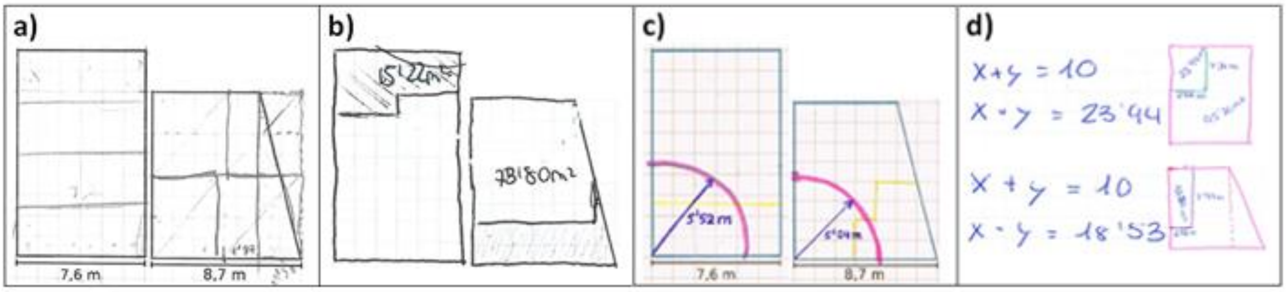


Figura 4. Ejemplos de los modelos empleados

De todas las ideas surgidas durante los procesos de resolución de la tarea, los modelos que finalmente se propusieron como solución fueron:

Grupo 1. Sistema de ecuaciones basado en un rectángulo de área la cuarta parte del aula (categoría 4). Este modelo resultaba adecuado, pero condujo a una solución que no satisfacía la condición del área (debido a errores en los cálculos). Los participantes de este grupo trabajaron fundamentalmente de forma algebraica considerando decimales.

Grupo 2. Polígono irregular construido sobre tres paredes del aula (categoría 2). Al igual que en el caso anterior, el modelo era viable pero la solución aportada contenía errores de cálculo. Este grupo trabajó tanto con decimales como con la cuadrícula que se aportaba en el dibujo que acompañaba la tarea, ya que buscaron el número de cuadrados que debían englobar para cumplir con la condición de la cuarta parte del área.

Grupo 3. Rectángulo apoyado en una esquina del aula y de área la cuarta parte de la misma (categoría 2). Este modelo aportó una solución correcta a la situación planteada, su enfoque fue esencialmente geométrico pero utilizando unidades reales.

Grupo 4. Polígono irregular construido sobre una esquina del aula (categoría 2). Este modelo, de enfoque geométrico resultó válido y la solución aportada en base al mismo, correcta.

Grupo 5. Cuarto de círculo apoyado en una esquina (categoría 3). El grupo 5 propuso este modelo y resolvió la situación correctamente. Para la solución aportada, el grupo trabajó exclusivamente de forma algebraica y utilizando decimales. No obstante, durante el proceso trabajó simultáneamente con la cuadrícula y haciendo cálculos para obtener su correspondencia en metros cuadrados.

Grupo 6. Cuadrado apoyado en una esquina (categoría 3). Este modelo, con enfoque algebraico, también resultó adecuado y el grupo llegó a una solución correcta.

