DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO DEL PROFESORADO EN FORMACIÓN: ANÁLISIS DE LAS PREMISAS UTILIZADAS AL MODELIZAR

Difficulties in the mathematical learning of pre-service teachers: analysis of the premises used when modeling

Fernández-Ahumada, E.[a] y Montejo-Gámez, J.[b]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad de Granada

Resumen

Esta comunicación analiza el conocimiento que los estudiantes para maestros utilizan al modelizar situaciones abiertas, con el objetivo de detectar dificultades en su aprendizaje matemático. El foco del análisis se sitúa sobre las premisas, principal novedad con respecto a lo existente en la literatura, donde abunda el análisis centrado en el proceso de resolución, con el fin de ganar profundidad de análisis y exhaustividad para conocer la interacción del conocimiento del contexto con el conocimiento matemático. Las dificultades encontradas en este trabajo ponen de manifiesto la necesidad formativa de trabajar la modelización a partir de situaciones experimentables que vayan creciendo en lejanía al contexto del alumnado, así como utilizar situaciones con diferentes escalas de magnitud, que contribuyan a desarrollar la intuición al respecto.

Palabras clave: *resolución de problemas, premisas, dificultades en modelización matemática.*

Abstract

This paper analyzes the knowledge used when modelling to detect difficulties in mathematical learning of pre-service teachers. The focus of the analysis is set on the premises, the main novelty with respect to what exists in literature, where there is an abundance of analysis focused on the process of resolution, in order to gain depth of analysis and exhaustiveness to know the interaction of context knowledge with mathematical knowledge. The difficulties encountered in this work highlight the need for training on modelling, starting from situations that can be experienced and then using situations far from students' context, as well as posing situations with different scales of magnitude, which contribute to developing intuition in this regard.

Keywords: *solving problems, premises, difficulties in mathematical modelling*

INTRODUCCIÓN

En el contexto educativo actual, a nivel nacional e internacional, las instituciones educativas están apostando por modelos de enseñanza de las matemáticas ligados a desarrollo de competencias, que están principalmente enfocados al "saber hacer" con el conocimiento matemático adquirido. Existe un amplio debate entre educadores, investigadores e instituciones sobre cómo debe entenderse la competencia matemática en el ámbito escolar (Niss y Højgaard, 2011; OECD, 2013), aunque hay consenso en que esta debe contemplar destrezas transversales a los contenidos y tiene que estar orientada a la comprensión del contenido matemático en contextos reales (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). Estas capacidades están fuertemente vinculadas a las destrezas de modelización matemática (Maaß y Gurlitt, 2011), por lo que la modelización se ha convertido en un foco de interés para la investigación en educación matemática. Existe una profusa literatura sobre modelización matemática en el ámbito escolar, que abarca diferentes perspectivas educativas (puede verse una revisión en Kaiser, 2014), diferentes fines didácticos y diferentes concepciones

Fernández-Ahumada, E. y Montejo-Gámez, J. (2019). Dificultades en el aprendizaje matemático del profesorado en formación: análisis de las premisas utilizadas al modelizar. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 273-282). Valladolid: SEIEM.

sobre la noción de la modelización. Respecto a los fines, García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch (2006) señalaron el valor didáctico doble de la modelización: como destreza específica y como herramienta didáctica para el aprendizaje de otros contenidos. En cuanto a los focos de la modelización, se pueden establecer tres principales: modelización como proceso (Blum y Leiß, 2007), como destrezas que se desarrollan (Niss y Højgaard, 2011) o como creación de un modelo matemático (Lesh y Harel, 2003). En esta comunicación se entiende la modelización como una actividad escolar que se desarrolla mediante el proceso de diseño, aplicación y evaluación de modelos matemáticos, que permite construir conocimiento acerca de cierto sistema a partir de una cuestión de interés en el mismo y contribuye al desarrollo de ciertas destrezas matemáticas. Además, se asume que su finalidad didáctica es el desarrollo de destrezas específicas.