Dificultades encontradas y cuestiones que surgieron

En cuanto a las dificultades surgidas, los participantes del estudio evidenciaron dudas en el trabajo con números decimales y en el redondeo. En este sentido, el grupo 2 se preguntó si el significado de la palabra *"exactamente"* en el enunciado obligaba a considerar todos los decimales, mientras que el grupo 4 optó por evitar decimales, usando expresiones de tipo 7,6/6 para expresar el lado de la cuadrícula en unidades reales. Por su parte, el grupo 3 se planteó la fiabilidad del redondeo utilizado al constatar que uno de sus modelos propuestos quedaba invalidado por una décima. Del mismo modo, los participantes mostraron indicios de baja capacidad de cálculo y dependencia de dispositivos para resolver operaciones sencillas (el grupo 3, incluso, lo utiliza para multiplicar por 10). De hecho, se observaron errores en todos los grupos a la hora de ejecutar cálculos de áreas y perímetros de rectángulos, así como en la manipulación de expresiones algebraicas. Estos condujeron en ocasiones a soluciones incorrectas o a conflictos que dificultaron el trabajo del equipo. Esto ocurrió con los grupos 1 y 6: el primero trabajó con un modelo adecuado pero no validó los resultados obtenidos mientras que el grupo 6 abandonó momentáneamente un modelo válido debido a que obtuvo un valor incorrecto para las dimensiones de la ludoteca. Otro foco de dificultades que mostraron los profesores en formación está relacionado con la concepción de área y la conexión entre las dos unidades naturales que ofrecía la tarea (Sistema Métrico y área de la cuadrícula). En este sentido, el grupo 2 buscó calcular el número de cuadrados del aula rectangular dividiendo su área (en m^2) entre el lado del cuadrado (en m). Por su parte, el grupo 5 expresó explícitamente dudas sobre si la "*cuarta parte*" mencionada en el enunciado se refería al área *"en metros cuadrados o en cuadraditos"*. En el grupo 4, a su vez, se cuestionó la imposibilidad de repetir el método aplicado a la segunda aula si el plano de esta estaba dibujado a una escala diferente. El uso adecuado de las unidades fue otra cuestión que generó discusión, sobre todo en los estudiantes del grado de educación primaria. Concretamente, el grupo 2 se planteó expresamente la cuestión de qué unidad utilizar para trabajar, mientras el grupo 1 llegó a cuestionar la validez de su planteamiento algebraico (figura 4d) al observar que una de sus ecuaciones estaba expresada en unidades cuadradas y otra en unidades lineales. A diferencia de los cálculos erróneos, este tipo de dificultades se solventaron o evitaron de manera que no fueron determinantes para la propuesta de resolución de los grupos. El tercer conjunto de dificultades encontradas por los participantes está relacionado con la comprensión del enunciado. A este respecto, el grupo 5 manifestó dudas sobre si la aplicación del mismo modelo debía implicar la obtención de una solución idéntica. Otra cuestión que se derivó de la lectura del enunciado fue la posibilidad de usar toda la valla, duda que expresaron los grupos 1 y 5, al abordar el problema. Esta visión contrasta con la de los grupos 4 y 6, que asumieron implícitamente la tarea como un problema de optimización de la valla. Especialmente significativa fue la duda surgida entre los componentes del grupo 3. Asumieron que *"ocupar exactamente la cuarta parte"* implicaba dividir las aulas en cuatro partes idénticas, lo que les supuso una dificultad para abordar el segundo apartado. Finalmente, deben destacarse las dificultades surgidas del conflicto entre la tarea y las expectativas de los participantes. Los grupos 6 y 2 hicieron alusiones explícitas a que podrían estar equivocándose porque la tarea les resultaba muy sencilla. De hecho, dos grupos de alumnos del máster de secundaria manifestaron preocupación porque el modelo obtenido es "*muy rebuscado*" o "*por ensayo y error*" (grupo 4) o "*lo hemos hecho como niños chicos*" (grupo 6). Por el contrario, los integrantes del grupo 1, del grado de educación primaria, se mostraron preocupados porque su solución no era apropiada para alumnos de primaria.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta comunicación presenta un análisis empírico de la modelización matemática vista como un proceso asociado a la resolución de problemas contextualizados. Las investigaciones desarrolladas sobre modelización en educación matemática inciden en sus dimensiones temporal, de representación y competencial, características que permitieron proporcionar una noción operativa para indagar en el proceso de modelización de profesores en formación inicial. Un procedimiento basado en audiciones repetidas de las interacciones entre participantes (Andrews, 2013) en combinación con el análisis de registros escritos permitió aportar información sobre los elementos que intervienen en la propuesta de un determinado modelo. Las fases del ciclo de modelización proporcionaron etapas a las que prestar atención específica.