El desarrollo de estas destrezas de modelización es de interés en la formación del profesorado. Según Colwell y Enderson (2016), para que los alumnos se conviertan en solucionadores de problemas que utilicen diversas herramientas que les ayuden a razonar, modelar y comunicar, los maestros necesitan implementar dichas técnicas de instrucción en sus aulas, y la formación inicial es el lugar clave para promover estas técnicas y apoyar a los futuros maestros. En esta línea, Ortiz, Rico y Castro (2007) consideran esencial abordar la modelización matemática en la formación inicial de los docentes por tratarse de una herramienta dinámica que moviliza conceptos y procedimientos matemáticos en el abordaje de situaciones problemáticas. Por otro lado, English (2006) considera las tareas de modelización como experiencias desafiantes y estimulantes para los futuros maestros, que permiten explorar la naturaleza de las ideas matemáticas que se quieren trabajar y considerar estrategias de implementación apropiadas. A su vez, Doerr (2007) apunta que el profesorado en formación debe tener experiencias sobre modelización que le provean de contextos y herramientas para la enseñanza y que constituyen ejemplos prácticos que posteriormente ellos mismos puedan utilizar como docentes. Por su parte, Jackson, Dukerich y Hestenes (2008) aseguran que trabajar modelización provee al profesorado de una taxonomía de concepciones erróneas típicas de los estudiantes y permite corregir muchas debilidades del método tradicional de enseñanza-aprendizaje, incluyendo la fragmentación del conocimiento, la pasividad de los estudiantes y la persistencia de creencias ingenuas sobre el mundo real.

Todos estos autores coinciden en la oportunidad que supone la incorporación de la modelización en la formación de profesorado y en las aulas para reflexionar sobre la propia actividad docente y sobre el significado de enseñar matemáticas en la sociedad actual. Además, se ha de tener en cuenta que numerosos profesores de matemáticas en ejercicio no consideran la modelización como una componente esencial del aprendizaje de las matemáticas, dudan de sus propias competencias sobre la modelización matemática, y les resulta difícil llevar a cabo tareas de modelización en clase, en particular porque los estudiantes pueden encontrar soluciones diferentes y no es fácil identificar lo que está en juego en tales tareas. En definitiva, la modelización matemática supone un reto tanto para los propios estudiantes como para sus (futuros) profesores, por lo que resulta necesario apoyar la adquisición de competencias asociadas a la misma en formación de profesorado (Wess y Greefrath, en prensa).

A pesar de la importancia de la modelización para la formación del profesorado que se ha comentado, la investigación ha encontrado diferentes estudios que ponen de manifiesto las dificultades de los futuros maestros para abordar matemáticamente situaciones abiertas. Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada, Jiménez-Fanjul, Adamuz-Povedano y León-Mantero (2017) analizaron las estrategias seguidas por los estudiantes ante problemas abiertos y profundizaron en las dificultades subyacentes a las carencias observadas. En el estudio llevado a cabo por Aydin y Özelgi (2017), se pusieron de manifiesto dificultades para establecer conexiones entre el contexto y el conocimiento matemático. Siguiendo la misma línea, Sáenz (2009) notó que los futuros maestros presentaban dificultades en el conocimiento contextual, y que estas limitaciones conducían a dificultades para trabajar con modelos matemáticos para la resolución de problemas reales. Por su parte, Olande (2014) exploró la complejidad en los niveles de competencia que los futuros maestros activaban al resolver ítems de PISA 2003, constatando que aquellas tareas que requerían reflexión y conexión entre contenidos y con el contexto generaron mayor dificultad.

Por todo lo anterior, parece evidente que analizar la raíz de las dificultades que emergen cuando futuros maestros se enfrentan a una tarea abierta contextualizada, resulte de interés para la investigación en educación matemática. Elegir el enfoque desde el que abordar dicha cuestión, de entre los existentes en torno a modelización matemática (proceso, destrezas y modelo), puede ser objeto de discusión. El enfoque de proceso no resulta sencillo ya que las rutas de modelización que los estudiantes se ven obligados a seguir cuando se involucran en una modelización son complejas y normalmente se desvían de la visión idealizada del ciclo de modelización (Blum y Leiß, 2007), además de que diversos estudios (Ärlebäck, 2009; Aymerich y Albarracín, 2016) ponen de manifiesto las dificultades para identificar de manera fiable las diferentes etapas del proceso de modelización del trabajo de los estudiantes. Por otro lado, el enfoque de las destrezas puede llevar a una atomización de la idea global de modelización, desvirtuando el sentido de evaluar la modelización como un proceso de conexiones. Se plantea, por tanto, la cuestión de observar las dificultades en el modelo. La utilidad y potencialidad del análisis del modelo centra las preguntas de investigación de este estudio.

De entre los trabajos que ofrecen una descripción de los elementos de un modelo matemático, en el ámbito de la educación matemática, Lesh y Harel (2003) proponen una noción basada en dos elementos: un sistema conceptual y los procedimientos que este lleva asociado, que se expresan a través de diferentes representaciones y cuyo objeto es resolver una situación problemática. Esta conceptualización da una visión cercana para nuestros propósitos, ya que introduce dos componentes que deben considerarse en la investigación educativa: la estructura matemática subyacente a una situación y las representaciones utilizadas para expresarla, ambas orientadas a la resolución de un problema. Por su parte, Hestenes (2010) define modelo como una representación de la estructura de un sistema dado. Así, basa su conceptualización del modelo en tres elementos: (i) el sistema o conjunto de objetos relacionados, que pueden ser reales o imaginarios, físicos o mentales, simples o compuestos, (ii) la estructura del sistema, que es un conjunto de relaciones entre sus objetos, y (iii) la representación, que es lo que a menudo identificamos con el modelo, una inscripción concreta de palabras, símbolos o figuras (como gráficos, diagramas o bocetos), sin olvidar que la inscripción se complementa con un sistema de reglas y convenciones (en su mayoría tácitas) para codificar la estructura del modelo. Cercana a esta conceptualización está la de Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (en prensa) que proporcionan una definición articulada en torno a tres componentes con diferentes niveles de abstracción: el sistema sobre el que se quiere obtener conocimiento y que está compuesto por objetos, sus propiedades y las relaciones entre objetos y propiedades, la matematización del sistema, es decir, la colección de conceptos y propiedades matemáticas que abstraen la información relevante de los elementos del sistema junto con la colección de relaciones que se aplican para extraer conocimiento matemático a partir de dichos elementos, y la representación matemática del sistema, es decir, el conjunto de descripciones explícitas de los elementos matemáticos que permiten trabajar matemáticamente con ellos y extraer conocimiento acerca del sistema. La característica principal de esta definición es su operatividad, ya que permite establecer categorías para el análisis de modelos matemáticos producidos en contextos educativos. En concreto, dentro de la matematización distingue dos subcategorías: (i) las premisas, que son afirmaciones cuya veracidad no queda justificada por el desarrollador y que se utilizan explícitamente o subyacen a lo que se describe en la representación, y (ii) las deducciones, que son aquellas afirmaciones cuya veracidad se justifica expresamente.

Bajo la concepción de modelo basada en la terna Sistema-Matematización-Representación, el análisis de las premisas permite explorar el conocimiento que el estudiante pone en juego de forma espontánea para desarrollar el modelo, dejando así de manifiesto aquello que conoce y (por omisión) lo que no a la hora de modelizar una situación presentada en contexto. Este marco, por tanto, es potencialmente útil para detectar dificultades en el proceso de modelización y permite, por tanto, abordar la pregunta de investigación del presente estudio: ¿qué dificultades tienen los estudiantes para maestros para plantear un modelo ante una situación presentada en contexto?

OBJETIVOS

El presente estudio busca explorar las dificultades al modelizar que evidencian los maestros en formación inicial, centrando el foco en las premisas del modelo, como unidad de análisis para identificar limitaciones en modelización matemática.

O1: Caracterizar las premisas que utilizan los maestros en formación inicial para plantear un modelo matemático en términos de los supuestos que se utilizan para desarrollarlo.

O2: Detectar dificultades en el desarrollo de modelos matemáticos a partir del uso de las premisas como unidad de análisis.

METODOLOGÍA

Este estudio parte de una perspectiva exploratoria y emplea una metodología cualitativa e interpretativa para el desarrollo de la investigación.