Los resultados del estudio aportan información relevante para entender las causas que conducen a un grupo a proporcionar cierta solución a un problema. El análisis del proceso seguido por un grupo reveló gran riqueza de ideas válidas que no se consideraron o materializaron, así como un nivel alto de fluidez en las interacciones entre iguales a la hora de abordar un problema contextualizado. Las fases de Blum y Leiß no se desarrollaron respetando su carácter cíclico, de acuerdo a lo señalado por Ärlebäck (2009), Blum y Borromeo-Ferri (2009) y Gallart et al. (2014). Se encontró también desequilibrio entre los tiempos invertidos en las mismas, constatándose muchos periodos de tiempo dedicados a cálculos relacionados con cambios de unidades (trabajo matemático), propuestas de diseño de la ludoteca (matematización) y, sobre todo, a explicarse entre ellos y escribir la propuesta (exposición). Por el contrario, los participantes dedicaron poca atención a la validación y escaso tiempo a interpretar sus modelos o soluciones. Estos resultados pueden deberse a las características de la tarea, que por una parte solicitaba una descripción completa de los modelos (promoviendo las explicaciones y la redacción) y por otra parte permitió a los grupos trabajar matemáticamente sin perder la conexión con el contexto del problema. En cuanto a los modelos utilizados, se encontraron diversos diseños válidos para la ludoteca y no se detectaron preferencias generalizadas por enfoques geométricos ni por aproximaciones algebraicas. Del mismo modo, los participantes mostraron preferencias equilibradas en cuanto al uso de unidades del sistema métrico o de la escala para afrontar la tarea planteada. En este sentido, no se detectaron tendencias diferenciadas entre los maestros y los profesores de secundaria en formación inicial (a pesar de las diferencias formativas). En relación a las dificultades encontradas en los procesos, se ha descubierto facilidad para generar propuestas de modelos, pero incapacidad operativa general en la fase de trabajo matemático a la hora de hacer cálculos y algunas dudas en la concepción de área o en el manejo de resultados de mediciones con diferentes unidades, que fueron más acusadas en los alumnos del grado de educación primaria. Estos resultados están parcialmente de acuerdo con los obtenidos por Hıdıroğlu et al. (2017), que mostraron dificultades de los profesores en formación dentro de ambas fases. Respecto a la fase de validación, sin embargo, los hallazgos de este estudio están en la línea de Hıdıroğlu et al. (2017), como con Gallart et. al (2014) y Bukova-Güzel (2011), aunque son menos significativos: en este caso los participantes dedicaron poco tiempo a validar y en ocasiones, no fueron conscientes de que debían hacerlo. Al igual que se señaló respecto a la fase de interpretación, es posible que la fuerte conexión con el contexto que permitió mantener la tarea objeto de estudio tenga influencia sobre estos resultados, por lo que se debe indagar más en este respecto.

Para concluir es necesario señalar algunas limitaciones que se detectaron durante la investigación y deberán paliarse en futuros trabajos. Las más relevantes afectan a la validez externa de los resultados hallados. En primer lugar, es destacable la fuerte inversión de tiempo que requirió el análisis de la metodología empleada. La alta complejidad de las interacciones que se estudiaron y el procedimiento reiterativo de observación permitieron obtener gran riqueza de información, pero es necesario encontrar herramientas para analizar el proceso que permitan ampliar la muestra considerada. En segundo lugar, la tarea concreta empleada pudo repercutir en los resultados de manera determinante. Como se ha señalado previamente, el presente análisis dejó dudas sobre si diferentes enunciados de la misma tarea hubieran alterado el tiempo invertido en las fases de interpretación o validación. En este sentido es interesante estudiar la modelización desde la modulación de diferentes variables de la tarea: la formulación de la tarea o la inclusión o eliminación de la escala, de la cuadrícula o de la representación pictórica son variables que deben tenerse en cuenta. El efecto de la tarea también puede condicionar el comportamiento dentro de una misma fase. Por ejemplo, 'matematizar' implicó diferentes acciones en grupos que ofrecieron diferentes modelos. Sería de gran interés discernir qué acciones se pueden encontrar en cada fase del ciclo, para lo que es necesario disponer de problemas de diferente índole y muestras diversas. Un procedimiento basado en la búsqueda de categorías emergentes podría ayudar a establecer subfases dentro del ciclo de modelización que serían de utilidad para sistematizar el análisis. Se emplaza esta posibilidad para futuros trabajos.

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009). Exploring the solving process of group solving realistic Fermi problems from the perspective of the Anthropological theory of didactics. In M. Pytlak, T. Rowland, & W Swoboda (eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 7),* (pp. 1010-1020). CERME: Rzeszów (Poland).

Andrews, P. (2013). Finnish Mathematics Teaching from a Reform Perspective: A Video-Based Case-Study Analysis. *Comparative Education Review, 57*(2), 189-211.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling. A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D.; Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F.; Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Educations.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics.* (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 86-95.

Bukova-Güzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modelling problems, Teaching Mathematics and Its Applications 30, 19-36.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización En L. Rico (Ed), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

De Lange, J. (2003). *Mathematics for literacy.* In B.L. Madison, & L.A. Steen (Eds.), Quantitative literacy. Why numeracy matters for schools and colleges (pp. 75−89). Princeton, NJ: The National Council on Education and the Disciplines.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, T. Ortega, Investigación en educación matemática (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L, Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM 38*(3), 226-246.

Hıdıroğlu, Ç. N., Dede, A. T., Kula-Ünver, S. y Bukova-Güzel, E. (2017). Mathematics Student Teachers' Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13* (3), 873-892

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education 38*(2), 82-85.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning 5* (157-189).

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers, en A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 591-646.

Maaß, K. & Gurlitt, J. (2010). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, January 28th–February 1st March 2009, Lyon (France) (pp. 1941–1950). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Niss, M., & Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

OECD (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MECD.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Amsterdam: Springer.