Participantes y recogida de información

La muestra estuvo compuesta por 37 estudiantes del grado de maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada (24 mujeres y 13 hombres). Los participantes trabajaron por equipos, de acuerdo a su agrupación habitual de trabajo: 1 grupo de dos personas, 5 de tres integrantes y 5 de cuatro componentes. Los 11 grupos trabajaron durante una hora y media, sin interacciones entre grupos, para resolver una situación abierta presentada en un contexto realista (Figura 1). Esta actividad fue diseñada con el objeto de plantear una situación donde una propiedad del sistema de referencia, que no es explícita en la tarea pero que todos los estudiantes conocen, fuera relevante para abordar con éxito la situación. Para ello, se acompañó el estímulo presentado en la Figura 1 con cuatro cuestiones de profundización para que los participantes hicieran explícitos sus modelos (apartado a) y sus hipótesis (apartado b), los generalizasen (apartado c) y validasen usando información en la red (apartado d).

Figura 1. Tarea de referencia (adaptada de Kaiser, 2014)

Tras treinta minutos de trabajo se facilitó una ayuda para resolver el problema, que proporcionaba una representación sin texto de la situación propuesta (Figura 2). Este apoyo gráfico se proporcionó con la intención de orientar a los grupos que presentaran dificultades. El resultado del procedimiento de recogida de información proporcionó 11 registros escritos. Dado que se buscó atender al desarrollo de los modelos, estos registros recogieron las soluciones definitivas propuestas por cada grupo y también todos los cálculos y descripciones informales del problema que desarrollaron durante el proceso.

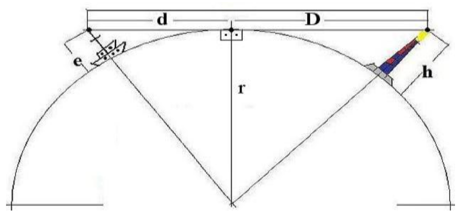


Figura 2. Ayuda que se le proporcionó tras treinta minutos de trabajo

Variables seleccionadas y procedimiento de análisis

La estrategia de análisis partió de la definición de modelo matemático propuesta por Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (en prensa). Dadas las características de la tarea, en las que la información sobre el sistema que se utiliza es de interés específico, se consideraron también las premisas sobre el sistema, es decir, aquellas afirmaciones sobre el sistema que se utilizaron sin justificar. Para discriminarlas, se consideró que cualquier afirmación expresada en simbolismo matemático o en lenguaje verbal pero con terminología matemática fue una premisa matemática, mientras que las demás fueron consideradas como premisas sobre el sistema. Además, se prestó atención a las premisas descritas explícitamente frente a aquellas que utilizaron de manera implícita. Asimismo, dado que se permitió el acceso a internet en todo momento, se vio necesario considerar por separado las premisas recogidas en la red de forma evidente, de aquellas premisas impuestas de forma espontánea por los desarrolladores del modelo. Por último, dada la finalidad de la investigación, se consideró la validez de la premisa como una característica a considerar.

De esta manera, la investigación amplió la noción de premisa dada por Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (en prensa) a afirmaciones sobre el sistema. Así, esta investigación consideró una premisa como cualquier afirmación (matemática o sobre el sistema) cuya veracidad no queda justificada por el desarrollador y que se utiliza explícitamente o subyace a la representación del modelo hecha por el desarrollador. Se empleó la premisa como unidad de análisis y se establecieron cuatro variables de estudio: i) ámbito, que puede ser el sistema real o su matematización; ii) explicitud, que da lugar a premisas explícitas (aquellas dadas en respuesta al apartado b) o afirmaciones evidentemente descritas como suposiciones) e implícitas; iii) Fuente, según la cual una premisa puede ser propia o externa (de internet o de la ayuda proporcionada); y iv) Validez, que indica si la premisa es asumible dentro de la situación de la tarea.

El análisis de la información recogida comenzó con un sondeo de las posibles soluciones que los participantes pudieron encontrar en la web, con el objeto de discriminar la información útil para detectar necesidades formativas. A continuación, se llevó a cabo el siguiente procedimiento: 1) se hizo un análisis de contenido de las representaciones dadas en los registros para recoger evidencias de las premisas empleadas por los estudiantes. 2) Dentro de la perspectiva adoptada para este estudio, se formularon las premisas del sistema como afirmaciones que daban cuenta de la información recogida en dichas evidencias. 3) Se extrajeron categorías emergentes de premisas en función a sus categorías. 4) Para cada premisa formulada, se valoró cada una de las variables tomadas en consideración. El criterio para valorar la variable “ámbito” se proporcionó anteriormente. Además, se valoraron como explícitas todas las premisas recogidas en las respuestas al apartado b), así como todas aquellas que iniciaban un razonamiento (Tabla 1, filas 2 y 4) o se expresaron verbalmente como suposiciones (Tabla 1, fila 6). Por otra parte, se consideraron como externas las premisas derivadas de la ayuda dada o de las fuentes encontradas en el sondeo previo de las posibles soluciones; el resto se consideraron premisas propias. La validez se decidió en función de si la afirmación utilizada era correcta matemáticamente y contribuía al modelo.

Para caracterizar las premisas empleadas en la modelización (O1), se elaboraron las distribuciones de frecuencias asociadas a las variables dentro de cada una de las categorías emergentes (véase la Tabla 1). Para detectar dificultades al desarrollar modelos matemáticos (objetivo O2), se tomaron las premisas que se valoraron como no asumibles, y se interpretaron las posibles causas que las generaron. Finalmente, la profundidad de los resultados obtenidos permitió valorar la pertinencia de las premisas como unidad de análisis para la detección de dificultades en modelización matemática.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Caracterización de las premisas empleadas

Se inicia la exposición de los resultados con un ejemplo de cómo se extrajeron las premisas partiendo de las evidencias. La Figura 3 contiene una representación pictórica del modelo planteado para abordar la tarea. De esta evidencia, se extrajeron las siguientes cuatro premisas:

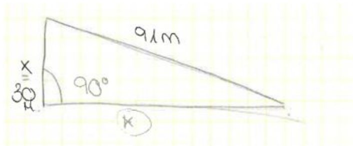


Figura 3. Ejemplo de evidencia

Premisa 1: “91 m es la distancia en línea recta del barco al foco del faro”. En este caso, a la variable ámbito se le asignó el valor sistema, la variable explicitud, se consideró implícita y la variable fuente, se asumió como propia.

Premisa 2: “La altura del faro es 30 m”. Este caso presentó los mismos valores que el anterior a excepción del valor en la variable fuente que se consideró externa (el faro se eleva sobre un acantilado 30 m sobre el nivel del mar, según Wikipedia).

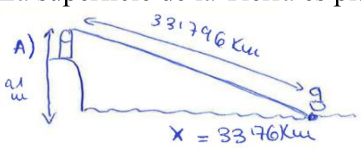
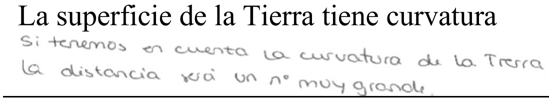
Premisa 3: “La superficie de la Tierra es plana”. Este caso presentó los mismos valores que la primera premisa para todas las variables: sistema, implícita y propia, respectivamente.

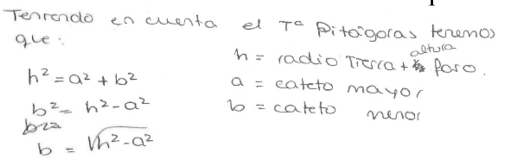
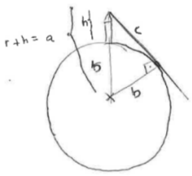
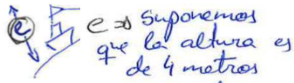
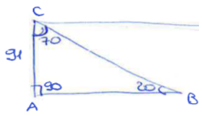
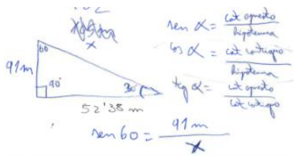
Premisa 4: “El faro es perpendicular a la superficie terrestre”. En este caso, la variable ámbito, obtuvo el valor matematización, la variable explicitud, implícita, y la variable fuente, propia.

Descripción de categorías encontradas

Dado que cada modelo contiene varias premisas y que se recogieron todas las aproximaciones a los problemas de cada grupo a lo largo de todo el proceso de resolución, se identificaron un total de 67 premisas. La Tabla 1 muestra una síntesis de los resultados en términos de las variables consideradas.

Tabla 1. Categorías de premisas encontradas y distribución de frecuencias de las variables en cada categoría

Formulación de la premisa	Frecuencia	Sistema	Explícitas	Propias	Válidas
La superficie de la Tierra es plana 	5	5	0	5	0
La superficie de la Tierra tiene curvatura 	10	3	4	2	10
En el momento que el barco empieza a divisar el faro, la recta que une barco y faro es tangente a la superficie de la Tierra 	8	2	1	2	8

El Teorema de Pitágoras es aplicable a la situación planteada 	11	0	8	9	9
El radio de una circunferencia que pasa por un punto P de la misma es perpendicular a la recta tangente a la circunferencia que pasa por ese punto. 	5	0	2	4	5
La magnitud de cierta variable viene dada por un valor numérico 	16	16	9	6	12
La amplitud de cierto ángulo viene dada por un valor numérico 	4	0	2	3	2
Otras afirmaciones matemáticas de interés 	8	0	5	6	5

Nota: "Sistema" denota la cantidad de premisas referidas al sistema; Del mismo modo "Explícitas", "Propias" y "Válidas" indican la frecuencia de esos valores de las variables

Se encontraron en total ocho categorías de premisas: dos referidas a la curvatura de la Tierra, tres relacionadas con cuestiones geométricas, dos que estaban en conexión con los valores numéricos de variables y una última de afirmaciones matemáticas no atribuibles a otras categorías. Las categorías relacionadas con la curvatura de la Tierra son las naturales: 5 grupos utilizaron (siempre de forma implícita) que la Tierra es plana, mientras que 10 trabajaron bajo la premisa de que su superficie se curva (en 4 ocasiones de forma explícita). Sin embargo, debe observarse que estas categorías no son excluyentes, debido a que algunos grupos cambiaron el modelo desarrollado tras recibir la ayuda.

Además, 8 de los 10 grupos que trabajaron bajo la premisa de que la Tierra se curva lo hicieron usando la representación provista o alguna de las páginas web encontradas, por lo que se observa que solo 2 de los 11 grupos tuvieron en cuenta de forma natural la curvatura del planeta.

Entre las premisas relacionadas con cuestiones geométricas, 8 de los grupos evidenciaron suponer que la línea que une barco y luz del faro, en el momento que el barco empieza a divisar el faro, es tangente a la superficie de la Tierra (Tabla 1, tercera fila). Siete de los grupos lo hicieron de forma implícita, pero uno de ellos lo hizo explícito. A su vez, el número de equipos que usó la propiedad de que el radio que pasa por un punto de cierta circunferencia y la recta tangente a la misma por dicho punto son perpendiculares (Tabla 1, quinta fila) fue tan solo de 5, dos de los cuales lo expresaron además de forma explícita utilizando el cuadrado punteado para representarlo. Por su parte, el Teorema de Pitágoras fue reconocido unánimemente como herramienta útil para resolver el problema, y solo en dos de los casos (en los que se asumió aplicabilidad para triángulos no rectángulos) no fue válida.

En cuanto a las premisas asumidas sobre los valores numéricos de magnitudes del sistema de partida, se encontraron cuatro subcategorías diferenciadas. En primer lugar, los datos tomados de forma externa, principalmente el radio de la Tierra, que se registraron en tres casos. En segundo lugar, las estimaciones sobre la altura del barco (Tabla 1, sexta fila), que en los dos casos que se encontraron fueron válidas dentro del planteamiento hecho. También se encontraron cuatro premisas derivadas de una interpretación confusa del enunciado, que se etiquetaron como no asumibles. En cuarto lugar, se observaron cuatro casos en los que se asumieron las amplitudes de los ángulos de un triángulo, dos de forma válida y en otros dos casos de forma no válida (la séptima fila de la Tabla 1 muestra un ejemplo no válido). Finalmente, se constataron otras afirmaciones matemáticas de interés, 5 de ellas válidas, como la aplicabilidad de conceptos trigonométricos a triángulos rectángulos o la necesidad de trabajar siempre con las mismas unidades. Las otras tres, por el contrario, fueron etiquetadas como no válidas.

Dificultades encontradas en el desarrollo de modelos

El análisis presentado en la sección anterior reveló algunas dificultades de los futuros maestros en relación a su aprendizaje de modelización matemática. En primer lugar, el hecho de que 2 de los 11 grupos asumiera el carácter plano de la superficie terrestre para desarrollar su modelo indica que, en una primera aproximación a la tarea, los participantes no se percataron de que el modelo más natural no conduce a solución alguna. Se constata, por tanto, la dificultad para modelizar una situación que no es directamente experimentable por los estudiantes. En clave del ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007), esta dificultad está relacionada con la fase de simplificación y estructuración. En cualquier caso, esta evidencia en sí misma no indica si la dificultad se debe a la lejanía de la situación respecto de la experiencia de los estudiantes (abstracción o desmotivación) o es debida a que la tarea trabaja con distancias no controlables por ellos (cuestión de escala).

Esta cuestión se clarifica en virtud de las premisas no válidas dentro de la categoría de asignación de magnitudes (sexta fila en la Tabla 1, puede verse un ejemplo de este tipo de premisas en la Figura 3, Premisas 1 y 2). En ellas, se observan confusiones como identificar la distancia barco-faro en línea recta y sobre la superficie del mar, o errores severos como identificar esta distancia con 6371 km (el radio de la Tierra). Este tipo de premisas empleadas indican dificultades con la interpretación de la situación, particularmente el significado de la información recibida. En términos del ciclo de Blum y Leiß (2007), se relacionan con la fase de comprensión de la situación, aunque también se pueden relacionar con dificultades con el sentido numérico, ya que dejan de manifiesto baja intuición sobre la magnitud de las cantidades (que se observa al suponer, por ejemplo, que el alcance del faro es de 91 m, como se observa en la Figura 1). Este hecho apunta a la escala como foco principal de la dificultad sobre la abstracción de la situación señalada antes.

En síntesis, el análisis de las premisas que se desarrolló en esta investigación apunta a dificultades de los estudiantes para trabajar sobre una situación que no es directamente experimentable por ellos en las primeras fases del proceso de modelización, por lo que no se trata de dificultades directamente relacionadas con desconocimiento del contenido. Este resultado está en la línea del trabajo de Montejo-Gámez et al (2017), que observaron un alto porcentaje de maestros en formación inicial que no supieron abordar una tarea abierta a pesar de que conocían el contenido matemático subyacente, y con los hallazgos de Aydin y Özelgi (2017), Olande (2014) y Sáenz (2009), que constataron la necesidad del desarrollo del conocimiento contextual.

En cuanto a las causas de las dificultades señaladas, se observaron dos focos principales: la posible abstracción de una situación que no es accesible directamente y el conflicto surgido al trabajar con órdenes de magnitud para los que no han desarrollado intuición. En este sentido, se contempla la necesidad formativa de trabajar la modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria a partir de situaciones experimentables que vayan creciendo en lejanía al contexto del alumnado. También se propone utilizar situaciones con diferentes escalas de magnitud, que contribuyan a desarrollar la intuición al respecto (problemas de Fermi, por ejemplo). En términos del ciclo de modelización, es necesario reforzar las primeras fases del proceso.

CONCLUSIONES

Esta comunicación presenta un estudio sobre las dificultades de los futuros maestros en modelización matemática a partir de las premisas utilizadas en una situación contextualizada. El análisis se hizo efectivo a partir de la conceptualización de modelo matemático y la interpretación del conocimiento que activaron los estudiantes de forma natural. La principal novedad del trabajo es el foco sobre las premisas, que permite ganar profundidad de análisis y exhaustividad para conocer la interacción del conocimiento del contexto con el conocimiento matemático.

Se propuso una tarea contextualizada que solo se podía resolver utilizando una información conocida por todos, pero que no es experimentable ni evidente en el planteamiento real de la misma. La mayoría de los grupos no reconoció inicialmente la necesidad de usar esta información, pero supo gestionar las matemáticas subyacentes a la misma una vez la conocieron. Este resultado indica dificultades en el inicio del proceso de modelización, lo que sugiere una conexión con las dificultades con el conocimiento contextual de los futuros maestros de Educación Primaria que señala la literatura y que, por otra parte, son esperables dadas las características del sistema educativo actual en el que no se fomenta este tipo de destrezas matemáticas. La necesidad de trabajar modelización matemática en todos los niveles educativos queda, por tanto, de manifiesto.

El presente estudio tiene algunas limitaciones que deben señalarse. En primer lugar, se observa la dependencia de los resultados respecto de la tarea. Como es habitual al investigar en modelización, la complejidad de las tareas y la apertura de los enunciados obliga a explorar con más detenimiento la validez externa de los resultados obtenidos. Valorar en qué medida dependen los resultados obtenidos del sistema planteado y de los fines educativos con los que se propuso la tarea supone una discusión de interés que debe abordarse en futuras investigaciones. En segundo lugar, el uso de internet a lo largo de la recogida de información, que se consideró en principio como positiva para fomentar la validación de los resultados, pero que condicionó algunos de los modelos observados. Se considera apropiado permitir el acceso a la red controlando los tiempos. Finalmente, debe precisarse la metodología basada en el análisis de las premisas, debiendo adentrarse en la interpretación de los resultados, que puede sesgar los resultados. El desarrollo de instrumentos que precisen el procedimiento de interpretación y la réplica de estudios como el presente para testar la validez de dichos instrumentos son desafíos que se deben abordar en el futuro.

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009). Exploring the solving process of group solving realistic Fermi problems from the perspective of the Anthropological Theory of Didactics. En M. Pytlak, T. Rowland y W. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 7)* (pp. 1010-1020). Rzeszów, Polonia: CERME.

Aydin, U. y Özgeldi, M (2017). The PISA tasks: Unveiling prospective elementary mathematics teachers' difficulties with contextual, conceptual, and procedural knowledge, *Scandinavian Journal of Educational Research*, *63*(1), 105-123.

Aymerich, À. y Albarracín, L. (2016). Complejidad en el proceso de modelización de una tarea estadística. *Modelling in Science Education and Learning, 9*(1)*,* 5-24.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Ellis Horwood Publishing.

Colwell, J. y Enderson, M. C. (2016). "When I hear literacy": Using pre-service teachers' perceptions of mathematical literacy to inform program changes in teacher education. *Teaching and Teacher Education 53*, 63-74.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 69-78). Nueva York, EE.UU.: Springer.

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics 63*(3), 303–323.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM, 38*(3), 226-246.

Hestenes, D. (2010) Modeling theory for math and science education. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. ICTMA-13* (pp. 13-41). Boston, EE.UU.: Springer.

Jackson, J., Dukerich, L. y Hestenes, D. (2008). Modeling instruction: An effective model for science education. *Science Educator*, *17*(1), 10-17.

Kaiser, G. (2014) Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-404). Amsterdam, Países Bajos: Springer.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 157-189.

Maaß, K. y Gurlitt, J. (2011) LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, 1* (pp. 629-639). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Montejo-Gámez, J. y Fernández-Ahumada, E. (en prensa). The notion of mathematical model for educational research: Insights of a new proposal. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Utrecht, Países Bajos: Grupo Freudenthal, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). Zaragoza: SEIEM.

Niss, M. A. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde, Dinamarca: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

OECD (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MECD.

Olande, O. (2014). Graphical artefacts: taxonomy of students' response to test items. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 53-74.

Ortiz, J., Rico, L y Castro, E. (2007). Mathematical modelling: A teacher's training study. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 241-249). Chichester, Reino Unido: Ellis Horwood Publishing.

Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics, 71*(2), 123-143.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Amsterdam, Países Bajos: Springer.

Wess R. y Greefrath G. (en prensa). Professional competencies for teaching mathematical modelling – supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Utrecht, Países Bajos: Grupo Freudenthal, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME.