



Academia de Ciencias Matemáticas,
Físico-Químicas y Naturales de Granada

¡REPRESENTACIÓN PROPORCIONAL!

DISCURSO PARA EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

ILMO. SR. D. VICTORIANO RAMÍREZ GONZÁLEZ

GRANADA, 2016



Academia de Ciencias Matemáticas,
Físico-Químicas y Naturales de Granada

¡REPRESENTACIÓN PROPORCIONAL!

DISCURSO PARA EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

ILMO. SR. D. VICTORIANO RAMÍREZ GONZÁLEZ

GRANADA, 2016

¡REPRESENTACIÓN PROPORCIONAL!

VICTORIANO RAMÍREZ GONZÁLEZ

Es casi imposible convencer a los políticos para que reformen un sistema electoral, por muy injusto que sea, pero nadie puede evitar que un científico disfrute investigando en la representación política para fortalecer la democracia.

Excelentísimo Señor Presidente,

Excelentísimos e Ilustrísimos Señoras y Señores Académicos,

Señoras y Señores.

Es para mí un gran honor haber sido propuesto como Académico Numerario de esta Academia y, por ello, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que han hecho posible este nombramiento.

Siempre me han gustado las matemáticas por sí mismas pero me han fascinado por sus aplicaciones. Ello ha hecho que desde el primer momento pensara, para este acto, en un discurso relacionado con una aplicación de las matemáticas, y he elegido la representación proporcional por ser el campo en el que más he investigado en los últimos años.

Recuerdo perfectamente el momento en que me interesé por la representación parlamentaria. Fue la noche de las elecciones generales del 1 de marzo del 1979 cuando la UCD, con menos del 35% de los votos, recibió 168 escaños, el 48% del total. Entonces algunos destacados políticos de los partidos perdedores culparon al sistema electoral, y en especial al método D'Hondt, del gran desequilibrio que se había producido entre votos y escaños.

En aquel momento no era alentador para un Profesor Ayudante recién entrado en el Departamento de Ecuaciones Funcionales dedicar mucho tiempo a la investigación en sistemas electorales, a sabiendas del poco reconocimiento que tendría ese trabajo a la hora de promocionar dentro de la Universidad. Sin embargo, estaba convencido de que aquellas críticas al sistema electoral tenían bastante fundamento y eso me llevó, años más tarde, a partir de mediados de los años 90, a dedicar cada vez más tiempo a la investigación en la representación proporcional.

Y sigo haciéndolo actualmente porque estoy convencido de la importancia que tienen los sistemas electorales en cualquier país democrático, a pesar del poco entusiasmo que percibo en quienes pueden cambiar el Sistema Electoral para llevar a cabo una reforma del mismo.

Cuando empecé a escribir este discurso pensaba resaltar al máximo el papel de las matemáticas en la elección de los representantes en una democracia. Hablaría de los resultados más famosos que, sorprendentemente, son “teoremas de imposibilidad”, es decir, teoremas en los que se demuestra que es imposible establecer un método que verifique ciertas propiedades deseables. El más famoso de ellos es el teorema del premio Nobel K. Arrow en la elección social, aunque de igual o mayor importancia son algunos otros de M. Balinski en la representación proporcional; resultados desalentadores a los que podríamos añadir el teorema de Gibbard-Satherthwaite sobre la imposibilidad de definir un método de elección social que no sea manipulable.

También abordaría muchos resultados sobre la representación proporcional, algunas caracterizaciones, barreras implícitas de inclusión y exclusión (problema abierto durante varias décadas) y por supuesto me extendería bastante con la biproporcionalidad y la proporcionalidad decreciente. Buena parte de ello ha desaparecido en la versión actual, al menos en lo relativo a la formulación y notación matemática.

Habría sido un discurso al nivel científico que este acto se merece y al mismo tiempo muy interesante para mí, porque me obligaría a recopilar material muy diverso y darle coherencia en un solo documento. Pero después cambié de idea de tal forma que suprimí algunos teoremas y suavicé en buena medida las pocas matemáticas que aún contiene el discurso, todo ello en pro de la divulgación, para que así cualquier persona interesada, sea procedente del campo científico o no, pueda leerlo y entenderlo en su mayoría, aun saltándose las expresiones matemáticas y los comentarios técnicos que a lo largo del mismo aparezcan.

Voy a hablar de sistemas electorales, fundamentalmente de repartos proporcionales, biproporcionales y con proporcionalidad decreciente. Los primeros los relacionaré con la elección del Congreso de los Diputados; elijo este parlamento porque es el más importante en España y porque su sistema electoral es imitado en las elecciones autonómicas y también es similar al de las elecciones municipales. Por otra parte, la proporcionalidad decreciente está relacionada solo con la composición del Parlamento Europeo, es decir, con la distribución de sus 751 escaños entre los estados de la Unión Europea y a ella me remitiré.

1. DISEÑO DE UN SISTEMA ELECTORAL

Normalmente al diseñar un sistema electoral para un parlamento hay que establecer:

- cuál va a ser el número total de representantes que van a ser elegidos, lo que se conoce habitualmente como **tamaño** del parlamento,
- las **circunscripciones** en que se va a dividir el territorio, y cuál es el tamaño de las mismas o qué **método** se utilizará para calcular sus tamaños ante unas elecciones,
- qué restricciones se imponen a los partidos para participar en el reparto de los escaños, restricciones que se suelen conocer como las **barreras** electorales,
- qué método se usa para determinar la representación de los partidos (popularmente la **fórmula electoral**) y,
- el método mediante el cual los electores deciden qué candidatos de los que aparecen en las listas reciben las actas que correspondan a su partido, en caso de que las listas estén **desbloqueadas**, es decir, cuando las actas de diputado no se asignan de acuerdo con el orden en que los candidatos aparecen en la lista, sino que se permite a los electores elegir los más preferidos.

Hay partes de este entramado en las que las matemáticas tienen poco que decir, pero en otras juegan un papel muy importante.

Con respecto al tamaño del Congreso lo más significativo que podemos hacer es una comparativa con los tamaños que tienen otros parlamentos de países de nuestro entorno europeo. Lo primero que se observa es que los tamaños correspondientes a los diferentes parlamentos no siguen una relación con la población. Por ejemplo, Polonia, con menos población que España, tiene 460 escaños y el Reino Unido con 650 representantes en la Cámara de los Comunes es el más numeroso de la Unión Europea

seguido de la *Camera* en Italia con 630, ambos por encima del *Bundestag* de Alemania cuyo tamaño es variable pero no inferior a 598 y la Cámara de los Diputados de Francia que tiene 577. Suecia con unos 11 millones de habitantes tiene 349 escaños, casi el mismo número que España. De esta comparativa se puede indicar que España debiera tener alrededor de 450 escaños en el Congreso, pero tal cuestión es una decisión política, no se puede considerar una recomendación matemática, y además en España la Constitución limita el tamaño a un máximo de 400 diputados.

Tampoco tienen mucho que decir las matemáticas en la demarcación de las circunscripciones electorales, y menos si son pocas y de gran tamaño. Al diseñar un sistema electoral las circunscripciones suelen identificarse con alguna división administrativa del estado. Los accidentes geográficos, como puede ser una cordillera de montañas, suelen usarse como línea divisoria entre circunscripciones contiguas. Más aún, la separación marítima de las islas o territorios alejados en otros continentes también son objeto de delimitación de circunscripciones. Casi nada tienen que decir las matemáticas en estos casos.

No ocurre lo mismo cuando las circunscripciones son muy pequeñas y especialmente en los sistemas de tipo mayoritario con distritos uninominales. En estos casos los distritos deben delimitar un número de habitantes casi idéntico para cada uno y ello requiere modificarlos de una elección a otra, o al menos con bastante frecuencia. El *districting*, como así se denomina, realizado por el partido en el poder o por cualquier ente creado al efecto, corre el riesgo de que se practique el *gerrymandering* que consiste en dibujar los distritos para favorecer a un determinado partido político. Para estos casos sería deseable disponer de un algoritmo que optimizase, en algún sentido, la partición del territorio en distritos a partir de los datos poblacionales, de las vías de comunicación, de los accidentes geográficos, fluviales, separaciones marítimas, identidades históricas, etc. Si fuese necesario hacer un *districting*, los Diagramas de Voronoi y las Triangulaciones de Delaunay podrían servirnos como punto de partida para introducir tales restricciones y definir un algoritmo adecuado.

En el caso que nos ocupa, el sistema electoral del Congreso de los Diputados, basado en representación proporcional, no tiene un papel fundamental el diseño de las circunscripciones electorales.

Sin embargo tanto el **método** para determinar el tamaño de las circunscripciones electorales como el que asigna los escaños a los partidos consiste en elegir una función

que transforme unos vectores de números en otros. Unas veces el vector inicial contiene las poblaciones de las circunscripciones y la fórmula debe asignar los tamaños de las mismas. Otras veces el vector inicial contiene los votos de los partidos y la fórmula debe asignar la representación de los partidos políticos. En ambos casos tenemos que usar funciones para hacer esas transformaciones y es conveniente analizar sus propiedades para que la clase política pueda elegir un método u otro con conocimiento de causa.

Los primeros problemas que debiera resolver un sistema electoral proporcional consisten en asignar escaños a los partidos de acuerdo con sus votos totales y determinar el tamaño de las circunscripciones de acuerdo con sus poblaciones. Para estos problemas las soluciones son bien conocidas en el ámbito de la matemática electoral. Pero es a continuación cuando una técnica reciente, llamada biproporcionalidad, permite transformar la matriz que contiene los votos de todos los partidos en todas las circunscripciones en otra matriz que contiene los escaños que corresponden a cada partido en cada circunscripción electoral, de tal forma que partidos y circunscripciones reciben escaños de acuerdo con sus votos totales y con sus poblaciones respectivamente.

Por tanto, la biproporcionalidad consigue eliminar el efecto perverso, contra los partidos medianos y pequeños de ámbito estatal, que suele ocasionar un sistema electoral con muchas circunscripciones, como le ocurre en el Congreso de los Diputados a los partidos estatales que reciben, por ejemplo, menos del 10% de los votos.

La barrera electoral es una limitación a los partidos para participar en el reparto de escaños. La fijan los políticos sin apenas análisis ni justificación de la misma. Se establece para evitar la fragmentación del parlamento y facilitar la gobernabilidad. Sin embargo basta conocer la barrera electoral que ha establecido cualquier país para, casi siempre, llegar a la conclusión de que esa barrera es inútil porque no surte efecto alguno o la probabilidad de que surta efecto es casi nula, o bien esa barrera puede conducir a importantes faltas de equidad en la asignación de escaños a dos partidos con similar número de votos. Como consecuencia hemos de decir que las barreras electorales usadas en las diferentes democracias no son razonables, salvo raras excepciones, y es extraño que no hayan sido objeto de importantes críticas por parte de los científicos. Casi todas ellas equivalen a multiplicar los votos por una función discontinua, constante en dos trozos, que en el primero vale cero y en el segundo vale uno. ¿Por qué se usa una

función discontinua si la discontinuidad de salto conduce a desequilibrios en la representación de dos partidos con poca diferencia de votos que queden a ambos lados de la barrera? Existen infinidad de posibilidades alternativas de evitar esos desequilibrios.

Entre las barreras que son inútiles se encuentra la del 3% de los votos válidos en una circunscripción que exige la ley electoral para el Congreso de los Diputados. Entre las que producen falta de equidad se encuentran algunas barreras de CCAA como las de Canarias y Madrid, pero sobre todo las de muchos países avanzados, como el 5% de los votos nacionales que exige Alemania, para participar en la elección del Bundestag, y que fue la principal responsable de que más de 7 millones de ciudadanos alemanes quedasen sin representación en 2013. A Alemania le acompañan muchos otros países con democracias a veces muy consolidadas que usan barreras de salto, por ejemplo Suecia, Polonia, Italia, Grecia, etc. Turquía con el 10%, a nivel de votos totales, ha sido el país que ha usado una barrera más elevada. Como consecuencia en 2002 el tercer partido turco, el DYP, con tres millones de votos, el 9,5%, quedó sin representación, mientras que el segundo partido, el CHP, con seis millones de votos, recibió 178 escaños.

Por otra parte cada método electoral tiene implícitamente una barrera que a veces es superior a la establecida en el sistema electoral, eso es lo que hace superfluas ciertas barreras como la existente en España para el Congreso de los Diputados. Durante la segunda mitad del siglo XX se consiguió calcular la barrera de inclusión de algunos métodos electorales muy usados como D'Hondt y Sainte-Laguë y ha sido a principios de este siglo cuando, tras resolver en mi grupo de investigación de forma teórica un problema de optimización, se ha conocido el valor de dicha barrera para cualquier método de divisores. La fórmula general depende del tamaño H de la circunscripción electoral y del número n de partidos que compiten, además del método. En el caso particular de que el método sea D'Hondt los porcentajes mínimo y máximo, I_h y S_h , que permiten a un partido recibir h escaños son:

$$I_h = \frac{h}{H - 1 + n}, \text{ para } h \geq 0$$

$$S_h = \frac{h + 1}{H + 1}, \text{ para } h \geq 0.$$

Así, cuando el tamaño de la circunscripción es pequeña, el valor de I_1 , que es la barrera para conseguir un escaño, puede superar el 15% al usar el método D'Hondt. Entonces ¿de qué sirve exigir un 3%?

Otro tipo de discontinuidades en la representación parlamentaria las ocasionan ciertas primas al partido vencedor que establecen algunos sistemas electorales para facilitar la gobernabilidad. Un resultado muy esclarecedor ocurrió en las elecciones al parlamento italiano en 2013 cuando la coalición de Pier Luigi Bersani con 10 millones de votos consiguió 340 escaños y la de Silvio Berlusconi con 9,9 millones consiguió 124 escaños, es decir una diferencia de más de 200 escaños por muy pocos votos.

En teoría esa diferencia de escaños se pudo conseguir por ganarle con un solo voto de diferencia.

Es necesario que un sistema electoral prime al partido vencedor, para evitar la fragmentación excesiva del parlamento y facilitar la gobernabilidad, pero la forma en la que lo hacen algunos sistemas electorales ocasionando resultados como los que acabo de citar cuestionan la representatividad del sistema electoral.

Existen multitud de formas para primar al partido vencedor que evitan esos saltos en la representación, para ello se deben usar funciones continuas al transformar los votos en escaños, de manera que a un partido que tenga un solo voto más que otro no se le asigne más de un escaño de más.

Con respecto al desbloqueo de las listas electorales en la elección del Congreso hemos de indicar que ha sido objeto de debate en muchas ocasiones. Sin embargo, observando el comportamiento de los electores en la elección del Senado cabe pensar que el desbloqueo de las listas del Congreso posiblemente tendría un efecto mucho más limitado de lo que se puede esperar.

Aun así sería positivo, al menos, porque resta poder a las cúpulas de los partidos y sobre todo permite a los electores impedir que resulte elegido algún candidato indeseado o, por el contrario, permite que sea elegido un buen candidato que no figure en las primeras posiciones de la lista.

2. MÉTODOS DE REPARTO PROPORCIONAL

Al hablar del problema de reparto proporcional, por simplicidad, nos vamos a referir a la asignación proporcional de escaños a los partidos políticos. El problema sería idéntico si tenemos que distribuir los escaños del parlamento a las circunscripciones electorales en proporción a sus habitantes. Es decir, problemas cuyas soluciones están constituidas por números enteros no negativos que deben sumar la cantidad de escaños a repartir.

Supongamos que es necesario distribuir h escaños entre n partidos y los votos de los partidos los tenemos en un vector $v: v=(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Entonces el problema se representa por (v, h) . Las cuotas o proporciones exactas que corresponden a cada partido son

$$q=(q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ donde } q_i = \frac{h * v_i}{\sum_{j=1}^n v_j}.$$

Para que un reparto de escaños $e=(e_1, e_2, \dots, e_n)$, siendo todas sus componentes números enteros, se considere una solución factible debe cumplir

$$e_i \geq 0 \quad \forall i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n e_i = h.$$

Para que un método se considere que es de reparto proporcional deberá conseguir una distribución de escaños que, en algún sentido, sea próxima a las cuotas. Concretamente se le exigen al menos los requisitos que enunciamos a continuación.

Requisitos básicos para que un método sea de reparto proporcional

En matemáticas se parte de axiomas y definiciones y luego se comprueba que los objetos matemáticos empleados los cumplen. Para que un método de distribución de escaños se pueda considerar proporcional ha de verificar unas propiedades muy elementales. Concretamente las siguientes:

1. Anonimato (si se realiza una permutación en los votos de v se produce la misma permutación en los escaños de e).
2. Homogeneidad. El resultado es el mismo si los votos los dan en unidades, en miles en porcentajes, en cuotas, etc. Es decir, es indiferente usar v que λv , $\forall \lambda > 0$.

3. Exactitud. Si todas las cuotas son números enteros la distribución de escaños debe coincidir con las cuotas.
4. Concordancia. Un partido con menos votos que otro no puede recibir más escaños. Es decir, $v_i < v_j \Rightarrow e_i \leq e_j$.
5. Equilibrio. Dos partidos con igual número de votos no pueden diferir en más de un escaño. Es decir, $v_i = v_j \Rightarrow |e_i - e_j| \leq 1$.

A continuación hablaremos de los métodos más conocidos.

2.1 Método de Hamilton (también denominado, Hare, Restos Mayores, etc.).

El método de reparto proporcional más inmediato se obtiene a partir de las proporciones exactas, es decir a partir de las cuotas, asignando a cada partido tantos escaños como vale la parte entera de su cuota. Si quedan escaños sin asignar, entonces se asigna un escaño adicional a cada partido con mayor resto, es decir con mayor parte decimal de la cuota. Ese es el método de Hamilton o de los Restos Mayores.



Alexander Hamilton (Charlestown, 1755 - 1804) fue un economista, político, escritor, abogado y soldado estadounidense. Es considerado uno de los Padres Fundadores de los Estados Unidos.

El método de Hamilton, es tan simple y natural que suele proponerlo cualquier persona que se plantea realizar un reparto proporcional con soluciones enteras.

Desde el punto de vista matemático, una primera posibilidad consiste en minimizar una norma del vector $e - q$. Tendríamos que elegir qué norma usar, porque dependiendo de la norma elegida el resultado puede ser diferente. Es inmediato demostrar que la norma del máximo o cualquier otra norma l_p conducen a un mismo método, el de Hamilton. Ello justificaría para muchos matemáticos al método de los Restos Mayores como uno de los más apropiados. Sin embargo veremos más adelante que no es recomendable.

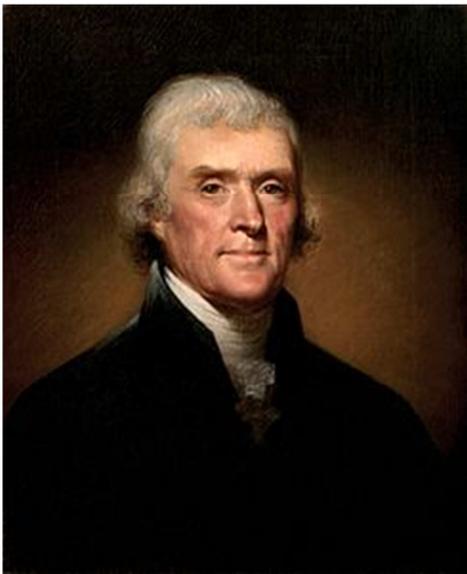
2.2 El método D'Hondt (también denominado de Jefferson).

Otra posibilidad es pensar que un escaño del partido i representa a v_i/e_i electores.

Entonces sería razonable exigir al reparto e que **maximice el mínimo de los cocientes anteriores**, es decir, que el diputado que represente a menos votantes represente al mayor número de ellos que sea posible

$$\underset{e_i \geq 0, \sum e_i = h}{\text{Max}} \left\{ \underset{i=1, \dots, n}{\text{Min}}(v_i / e_i) \right\}.$$

Entonces el método que se obtiene es conocido en Europa como método D'Hondt que es equivalente al propuesto con anterioridad en EEUU por Thomas Jefferson.



Thomas Jefferson, (1743-1826) fue el tercer Presidente de los Estados Unidos de América, ocupando el cargo entre 1801 y 1809. Se le considera uno de los Padres Fundadores de la Nación. *Victor D'Hondt* (1841 –1901) fue abogado y matemático belga.

Ahora bien, la proporcionalidad se puede establecer mediante muchas otras funciones objetivo, como por ejemplo,

$$\underset{e_i \geq 0, \sum e_i = h}{\text{Min}} \left\{ \underset{i=1, \dots, n}{\text{Max}}(v_i / e_i) \right\}$$

y mediante un proceso de optimización, da lugar a un nuevo método de reparto proporcional, que es el de Adams.



John Adams (1735-1826). Fue el segundo Presidente de los EEUU.

2.3 Métodos de Huntington.

La idea de Huntington era partir de una distribución de escaños factible (formada por enteros no negativos que sumen el número de escaños a distribuir) y empezar a transferir escaño a escaño de un partido a otro siempre que mejorase la proporcionalidad, y detenerse cuando ya no se pueda hacer ningún cambio que consiga mejorarla.

En tal sentido, la proporcionalidad exacta entre votos y escaños de dos partidos cualesquiera, i y j , se puede representar de 16 formas diferentes:

$$\frac{v_i}{e_i} = \frac{v_j}{e_j}, \quad \frac{e_i}{v_i} = \frac{e_j}{v_j}, \quad \frac{v_i * e_j}{e_i} = v_j, \quad \text{etc.}$$

Elegida una solución factible cualquiera $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ y una de las expresiones

anteriores, por ejemplo la segunda, $\frac{e_i}{v_i} = \frac{e_j}{v_j}$, no se dará esa igualdad, porque los

cocientes para los partidos elegidos serán diferentes. Por ejemplo si el partido i está

sobrerrepresentado con respecto al partido j : $\frac{e_i}{v_i} > \frac{e_j}{v_j}$, entonces podemos definir

$$D = \left| \frac{e_i}{v_i} - \frac{e_j}{v_j} \right| \quad \text{y} \quad D' = \left| \frac{e_i - 1}{v_i} - \frac{e_j + 1}{v_j} \right|$$

y en el caso de que $D' < D$ transferimos un escaño del partido i al j , porque mejora la proporcionalidad. El proceso se repite estableciendo comparaciones entre dos partidos cualesquiera hasta que ninguna transferencia sea posible, es decir, hasta que ninguna transferencia permita acercarse más a la proporcionalidad, en el sentido que se ha establecido.



Edward Huntington 1874-1952. Matemático nacido en Massachusetts. En 1899 pasó a Europa y terminó en Francia donde se doctoró en Álgebra.

De las 16 formas posibles de expresar la proporcionalidad anterior se obtienen 5 métodos diferentes. Son solo cinco en parte porque varios test de comparación dan lugar al mismo método; y en parte porque hay test no aplicables porque, a veces, no

conducen a un reparto; por ejemplo, el test $\left| \frac{e_i}{e_j} - \frac{v_i}{v_j} \right|$ aplicado al problema de distribuir

20 escaños a tres partidos con votos $v = (962, 738, 300)$, produce el siguiente ciclo

$$(10, 7, 3) \rightarrow (9, 8, 3) \rightarrow (9, 7, 4) \rightarrow (10, 7, 3).$$

Con lo cual ese test de comparación no origina un método capaz de distribuir los 20 escaños entre los tres partidos.

Los cinco métodos diferentes se obtienen partiendo de las siguientes igualdades:

$$e_i = \frac{e_j v_i}{v_j}, \quad \frac{v_j}{e_j} = \frac{v_i}{e_i}, \quad \frac{e_i / v_i}{e_j / v_j} = 1, \quad \frac{e_i}{v_i} = \frac{e_j}{v_j}, \quad \frac{e_i v_j}{v_i} = e_j$$

Adams, Dean, Hill, Sainte-Laguë, D'Hondt

En cada desigualdad se considera que el partido beneficiado es el i .

2.4 Métodos de divisores.

Una técnica propuesta por Michel Balinski en las últimas décadas del siglo XX permite obtener infinitos métodos de reparto proporcional. Para ello, en cada intervalo comprendido entre dos enteros consecutivos $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, ... se establece una barrera (o divisor) para redondear las fracciones que estén en ese intervalo. El redondeo es al extremo inferior si la fracción es menor que la barrera establecida y al extremo superior si supera la barrera. Las fracciones que coinciden con la barrera admiten cualquiera de los dos redondeos.

Notamos esas barreras por d_i donde, $i \leq d_i \leq i+1$, $i=0,1,2,\dots$. La sucesión $d = \{d_0, d_1, \dots\}$ identifica al método, que lo notamos por M^d .

Los extremos de los intervalos se pueden fijar como barreras para el redondeo, con la única limitación de que si en un intervalo se elige como barrera uno de los extremos entonces en ningún otro intervalo se puede elegir el extremo contrario.



Michel Louis Balinski nació en Génova en 1933. Es matemático especializado en Econometría y en Investigación Operativa. Ha conseguido grandes avances tanto en la representación proporcional y biproporcional como en los métodos de elección social.

Si queremos hacer un reparto en proporción a unos votos, usando un método de divisores, basta multiplicar los votos por un factor k tal que los redondeos de las fracciones resultantes sumen el número de escaños a repartir.

Si en lugar de partir de los votos, partimos de las cuotas el factor que necesitamos encontrar será un número cercano a la unidad.

Los cinco métodos de Huntington son casos particulares de métodos de divisores.

2.4.1 Redondeos a la baja, simétrico y al alza (D'Hondt, Sainte-Laguë y Adams).

Tres posibilidades inmediatas de redondeo son: el entero por defecto, el entero más próximo y el entero por exceso.

El primero equivale a que el punto de redondeo en el intervalo limitado por dos enteros consecutivos $[s, s+1]$ es $s+1$ y, por tanto, las fracciones del interior del intervalo se redondean al entero por defecto, que es la parte entera de la fracción. El método correspondiente es D'Hondt. Esta es otra definición del método D'Hondt (o de Jefferson) equivalente a la que habíamos dado anteriormente.

El punto de redondeo del segundo método es el centro del intervalo. Las fracciones con parte decimal inferior a 0,5 redondean a la baja mientras que las que fracciones con parte superior al 0,5 redondean al entero superior. Es el método de Sainte-Laguë (o de Webster o de los divisores impares).

El tercer método equivale a establecer como punto de redondeo el extremo inferior del intervalo, y corresponde al método de Adams.

Vamos a aplicar, partiendo de las cuotas, los tres métodos anteriores para distribuir 24 escaños en proporción a los siguientes votos:

$$Votos = (990, 430, 400, 270, 180, 80, 50),$$

cuyas cuotas correspondientes son:

$$cuotas = (9.9, 4.3, 4.0, 2.7, 1.8, 0.8, 0.5).$$

Unos factores k que permiten obtener cada reparto son: 1,13, 0,99 y 0,90.

$$\begin{aligned} \text{Hondt} &= \lfloor \text{Cuotas} * 1,13 \rfloor = \\ &= \lfloor (11,18 \quad 4,86 \quad 4,52 \quad 3,05 \quad 2,03 \quad 0,90 \quad 0,57) \rfloor \\ &= (11, \quad 4, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 0, \quad 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Webster} &= \lfloor \text{Cuotas} * 0,99 \rfloor = \\ &= \lfloor (9,8 \quad 4,26 \quad 3,96 \quad 2,67 \quad 1,78 \quad 0,79 \quad 0,49) \rfloor \\ &= (10, \quad 4, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Adams} &= \lceil \text{Cuotas} * 0,90 \rceil = \\ &= \lceil (8,9 \quad 3,8 \quad 3,6 \quad 2,4 \quad 1,6 \quad 0,7 \quad 0,45) \rceil \\ &= (9, \quad 4, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 1). \end{aligned}$$

Los corchetes $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$ y $\lceil \cdot \rceil$ se usan habitualmente par indicar los redondeos al entero por defecto (o parte entera), al entero más próximo y al entero por exceso, respectivamente.

Observaciones

El factor por el que hay que multiplicar las cuotas para aplicar el método D'Hondt es siempre mayor o igual que 1, y después se redondea a la baja; por tanto, con el método D'Hondt todo partido recibe, al menos, tantos escaños como vale la parte entera de su cuota (denominada cuota inferior). A esto se denomina “*verificar la cuota inferior*” y es una propiedad muy importante en la asignación de escaños a los partidos; ya que un partido tiene garantizado que no pierde, con respecto a su cuota, más escaños de lo que vale su parte decimal.

Un partido con cuota igual o superior a 1 conseguirá al menos un escaño usando D'Hondt, pero si la cuota es sensiblemente inferior a la unidad quedará sin representación. D'Hondt castiga en cada reparto a los pequeños partidos. Sin embargo el método de Sainte-Laguë es imparcial, pues no beneficia de manera sistemática a pequeños partidos frente a grandes ni viceversa, si admitimos que las partes decimales de las cuotas de unos y otros tienen la misma probabilidad de valer cualquier cantidad en $[0,1)$. El factor para Sainte-Laguë será unas veces inferior a 1 y otras veces igual o superior a 1.

Al método Adams le ocurre lo contrario que a D'Hondt, en este caso *verifica la cuota superior*. El factor por el que hay que multiplicar las cuotas es siempre menor o igual que la unidad. Ningún partido recibe más escaños de lo que vale el redondeo por exceso de su cuota. Esta propiedad no tiene interés práctico a la hora de asignar escaños a los partidos políticos. Además, el método Adams, normalmente, no es aplicable para asignar escaños a los partidos, ya que asigna un escaño a un partido con un solo voto.

Hemos indicado que tres de los cinco métodos de Huntington son métodos de divisores. Los dos restantes también lo son. Concretamente las barreras para el redondeo con Hill y Dean son:

$$\text{Hill } d_i = \sqrt{i(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \square \quad (0, 1.414, 2.449, 3.464, \dots),$$

$$\text{Dean } d_i = \frac{2i(i+1)}{2i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \square \quad (0, 1.333, 2.40, 3.428, \dots).$$

2.4.2 La familia paramétrica de métodos de divisores.

Una posibilidad a la hora de establecer el punto de redondeo dentro de cada intervalo es fijar la misma posición en todos los intervalos, es decir, fijar un valor $t \in [0,1]$ y usar como puntos de redondeo $d_i = i+t$, $i=0, 1, 2, \dots$. Con lo cual el método queda determinado en el momento en que se fija el valor del parámetro t . Por tanto, hay infinitos métodos en esta familia y los valores $t=0$, $t=1/2$ y $t=1$ corresponden a los métodos de Adams, Sainte-Laguë y D'Hondt.

2.5 Los métodos D'Hondt y Sainte-Laguë a lo largo de la historia.

Como veremos más adelante, los dos métodos de reparto proporcional más importantes son D'Hondt y Sainte-Laguë.

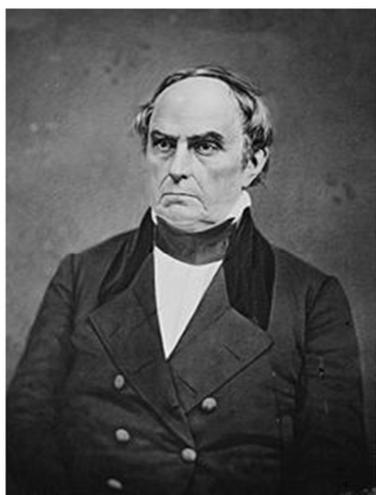
El método propuesto por el belga Victor D'Hondt en varios trabajos publicados entre 1878 y 1885, había sido usado previamente en EEUU, a propuesta de Thomas Jefferson (tercer presidente) para distribuir los escaños del Congreso a los diferentes Estados entre 1791 y 1842. De ahí que científicamente se use más el nombre Jefferson.

D'Hondt es uno de los métodos más usados en la asignación proporcional de escaños a los partidos políticos. En España ha sido objeto de críticas por la distribución final de escaños que produce para el Congreso de los Diputados; sin embargo el principal desequilibrio en la representación de los partidos, en cada elección, se debe al hecho de que los partidos obtienen su representación mediante 52 repartos independientes, y la mayoría de ellos se realizan en circunscripciones de tamaño pequeño. En esas circunstancias si se usara otro método de reparto el desequilibrio sería menor, pero también sería significativo.

De hecho, D'Hondt es un método muy usado en repartos proporcionales, por ejemplo se ha utilizado en Argentina, Austria, Bélgica, Bulgaria, Colombia, Croacia, Ecuador, Eslovenia, España, Finlandia, Francia, Grecia, Guatemala, Irlanda, Israel, Japón, Países Bajos, Paraguay, Polonia, Portugal, República Checa, República Dominicana, Suiza, Turquía, Uruguay y Venezuela. En el caso de España se utiliza para la asignación de escaños a los partidos en las elecciones europeas, en las generales para el Congreso de los Diputados, en las municipales (salvo municipios de menos de 250 habitantes) y en todas las elecciones autonómicas.

Por otra parte, D'Hondt, tiene ciertas propiedades de gran interés en la competición entre diferentes partidos hasta el punto de que debemos considerarlo el más recomendable en esos problemas de asignación de escaños.

Daniel Webster (1782-1852) propuso su método en 1832, si bien no fue adoptado por el Congreso de los EEUU hasta 1842, y reemplazado por el de Hamilton en 1852. Fue de nuevo adoptado en 1901 y reconfirmado en 1911. Finalmente fue reemplazado por el de Hill en 1941.



Daniel Webster, (abogado), fue Secretario de Estado en EEUU con tres presidentes.

El método de Webster fue reinventado por el matemático francés Sainte-Laguë, que es el nombre por el que se conoce en Europa.

Diferentes procedimientos han dado lugar a un mismo método a lo largo de la historia. Incluso en la literatura y en la definición de sistemas electorales, aparecen a veces como si se tratara de métodos diferentes.

El método Sainte-Laguë se aplica (o se ha aplicado) entre otros países en Alemania, Nueva Zelanda, Noruega, Suecia, Dinamarca, Bosnia Herzegovina, Letonia, Kosovo, y los estados alemanes de Hamburgo y Bremen.

En otros países se modifica el primer divisor (pasando a ser 0,7 en lugar de 0,5), con objeto de dificultar la obtención del primer escaño y evitar la aparición de muchos partidos pequeños; el método obtenido mediante esta modificación se conoce con Sainte-Laguë modificado. Por ejemplo es lo que se hace en algunos países nórdicos, como Suecia para algunos de los repartos de escaños a los partidos.

3. PROBLEMA DE REPARTO PROPORCIONAL CON LIMITACIONES.

A veces un problema de reparto tiene condiciones adicionales, además de que las asignaciones sean cantidades enteras no negativas y con suma h . Por ejemplo, si establecemos un método para determinar el tamaño de las circunscripciones electorales debemos asegurar que ninguna de ellas queda sin escaños. Otras veces está limitado el máximo de escaños que puede recibir un partido o bien una circunscripción electoral.

En general un problema de reparto proporcional con requisitos mínimos y máximos se establece de la siguiente forma: se tiene un vector $m=(m_1, \dots, m_n)$ que contiene la representación mínima que debe recibir cada partido político, un vector $s=(s_1, \dots, s_n)$ que contiene la representación máxima que puede recibir cada partido, entonces la asignación de escaños con un método de reparto proporcional M de acuerdo con estas limitaciones se representa por $M((v, m, s), h)$ y tiene que verificar

$$\sum_{i=1}^n \text{Mediana}([k * v_i]_M, m_i, s_i) = h.$$
 Lógicamente para que el problema tenga solución los requisitos mínimos y máximos tienen que ser compatibles con el número de escaños a distribuir, h , esto es $\sum_{i=1}^n m_i \leq h \leq \sum_{i=1}^n s_i$.

4. CÓMO ELEGIR UN MÉTODO DE REPARTO.

Todos los métodos que hemos mencionado verifican los cinco requisitos básicos que se exigen para ser proporcionales. ¿Qué método debemos elegir para resolver un problema de reparto proporcional? Lo más razonable es exigir propiedades adicionales a las ya establecidas y hacer la elección en función de las propiedades que cada método verifique.

Lógicamente el método de Hamilton siempre *verifica la cuota*, es decir, ningún partido recibe más escaños de su cuota superior (redondeo por exceso de su cuota) ni menos de su cuota inferior (redondeo por defecto de su cuota).

Verificar la cuota suele ser una propiedad apetecible por quienes desean que la asignación a cada partido sea lo más próxima a su cuota, de tal forma que ninguno de ellos llegue a ganar o a perder un escaño. Eso ha llevado a muchos políticos y algunos investigadores a proponer el método de Hamilton.

Sin embargo hay otras propiedades deseables que son mucho más importantes que la cuota y ello hace que la elección de un método de reparto no sea tan trivial. Comentamos a continuación las más importantes.

1. Monotonía con respecto a los escaños a distribuir. Un método de asignación de escaños se dice que es monótono con respecto al número de escaños si ante cualesquier distribución fija de votos, al aumentar el número de escaños a distribuir ningún partido pierde escaños.
2. Monotonía con respecto a los votos. Al comparar los votos y los escaños de dos partidos, A y B, en dos elecciones diferentes los números cambian. Se dice que el método es monótono con respecto a los votos, cuando al pasar de una elección a la otra, si un partido aumenta en votos y el otro disminuye no se produce lo contrario con los números de sus respectivos escaños. Es decir, los escaños no debieran moverse en sentido contrario al de los votos.
3. Consistencia. Un método de reparto de escaños se dice que es consistente si al aplicarlo a una parte de la votación reproduce los mismos resultados. Por ejemplo, si el método distribuye 12 escaños a los partidos A, B y C en la forma 3-4-5 al distribuir 7 escaños entre A y B debe resultar de nuevo 3-4.
4. Evitar la paradoja de los nuevos estados o los nuevos partidos. La ausencia de monotonía es conocida como paradoja de Alabama. Pero hay otras paradojas que debieran evitarse, como la paradoja de los nuevos partidos que consiste en que un partido recibe más escaños solo por el hecho de entrar más partidos en el reparto.
5. Verificar la cuota inferior. Como hemos indicado anteriormente un método de reparto proporcional verifica la cuota si no asigna a un partido más escaños del redondeo de su cuota por exceso ni menos del redondeo de su cuota por defecto. Esta propiedad es muy restrictiva con los grandes partidos y poco restrictiva con los pequeños. Sin embargo es menos restrictivo exigir solo la segunda parte, es decir que el método garantice a cada partido, al menos, tantos escaños como corresponden al redondeo por defecto de su cuota, llamada cuota inferior.

6. Fortalecer coaliciones (castigar los cismas en los partidos). Se dice que un método fortalece coaliciones si la unión de dos o más partidos sumando sus votos, asegura a la coalición al menos tantos escaños como hubieran obtenido por separado. Para ello, se hace la hipótesis de que la coalición recibe los mismos votos que hubieran recibido por separado los partidos que la integran y que no se producen variaciones en los votos de los restantes partidos. Es una propiedad característica del método D'Hondt.
7. Transferencia correcta. Dado un partido que ha recibido más escaños que otro, al distribuirlos con un método de divisores M^d ¿será siempre posible transferir un número r de votos del partido más votado al menos votado de forma que el nuevo reparto, con dicho método, asigne un escaño menos al partido que ha reducido sus votos y un escaño más al que ha aumentado sus votos? Cuando esa transferencia es siempre posible, sea cual sea el problema de reparto, decimos que el método transfiere correctamente votos y escaños. Es una propiedad característica de los métodos de la familia paramétrica dentro de los métodos de divisores. Por tanto, no la verifican los métodos Hill, Dean ni el método de Sainte-Laguë Modificado.
8. Imparcialidad. Un método de reparto se dice que es imparcial si no beneficia de forma sistemática a los partidos pequeños frente a los grandes ni al contrario.

Lógicamente todas las propiedades anteriores no son simultáneamente compatibles. De hecho no es razonable que se deseen todas para un mismo problema de reparto. Por ejemplo, resultaría contradictorio requerir que un método sea imparcial y que fortalezca coaliciones, porque el fortalecimiento de coaliciones exige ventajas para los grandes partidos mientras que la imparcialidad requiere no dar ventaja a unos partidos frente a otros por su tamaño en votos.

Para la elección de un método lo que debemos hacer es establecer una tabla con las propiedades que verifica cada uno de ellos y después elegir el método en función de las propiedades preferidas.

Por ejemplo, en el cuadro siguiente analizamos los cuatro métodos más usados. No incluimos los tres métodos de Huntington cuyo primer divisor es cero, porque no son aplicables a la distribución de escaños a los partidos políticos.

Tabla 1. Cuadro de propiedades y métodos

	Hamilton	D'Hondt	Sainte-Laguë	Sainte-L. Mod.
Monotonía de los escaños	NO	SÍ	SÍ	SÍ
Monotonía de los votos	NO	SÍ	SÍ	SÍ
Consistencia	NO	SÍ	SÍ	SÍ
Evitar Paradojas	NO	SÍ	SÍ	SÍ
Cuota	SÍ	NO	NO	NO
Cuota Inferior	SÍ	SÍ	NO	NO
Fortalece coaliciones	NO	SÍ	NO	NO
Transferencia Correcta	SÍ	SÍ	SÍ	NO
Imparcial.	SÍ	NO	SÍ	NO

Ninguno de los métodos que figuran en la tabla anterior verifica la lista completa de propiedades que hemos considerado y, de hecho, no es posible inventar un método que verifique un grupo de propiedades más reducido, como las que aparecen en el siguiente teorema demostrado por M. Balinski y P. Young.

Teorema de imposibilidad.

No es posible definir un método de reparto proporcional monótono con respecto a los votos y que verifique la cuota (M. Balinski y H. P. Young, 2001, pp. 149).

La elección de un método u otro debemos hacerla en función de las propiedades a las que demos prioridad.

Para algunos verificar la *cuota* puede ser lo prioritario; en tal caso el método más simple que la garantiza sería el de Hamilton. No obstante hemos de indicar que el método de Sainte-Laguë la verifica con muchísima frecuencia.

Para otros la falta de *monotonía* es causa suficiente para rechazar un método, ya que la paradoja de Alabama no es razonable socialmente; en tal caso hay que optar por un método de divisores.

La paradoja de Alabama es el argumento más popular contra el método de Hamilton, a pesar de que dicho método incurre en muchas más paradojas. Sin embargo, tanto desde el punto de vista académico como desde el punto de vista social, creo que la **consistencia** es una propiedad prioritaria a las dos anteriores y a todas las demás. Académicamente porque un método debe ser coherente consigo mismo, es decir no contradecirse, y socialmente porque la inconsistencia se percibe sin necesidad de hacer cálculo alguno, mucho antes que una posible paradoja de Alabama y que todas las demás paradojas y comportamientos indeseables.

Basta para ello observar el siguiente ejemplo obtenido a partir de datos reales de las elecciones europeas de 2014. En él se distribuyen, usando Hamilton, 10 escaños a seis partidos en proporción a sus votos, que fueron los que figuran en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados al distribuir 10 escaños con Hamilton

Partido	Votos	Cuotas	Hamilton
P1	160.117	4,22	4
P2	88.617	2,34	2
P3	41.860	1,10	1
P4	40.406	1,07	1
P5	32.428	0,86	1
P6	15.461	0,41	1
Total	378.889	10,00	10

Ante este reparto un ciudadano no suele calcular cómo habría cambiado el resultado si en lugar de 10 escaños se hubiesen distribuido 11 (o más, porque al distribuir 16 el partido P6 no recibe ningún escaño con Hamilton) para ver que incurre en la paradoja de Alabama. Ahora bien, tanto los simpatizantes del partido P1 como los de P2, que solo se fijan en los votos y escaños recibidos por sus partidos y por el partido más beneficiado que es P6, pueden justificar que el escaño de P6 le debió ser asignado a su partido. En el primer caso, porque si P1 tiene cinco escaños cada uno de esos escaños representaría a más de 32.000 electores, mientras que P6 no tuvo ni la mitad de esos votos, y algo similar pueden argumentar los electores de P2. Efectivamente, como se observa en la Tabla 3, el reparto es inconsistente porque al volver a aplicar Hamilton para distribuir 5 escaños entre P1 y P6 los 5 escaños deben corresponder a P1 según, pero Hamilton los había distribuido como 4-1 en presencia del resto de los partidos.

Tabla 3. Inconsistencia de Hamilton

Partido	Votos	Cuotas	Hamilton
P1	160.117	4,56	5
P6	15.461	0,44	0
Total	175.578	5,00	5

Lo mismo ocurre si hacemos los cálculos para P2 y P6. La inconsistencia se percibe mucho más que la paradoja de Alabama, aunque ésta tenga más fama. Creo que la consistencia es la propiedad más importante de la tabla de propiedades que hemos establecido. En tal sentido otro teorema, debido también a Balinski y Young, establece lo siguiente:

Teorema de consistencia (o de coherencia).

Un método de reparto proporcional es consistente si y solo si es un método de divisores.

La demostración es trivial en uno de los sentidos pero muy compleja en el otro.

Una cuestión importante, cuando el método se emplea para distribuir escaños a los partidos, es penalizar las escisiones o equivalentemente fortalecer las coaliciones, y el único método de divisores que verifica esta propiedad es D'Hondt.

Una caracterización más del método D'Hondt es la siguiente: Si el número de escaños a distribuir es impar, entonces el único método que garantiza mayoría absoluta de escaños a un partido que haya recibido mayoría absoluta de votos es D'Hondt.

Todo ello, unido a las restantes propiedades mostradas anteriormente nos lleva a hacer la siguiente sugerencia:

Sugerencia.

- Para distribuir escaños entre diferentes partidos políticos el método D'Hondt es el más recomendable.
- Cuando la imparcialidad sea muy importante, por ejemplo para una distribución interna dentro de un partido, el método de Sainte-Laguë es el más recomendable.
- El método de Hamilton es rechazable para realizar cualquier tipo de reparto por ser inconsistente y presentar diversas paradojas.

5. TAMAÑO CORRECTO PARA LAS CIRCUNSCRIPCIONES FRENTE A REPRESENTACIÓN CORRECTA PARA PARTIDOS POLÍTICOS.

Volviendo al sistema electoral correspondiente al Congreso de los Diputados, en el que las circunscripciones electorales son las 50 provincias junto con Ceuta y Melilla, los tamaños de las circunscripciones provinciales se obtienen asignando dos escaños a cada provincia con independencia de su población, además de uno a Ceuta y otro a Melilla, y repartiendo los 248 escaños restantes a las provincias en proporción a sus poblaciones. El método de Hamilton es el usado para realizar la distribución de los 248 escaños en proporción a las poblaciones, que junto con los 102 asignados de forma fija completan los 350 que tiene actualmente el Congreso.

La asignación fija de dos escaños a cada provincia provoca una desproporción que hace que un escaño por Madrid o por Barcelona represente unas cuatro veces más ciudadanos que un escaño de una provincia poco poblada. Sin embargo, si los representantes de cada circunscripción actuasen de forma conjunta, en defensa de los intereses de su circunscripción electoral, serían los ciudadanos de las circunscripciones menos pobladas los que tendrían *menos poder* que los de Madrid o Barcelona. En la práctica esa descompensación no existe porque los diputados se alían por partidos a la hora de votar, es decir por ideología, no me consta que lo hayan hecho en defensa de la circunscripción de la que provienen en alguna ocasión. Ese comportamiento resta interés al tamaño de las circunscripciones.

No obstante, si se quiere un mayor equilibrio en el tamaño de las circunscripciones en relación con la población de las mismas, se puede reducir a un escaño la asignación fija inicial y de paso dar un trato uniforme a las 52 circunscripciones, es decir, no hacer distinción con Ceuta y Melilla (si se modifica la Constitución), ya que tienen una población cercana a la de Soria, que es la provincia menos poblada, y cualquiera de estas dos ciudades autónomas tiene una complejidad mucho mayor que la de muchas provincias y, por tanto, no se justifica limitar la representación de estas ciudades a un diputado. También sería deseable sustituir el método de Hamilton por el de Sainte-Laguë.

Sin embargo, es muy importante que los ciudadanos estén bien representados ideológicamente, es decir, que la representación de los partidos políticos sea razonable en relación a su número de votos. Lamentablemente eso no ocurre en el Congreso de los Diputados.

Con el sistema actual los partidos políticos no tienen un número de diputados en función de sus votos totales. ¿Por qué sucede así? Los escaños de cada circunscripción electoral se asignan a los partidos en proporción a sus votos usando el método D'Hondt. Este método normalmente favorece a los partidos más votados con respecto a los menos votados.

El método D'Hondt se aplica circunscripción a circunscripción, 52 veces en total. En las circunscripciones pequeñas y en muchas de tipo mediano solo dos partidos obtienen representación. Así, por ejemplo, un partido que obtenga algo menos del 10% de los votos en cada circunscripción, como casi siempre le ha ocurrido al tercero o al cuarto de ámbito estatal, puede perder muchos escaños entre los 52 repartos, por no superar en la

mayoría de ellas la barrera de inclusión del método D'Hondt. Simultáneamente otro partido con un número de votos similar, pero que los recibe concentrados en pocas circunscripciones, puede recibir una asignación proporcional a sus votos, incluso puede resultar primado en ellas porque sea uno de los dos más votados.

Este mecanismo para determinar la representación de los partidos a base de hacer 52 repartos, independientes entre sí, hace que un partido A pueda recibir muchos más votos que otro partido B y sin embargo el partido A reciba menos escaños que el B. Es una **discordancia** o falta de coherencia, entre votos totales de los partidos y escaños totales obtenidos por los mismos. Hay otros países con representación proporcional que también tienen muchas circunscripciones en las que se asignan escaños a los partidos, pero después corrigen los desequilibrios que se han producido, con unos escaños que se habrían reservado para garantizar proporcionalidad en la representación de los partidos.

Eso se hace por ejemplo en Alemania y en los países nórdicos, usando diferentes técnicas.

Sin embargo en España se producen discordancias con mucha frecuencia pero no se ha previsto un mecanismo para corregirlas, hasta el punto de que solo algunos países como Italia o Brasil presentan desequilibrios en la representación de los partidos políticos similares a las que ocurren en el Congreso de los Diputados.

Así pues, lo más importante que hay que corregir en el sistema electoral del Congreso de los Diputados es la representación de los partidos políticos y, por eso, mi grupo de investigación ha dedicado bastante esfuerzo en preparar alternativas y difundirlas entre la clase política.

Fruto de esa divulgación fue la propuesta presentada por uno de los partidos más perjudicados con el sistema electoral actual, cuya toma en consideración se votó en el Congreso de los Diputados el 7 de octubre de 2014, pero no prosperó.

El diagrama de barras siguiente muestra, para cada partido político, el porcentaje de votos obtenidos en 2011, el porcentaje de escaños que hubiese obtenido con el sistema electoral que figuraba en la propuesta presentada y el porcentaje de escaños que obtuvo con el sistema electoral actual.

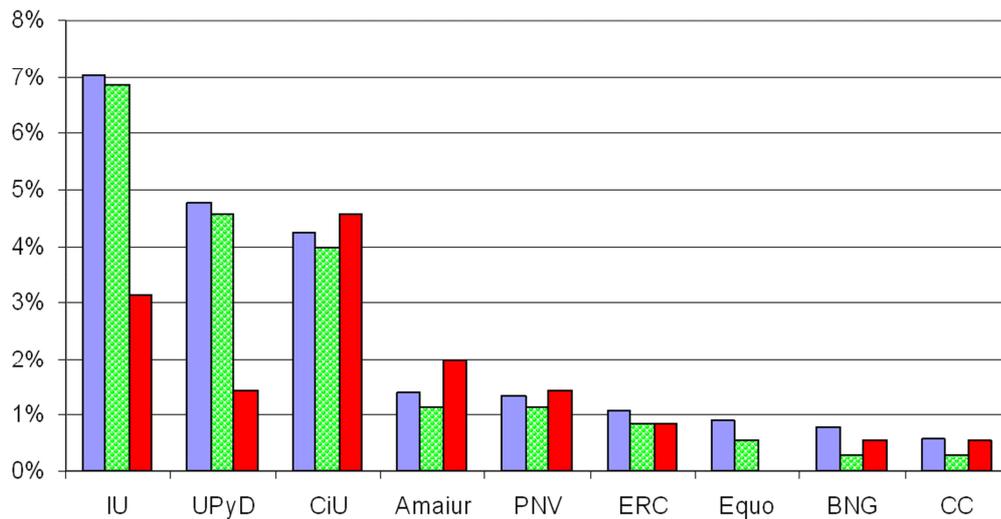
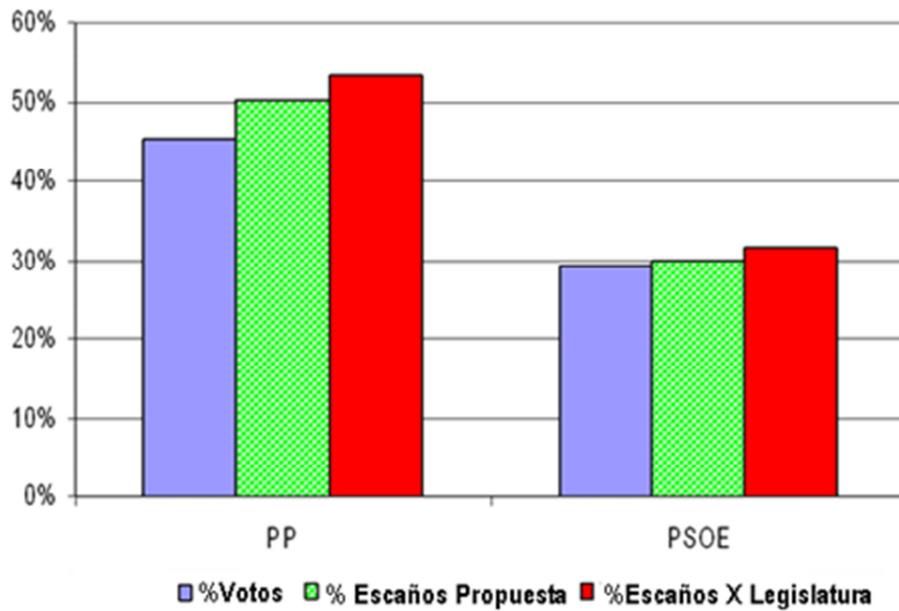


Figura 1: Comparación de votos y repartos de escaños para las elecciones de 2011.

Como se observa en las barras, con esta propuesta el PP habría resultado primado en 2011, aunque algo menos que con el sistema electoral actual, y el PSOE también habría recibido una pequeña prima. Por el contrario IU no recibió con el sistema actual ni la mitad de los escaños que corresponden a su proporción de votos y UPyD ni la tercera parte (muchos menos escaños que otros partidos de ámbito regionalista a los que superaba en votos). Sin embargo con la propuesta ambos partidos habrían recibido una proporción de escaños casi idéntica a su proporción de votos.

Los dos grandes partidos políticos y los partidos de ámbito regionalista rechazaron la toma en consideración de aquella propuesta de reforma electoral. Resultado que no nos sorprendía en absoluto dado el escaso interés que siempre han mostrado dichos partidos sobre cualquier propuesta de reforma electoral que se haya presentado en esta etapa de democracia.

Representatividad y gobernabilidad.

La idea que subyace al diseñar un sistema electoral es compatibilizar alta representatividad con una razonable gobernabilidad. Un país debe estar bien representado pero también tiene que ser gobernado.

Hay quien piensa que mejorar la representatividad implica debilitar la gobernabilidad, pero eso no es cierto en muchas ocasiones.

Un sistema electoral produce **buena representatividad** para los partidos si:

- Garantiza a todo partido, salvo que sea muy pequeño, un número de escaños cercano al 95% de su cuota inferior.
- No produce discordancias. Es decir, no asigna más escaños a un partido con menos votos.
- Es ecuánime en el trato a partidos con similar número de votos. Es decir, la representación de dos partidos que difieren en muy pocos votos, por ejemplo en un solo voto, no debe diferir en más de un escaño.

A estos tres principios hemos de añadir un cuarto relativo a la **gobernabilidad** que describimos a continuación:

Habitualmente el partido vencedor de las elecciones recibe un porcentaje de escaños superior a su porcentaje de votos. La diferencia entre ambos porcentajes es lo que vamos a denominar *prima del partido vencedor*. Ocurre con casi todos los sistemas electorales del mundo. Aquellos países en los que la prima del partido vencedor es muy pequeña, por ejemplo menos de un punto porcentual, suelen tener parlamentos muy fragmentados y con frecuencia tienen adelantos electorales. Así pues, el cuarto principio que debiera verificar un sistema electoral está relacionado con la gobernabilidad y diremos que lo cumple si:

- Contempla una prima al partido vencedor.

Una prima al partido vencedor cercana a 5 puntos creo que es bastante aceptable. En España la prima al vencedor ha sido inferior a 5 puntos en alguna ocasión, pero en otras ocasiones se han producido primas superiores a 10 puntos en las elecciones generales. En las elecciones de 2011 fue de 8,5, similar a la que obtuvo el CDU/CSU en Alemania en 2013, a pesar de que Alemania tiene un sistema electoral que produce una de las proporcionalidades más altas en el mundo. La prima actual del CDU/CSU es un comportamiento algo excepcional provocado por la barrera electoral del 5%, pues en general en Alemania el partido vencedor recibe una prima pequeña porque son primados todos los partidos que superan la barrera electoral.

Representación de los partidos políticos.

Para conseguir representatividad debemos asignar la mayor parte de los escaños del parlamento a los partidos en proporción a sus votos totales, sin usar una barrera porcentual clásica porque con esa barrera no reciben un trato ecuánime los partidos que quedan a ambos lados de la barrera y difieren en pocos votos.

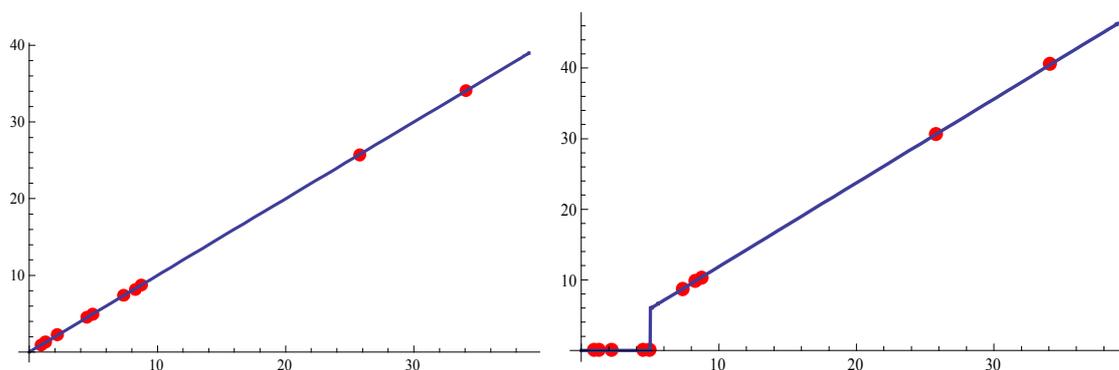


Figura 2: Proporcionalidad sin barrera y con barrera clásica del 5%.

El ejemplo gráfico muestra el efecto de una barrera clásica (del 5%) y corresponde a la elección producida en 2013 Alemania, en la que sólo cuatro partidos superaron el 5%.

La forma clásica de definir las barreras electorales ha sido exigir alcanzar cierto porcentaje α de votos. Eso equivale a multiplicar por cero los votos de los partidos que no alcanzan ese porcentaje, y multiplicar por 1 los votos de los partidos que sí alcanzan o sobrepasan dicho porcentaje.

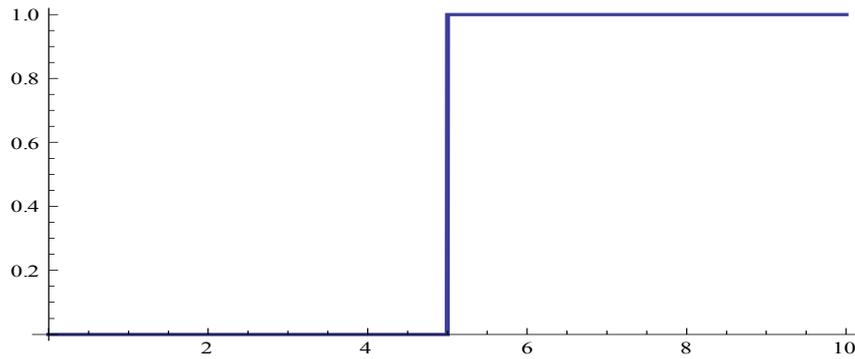


Figura 3: Función discontinua equivalente a la barrera clásica.

La gráfica de la figura 3 origina un salto en el punto 5.

Podría hacerse una transformación de votos que implique una barrera sin necesidad de dar un salto.

Por ejemplo, los votos de los partidos podemos contabilizarlos en porcentajes y multiplicar el porcentaje p_i de votos del partido i por el resultado de evaluar una función spline cúbico $sp(x)$ en p_i . Así los valores ajustados a los que asignaríamos los escaños serían $p_i^* = p_i sp(p_i)$. El spline cúbico puede ser el que interpola en cero el valor 0 y derivada nula, y en un punto α el valor 1 y derivada nula. Después de α el spline tomaría el valor constante igual a 1, como muestra la figura 4.

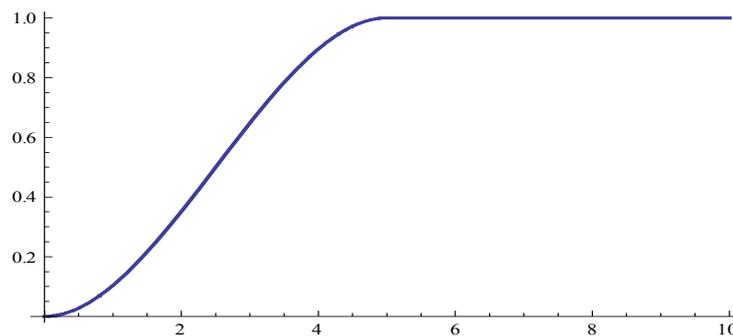


Figura 4: Función spline para una barrera continua

Otra función de ajuste de votos, de más simple aplicación que el spline cúbico citado antes, y que es continua aunque no derivable, es la siguiente $p_i^* = \text{Max}(0, p_i - \alpha)$ y se hace el reparto con respecto a los valores p_i^* . Aplicar esa función equivale a una reducción uniforme de los votos de todos los partidos. En ambos casos el valor del

parámetro α es una decisión política, como lo han sido todas las barreras porcentuales establecidas hasta la actualidad. Esta barrera es usada en todas las propuestas de reforma electoral que elaboramos en nuestro grupo de investigación, por ser muy sencilla y ecuánime.

Por ejemplo, si $\alpha = 2,5$ el resultado gráfico para Alemania en 2013 habría sido el que aparece en la figura 5.

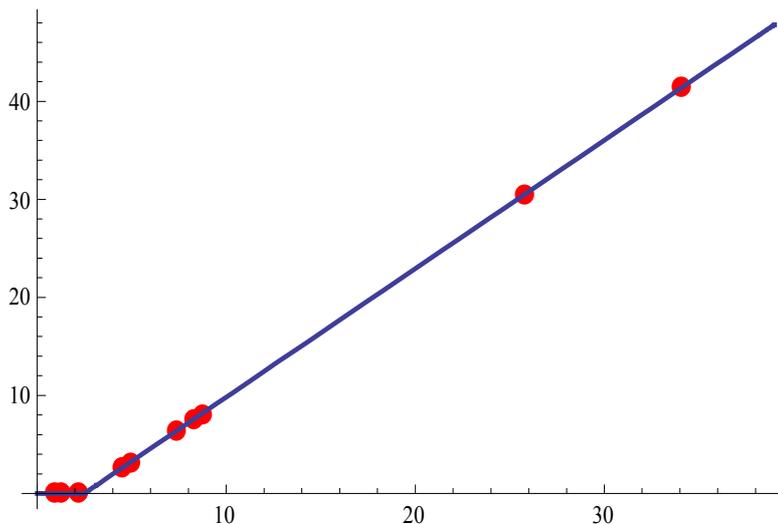


Figura 5: barrera continua basada en una reducción de los votos.

Con esa barrera un total de seis partidos habrían tenido representación en el Bundestag. Los dos partidos nuevos consiguen sus escaños de todos excepto del vencedor ya que con este reajuste de los porcentajes de votos, el partido vencedor pasa de los 49,2 que tuvo con la barrera actual del 5% a 49,5 que habría obtenido con este tipo de barrera continua. Por tanto esta barrera habría facilitado la gobernabilidad en Alemania más que la que tiene su sistema electoral actual.

La gobernabilidad se incentiva mediante una barrera que penaliza a los partidos más pequeños o bien distribuyendo una parte de los escaños con una fórmula favorable al partido vencedor, o bien una combinación de ambas técnicas. Para el Congreso de los Diputados de España creo que lo más adecuado es una combinación de ambas técnicas, dado que la reducción de votos debe ser pequeña para no anular partidos que siempre han obtenido representación; pero si solo hacemos una pequeña reducción de los votos se debilita la gobernabilidad.

En otros países que no tienen partidos de ámbito regional y que tradicionalmente vienen usando una barrera porcentual clásica de un 4% o un 5% de los votos totales, puede sustituirse dicha barrera por otra basada en reducir los votos de todos los partidos en un número igual al 2% o al 2,5% de los votos totales recibidos válidamente por las diferentes candidaturas, y distribuir todos los escaños en proporción a los votos reducidos.

Con ese cambio los sistemas electorales ganan mucho en representatividad e incluso en gobernabilidad, sin necesidad de hacer un segundo reparto para primar al partido vencedor. En el caso de España no es recomendable una reducción tan elevada porque dejaría fuera a partidos históricos que han estado presentes en el Congreso en todas las legislaturas.

No existe un modelo perfecto, ni una recomendación universal para determinar la representación de los partidos políticos. La historia, la tradición y el sistema de partidos de cada país juegan un papel fundamental que es aconsejable tener en cuenta a la hora de diseñar un sistema electoral alternativo al que ya tenga.

Por eso, usar como alternativa al sistema electoral de un país una imitación del sistema electoral de otro puede ser frustrante. El hecho de que en un país funcionen bien las instituciones democráticas, la economía, la justicia, etc. no significa que si otro país copia su sistema electoral tenga un comportamiento similar, ni siquiera en lo relativo a la representatividad democrática.

Una imitación puede ser decepcionante. Por ejemplo eso podría ocurrir si se sustituye un sistema basado en la representación proporcional por uno de tipo mayoritario en un país en el que sus ciudadanos anteponen la ideología a la representación personalizada, o también cuando se sustituye un sistema electoral en un país con destacada presencia de partidos minoritarios, generalmente de tipo regionalista, por otro sistema electoral que contemple una barrera electoral que dejase fuera del parlamento a esos partidos.

Cada país tiene unas características y un punto de partida que hay que tener en cuenta al diseñar una reforma electoral.

En el caso de España no creo recomendable usar como barrera una reducción importante de los votos totales de los partidos. Por ejemplo una reducción cuyo valor fuese solo del 1% conllevaría que un partido histórico como el PNV, que habitualmente ha gozado de grupo parlamentario, podría reducir su representación a un solo escaño

(caso de no formar coaliciones preelectorales con otros partidos), pues su porcentaje de votos suele ser alrededor del 1,25%. Así pues la reducción de votos debiera ser bastante inferior al 1%, incluso inferior al 0,5%. Ahora bien, esa barrera tan pequeña no penaliza la fragmentación de los grandes partidos y además permite la entrada de más partidos en el parlamento. Por tanto una alternativa para conservar estabilidad en el sistema de partidos políticos consiste en reservar una parte de los escaños, por ejemplo entre el 5% y el 10% del total del Congreso, para una distribución que beneficie al partido vencedor, como puede ser mediante un reparto en proporción al cuadrado de los votos.

Puede hacerse de forma que si el partido más votado está muy destacado con respecto al siguiente recibirá la mayor parte de estos escaños finales, pero si hay dos o más partidos muy igualados en la parte alta, como ocurrió en la elección de 1996 con PP y PSOE, esos escaños los reciben casi por igual entre dichos partidos.

Con una pequeña reducción de los votos totales de los partidos, en la elección al Congreso, y la distribución de los escaños en dos etapas podemos conseguir el mismo efecto en la gobernabilidad y en la unidad de los grandes partidos que con el sistema electoral actual, pero además conseguimos una enorme mejora en la representatividad.

La Tabla recoge, en la columna 6, los resultados que los partidos políticos habrían obtenido en 2015. Se ha usado una reducción equivalente al 0,25% de los votos totales (por comodidad hemos reducido 62.000 en lugar de 62.339 votos), se han asignado usando D'Hondt 325 escaños a los partidos en proporción a sus votos reducidos, con lo cual el reparto de escaños es: PP 100, PSOE 76, C's 48, Podemos 43, En Común 12, UP-IU 12, ..., después se han asignado el total de los 350 escaños en proporción al cuadrado de los votos reducidos pero garantizando a cada partido como mínimo los escaños recibidos en el reparto anterior, con lo cual los 25 escaños que restaban por distribuir han correspondido todos al PP ya que el cuadrado de los votos del PP casi dobla al cuadrado de los votos del PSOE.

Evidentemente los parámetros usados para obtener el reparto anterior (reducción de 62.000 votos y distribuir 325 escaños en el primer reparto) son solo a modo de ejemplo. Sería la clase política quien estableciese sus valores.

El reparto que aparece en la columna sexta "E. Propuestos" es el que se habría obtenido en las elecciones de 2015 si hubiese prosperado – literalmente - la propuesta de reforma

electoral que rechazó el Congreso en octubre de 2014, y en el supuesto de que el comportamiento electoral hubiese sido el mismo con la nueva ley.

Tabla 4. Resultados con sistema electoral propuesto y con el actual en 2015

Partido	Votos	%Votos	Cuota	Vot. Reducidos	E. Propuestos	E. Actuales
PP	7.215.752	28,93	101,28	7.153.752	125	123
PSOE	5.530.779	22,18	77,63	5.468.779	76	90
C's	3.500.541	14,04	49,14	3.438.541	48	40
Podemos	3.182.082	12,76	44,66	3.120.082	43	42
En Común	927.940	3,72	13,02	865.940	12	12
UP-IU	923.133	3,70	12,96	861.133	12	2
Compromís	671.071	2,69	9,42	609.071	8	9
ERC	599.289	2,40	8,41	537.289	7	9
DiL	565.501	2,27	7,94	503.501	7	8
En Marea	408.370	1,64	5,73	346.370	4	6
PNV	301.585	1,21	4,23	239.585	3	6
Animalista	219.191	0,88	3,08	157.191	2	0
Bildu	218.467	0,88	3,07	156.467	2	2
UPyD	153.505	0,62	2,15	91.505	1	0
CC-PNC	81.750	0,33	1,15	19.750	0	1
Otros 41 p.	436.686	1,75	6,13	0	-	-
Totales	24.935.642	100,00	350,00		350	350

6. LA BIPROPORCIONALIDAD

Si por una parte, antes de celebrar las elecciones, se calcula el tamaño de las circunscripciones electorales de acuerdo con sus habitantes y por otra, tras celebrarse las elecciones, se calcula la representación de los partidos de acuerdo con sus votos totales, como hemos hecho en la tabla anterior (o con otro criterio), quedaría un problema pendiente: cómo distribuir los escaños que han correspondido a cada partido político entre las circunscripciones electorales, de forma que cada una de ellas reciba el número de escaños que se había establecido con anterioridad a las elecciones.

Es un problema que ha estado presente en México desde hace más de dos décadas donde 200 escaños de representación proporcional deben distribuirse entre cinco circunscripciones de tamaño 40 cada una.

El mismo problema se ha presentado en Italia en la última década donde la Constitución y la Ley Electoral determinan los escaños que debe recibir cada partido y cada circunscripción electoral.

En ambos casos los políticos han establecido métodos para distribuir los escaños de los partidos entre las circunscripciones, no sin ausencia de problemas e incluso viéndose obligados en ocasiones a establecer repartos que contradecían sus propias leyes.

Sin embargo se trata de un problema que está matemáticamente resuelto desde finales de los años 80 del siglo pasado aplicando un **reparto biproporcional** con la técnica desarrollada por Michel Balinski y Gabrielle Demange.

La biproporcionalidad está caracterizada por una serie de axiomas (exactitud, homogeneidad, monotonía, consistencia, Independencia de las Alternativas Irrelevantes y continuidad) que representan comportamientos razonables para la proporcionalidad entre matrices cuando existen restricciones para las sumas por filas y por columnas en la matriz de escaños.

La existencia de solución ha sido probada aplicando la teoría del punto fijo en \mathbb{R}^n para matrices positivas y la obtención de la solución (o soluciones cuando haya empates) puede hacerse, normalmente, mediante iteración funcional, aunque para conseguir convergencia a la solución en un número finito de etapas es preferible el algoritmo Tie and Transfer (empata y transfiere), que permite conocer el número de pasos para alcanzar la solución o soluciones.

En cualquier caso se trata de construir una matriz en la que cada fila contiene los votos de todos los partidos en una misma circunscripción electoral. Por tanto hay tantas filas como circunscripciones y tantas columnas como partidos que hayan obtenido escaños. Cada fila es necesario multiplicarla por un escalar y lo mismo hay que hacer con las columnas (doble proporcionalidad o biproporcionalidad). La dificultad consiste en la búsqueda de los escalares, porque hay que obtenerlos todos de forma simultánea, para que tras efectuar los productos y redondear las fracciones obtenidas a cantidades enteras, con el método de reparto proporcional que se haya elegido, la matriz de escaños que resulte debe sumar por filas los tamaños de las circunscripciones y por columnas los escaños que corresponden a cada partido.

¿Cómo calcular la solución o las soluciones? Salvo que el número de circunscripciones electorales sea muy pequeño, o el número de partidos sea solo dos o tres, realizar un reparto biproporcional con una calculadora simple resulta prácticamente inviable. En general se requiere usar un ordenador y un programa adecuado.

A continuación mostramos los resultados de las elecciones autonómicas en Castilla la Mancha en 2015 (redondeados los votos a cientos para mayor simplicidad), donde hemos respetado los tamaños que contempla su sistema electoral para las circunscripciones (última columna) y hemos asignado con el método D'Hondt los 33 escaños a los partidos en proporción a sus votos totales disminuidos en 15.000 (equivalente a un 1,5% del total), son los que aparecen en la última fila. Por tanto, los escaños de los partidos son diferentes de los obtenidos con sus sistema electoral (16-14-3-0), ya que con la biproporcionalidad se trata precisamente de conseguir una asignación razonable para los partidos políticos.

Tabla 5. Elecciones autonómicas en Castilla la Mancha en 2015

	PP	PSOE	PODEMOS	C'S	Escaños
TOLEDO	139.200	134.400	31.900	30.800	9
CIUDAD REAL	102.600	107.400	23.200	20.600	8
ALBACETE	78.100	72.000	24.000	20.700	6
CUENCA	49.200	44.600	9.300	7.800	5
GUADALAJARA	41.800	37.200	18.100	14.900	5
Escaños	14	14	3	2	33

Ahora es necesario distribuir los escaños de cada partido entre las circunscripciones. El algoritmo “Tie and Transfer”, que comentamos a continuación, es el más adecuado.

7. EL ALGORITMO TIE AND TRANSFER

Este algoritmo empieza por distribuir los escaños que corresponden a cada partido entre las circunscripciones electorales en proporción a sus votos en las mismas. Para ello se puede usar Sainte-Laguë porque es un método imparcial.

A continuación se contabilizan los escaños recibidos por cada circunscripción. Si no coinciden con los tamaños de las circunscripciones, entonces se aplica el algoritmo denominado “Tie and Transfer” (TT) que permite encontrar factores para aplicarlos a las filas de la matriz y encontrar la solución en un número finito de pasos. Para ello, supongamos que las r primeras circunscripciones han recibido exceso de escaños, las s siguientes han recibido tantos escaños como corresponde a sus tamaños y las restantes han recibido escaños de menos.

Entonces existe un escalar único, digamos k , tal que multiplicando por k las r primeras filas de la matriz de votos, las que correspondían a circunscripciones sobrerrepresentadas, no cambia la distribución de escaños de los partidos a las

circunscripciones pero se produce un empate entre una circunscripción sobrerrepresentada y una que no estaba sobrerrepresentada. A continuación si el empate ha sido con una circunscripción de las que estaba infrarrepresentada debemos resolver el empate a favor de esta circunscripción, con lo cual una de las circunscripciones sobrerrepresentadas ha disminuido su exceso de escaños en una unidad y una de las infrarrepresentadas ha disminuido su infrarrepresentación en una unidad.

¿Qué ocurre si la circunscripción ligada al empate con la sobrerrepresentada es una de las s cuya asignación era correcta? En este caso no se transfiere el escaño, pero queda pendiente de poder transferirse en futuros pasos. Se continúa calculando un nuevo factor k' , que existe y es único, por el que van a multiplicar todas las circunscripciones sobrerrepresentadas y también la que acaba de optar a un escaño por el empate anterior, para conseguir una nueva situación de empate y así transferir o no un escaño. Si procede transferirlo hay dos posibilidades: (1) que el escaño a transferir perteneciese a una circunscripción sobrerrepresentada en cuyo caso se hace directamente la transferencia y (2) que el escaño perteneciese a una circunscripción que estaba correctamente representada en cuyo caso se hace también dicha transferencia pero al mismo tiempo dicha circunscripción lo recupera de la otra con la que estaba empatada.

Ya nos imaginamos cómo continúa el algoritmo hasta que se transfieren tantos escaños como sean necesarios para que ninguna circunscripción quede sobrerrepresentada. También es imaginable la dificultad de programar el algoritmo para obtener el reparto biproportional.



Friedrich Pukelsheim, matemático y estadístico, nació en Solingen en 1948. Ha formado y dirigido un grupo de investigación en representación proporcional en la Universidad de Augsburgo.

Sin embargo, no nos debe preocupar la implementación de este algoritmo ya que está disponible un programa denominado BAZI elaborado por el grupo de investigación del Profesor Friedrich Pukelsheim de la Universidad de Augsburgo que es descargable y de uso libre.

En el ejemplo anterior el primer reparto con Sainte Laguë de los escaños de cada partido a las circunscripciones sería

Tabla 6. Distribución de los escaños de los partidos entre las 5 provincias

	PP	PSOE	PODEMOS	C'S	Escaños
TOLEDO	5	5	1	1	Mal
CIUDAD REAL	3	4	1	0	Bien
ALBACETE	3	2	1	1	Mal
CUENCA	2	2	0	0	Mal
GUADALAJARA	1	1	0	0	Mal
Escaños	14	14	3	2	33

Con lo cual Toledo habría recibido tres escaños de más, Albacete un escaño de más, Ciudad Real tendría una representación correcta, Cuenca un escaño de menos y Guadalajara tres escaños de menos. Existe un descuadre de cuatro escaños y por tanto el algoritmo TT alcanza el reparto biproporcional en cuatro pasos. Aplicando el BAZI tenemos la solución y los divisores de las filas y las columnas tal y como aparecen en la Tabla 7 junto a los partidos y a las circunscripciones.

Tabla 7. Reparto biproporcional en Castilla la Mancha en 2015

	PP/1	PSOE/0,95	PODEMOS/1,54	C'S/1,35	Escaños
TOLEDO/40.000	3	4	1	1	9
CIUDAD REAL/30.300	3	4	0	1	8
ALBACETE/31.000	3	2	1	0	6
CUENCA/19.000	3	2	0	0	5
GUADALAJARA/14.900	2	2	1	0	5
Escaños	14	14	3	2	33

Dado que el procedimiento para conseguir el reparto biproporcional es laborioso, ello suele ser motivo de rechazo por parte de la clase política, máxime si no se quiere cambiar de sistema electoral.

La certeza del resultado obtenido al hacer el reparto biproporcional no es cuestionable, tanto si se ha obtenido mediante iteración funcional o mediante TT, puesto que es posible comprobar con una calculadora elemental que la solución es correcta, ya que el propio programa BAZI, o el programa que haga cualquier otro programador nos da tanto la solución como los multiplicadores que ha usado para obtenerla y, por tanto, cualquiera puede usar esos multiplicadores con su calculadora y efectuar los redondeos con el método obtenido para comprobar que la solución es correcta. Por ejemplo dividiendo los 72.000 votos del PSOE en Albacete por 31.000 y también por 0,95, que son los divisores de Albacete y del PSOE, se obtiene $72.000/(31.000*0,95)=2,44$ que con Sainte-Laguë redondea a 2 escaños, como aparece en la tabla anterior.

Los factores para la biproporcionalidad no son únicos, pero todos ellos originan el mismo reparto. Por otra parte hemos de indicar que ningún método es perfecto; en el reparto biproporcional anterior podemos observar que en Toledo el PP recibiría un escaño más que el PSOE a pesar de tener menos votos y lo mismo le ocurre a Podemos con C's en Ciudad Real.

8. EL PODER

El poder de un partido, o de un estado en una unión de estados, es la proporción de veces en las que sus escaños hacen que una coalición no mayoritaria se convierta en mayoritaria cuando el partido se une a la coalición.

Así, si solo hay tres partidos que han recibido escaños en un parlamento y ninguno de ellos ha conseguido la mayoría absoluta entonces los tres tienen el mismo poder, sea cual sea su relación de escaños. Por el contrario, el poder de un partido será nulo si al unirse a cualquier coalición no mayoritaria esta sigue sin ser mayoritaria.

Por ejemplo, si en un parlamento de 101 escaños tres partidos han conseguido 50-50-1 escaños los tres partidos tienen igual poder; mientras que si fueron cuatro los partidos con representación y los escaños obtenidos hubiesen sido 45-43-8-4, los tres primeros partidos tienen el mismo poder pero el cuarto no tiene ningún poder.

El poder tiene gran interés en la Unión Europea. Conseguir que todos los ciudadanos tengan el mismo poder es prácticamente imposible. No obstante, la teoría desarrollada al respecto muestra que cuando se persigue el máximo equilibrio para el poder del voto de los ciudadanos, el reparto para los tamaños de las circunscripciones debiera ser en proporción a la raíz cuadrada de la población, como se recoge en el Jagiellonian Compromise en la propuesta desde el campo científico que se hizo para distribuir los puestos de la Comisión en la Unión Europea.

En el caso del Congreso de los Diputados de España no me consta que jamás los miembros de una circunscripción plurinominal pertenecientes a diferentes partidos políticos se hayan puesto de acuerdo para votar alguna propuesta que afecte a su provincia, enfrentándose a compañeros de partido de otras provincias. Pero en el Parlamento Europeo los MEPs votan de formas muy diferentes y, a veces, se ven obligados a anteponer los intereses de su país frente a los de su grupo parlamentario.

9. LA PROPORCIONALIDAD DECRECIENTE. LA REPRESENTACIÓN EN EL PARLAMENTO EUROPEO

El Parlamento Europeo tuvo en su inicio pocas competencias; prácticamente legislaba sobre lo que se le indicaba desde la Comisión y ni siquiera elegía a su Presidente, porque de eso también se encargaba la Comisión. La composición del Parlamento, es decir la distribución de sus miembros (MEPs por Members of the European Parliament) entre los estados, se ha alcanzado hasta la actualidad mediante negociaciones y acuerdos, aunque siempre los países menos poblados han estado sobrerrepresentados con respecto a su proporción de habitantes y los más poblados han estado infrarrepresentados.

Recientemente las competencias del Parlamento Europeo han aumentado, tanto las de tipo presupuestario y legislativo como algunas de carácter democrático, entre ellas la elección del Presidente. Pero queda mucho por avanzar. Por ejemplo, no existe un sistema electoral unificado para la elección de sus miembros. Peor aún, ni siquiera se ha establecido un método para determinar el número de MEPs que corresponden a cada país. Solamente existen ciertas limitaciones establecidas en el Tratado de Lisboa en 2009.

El Tratado de Lisboa establece que:

- El Parlamento Europeo no tendrá más de 751 escaños.
- Ningún país tendrá menos de 6 escaños ni más de 96.
- La asignación de los escaños a los estados se hará con proporcionalidad decreciente con la población.

Aunque no exista una justificación para las limitaciones mínima y máxima, 6 y 96, hemos de indicar que desde un punto de vista técnico son bien fáciles de incorporar al establecer un método de reparto. Sin embargo la proporcionalidad decreciente, que apareció por primera vez en el proyecto de Constitución Europea de 2004, empezó siendo definida de una manera muy vaga, limitándose a indicar que los países más poblados recibirían menos escaños de los que corresponden en proporción a su población y los menos poblados recibirían más escaños de los que corresponden a su cuota poblacional; eso sí, un país con menos población que otro no puede recibir más escaños.

En la Conferencia de Lisboa, se ahondó algo en la definición de proporcionalidad decreciente al indicar, como sugería el Report de los MEPs A. Lamassoure y A. Severin, que el cociente entre la población de un país y el número de escaños asignados debía ser mayor a medida que el país es más poblado. El número de habitantes alemanes por cada MEP alemán será mayor que la misma relación para cualquier otro país, puesto que Alemania es el país más poblado de la UE. Lo contrario debe ocurrir con Malta, que es el menos poblado de los 28 estados actuales.

Aun así, la definición de proporcionalidad decreciente continúa siendo muy vaga. Por ejemplo, si asignamos 25 escaños a cada uno de los 28 estados actuales de la UE se cumplen todos los requisitos establecidos en Lisboa, a pesar de que Malta y Alemania tendrían los mismos escaños. Además existe una gran cantidad de soluciones factibles.

Periodo tras periodo la representación de los estados en la UE se ha hecho mediante negociaciones y acuerdos. Los acuerdos cada vez están más alejados de un consenso unánime y de hecho el alcanzado para el periodo 2014-2019, a propuesta de los MEPs Roberto Gualtieri y Rafal Trzaskowski, tuvo bastantes votos en contra.



Andrew Duff nacido en 1950 en Birkenhead, Reino Unido, MEPs Demócrata Liberal por el Este de Inglaterra. Impulsó desde la Comisión Constitucional del Parlamento Europeo la búsqueda de una fórmula matemática para distribuir los 751 escaños entre los 28 estados.

La búsqueda de un método para distribuir los escaños del PE entre los estados de la UE ha sido objeto de estudio en la última década por parte de muchos investigadores en sistemas electorales, incluido quien les habla, pero aún no se ha encontrado una respuesta que satisfaga a una gran mayoría de estados, para que pueda ser aprobada.

El intento institucional más importante partió del eurodiputado Andrew Duff de la Comisión Constitucional (AFCO), quien en 2010 encargó al profesor Geoffrey

Grimmett de la Universidad de Cambridge coordinar a un reducido grupo de investigadores europeos para consensuar un método de reparto.

La respuesta alcanzada es conocida como Compromiso de Cambridge y presenta una fórmula clara, simple y duradera para efectuar dicho reparto. Parte de las indicaciones recogidas en el Report Compromiso de Cambridge han sido usadas ya para la distribución de escaños del actual periodo legislativo, pero no así la fórmula de reparto.

Tampoco ha sido adoptado ningún otro método de reparto a pesar de que han sido muchos los propuestos, algunos de ellos incluidos en un número especial que dedicó la revista Mathematical Social Science, el nº 63 de 2013.

La dificultad de que un método sea aceptado creo que radica en varios hechos fundamentales:

- En primer lugar la ambigüedad del término proporcionalidad decreciente que da lugar a que la satisfagan distribuciones de escaños que son muy diferentes.
- En segundo lugar, el punto de partida. Los resultados de las negociaciones en el pasado difieren, para varios países, bastante de los resultados que hubiesen dado las fórmulas que se proponen. Siempre resulta muy difícil cambiar un sistema electoral, porque se parte de una relación de fuerzas que cambiaría con el nuevo sistema y, por tanto, unos perderían con ese cambio. En el caso del PE no se trata de cambiar un sistema electoral sino de establecer un sistema electoral porque no existe aún; pero la dificultad es la misma que si se tratase de cambiar un sistema electoral porque se parte de un reparto existente entre los 28 estados y nadie quiere perder. Así pues para determinar la composición para las elecciones de 2014 la propuesta que aceptaron establecía como principio que ningún país perdería más de un escaño en relación con su asignación previa. Que algunos países perdiesen escaños era inevitable porque había que pasar de 766 escaños, con los que finalizó el periodo 2009-2014, a 751 que establece el Tratado de Lisboa.
- En tercer lugar, algunos grandes países están infrarrepresentados frente a Alemania. Por ejemplo, España tiene un coste de habitantes por escaño no solo superior al de Italia sino también al de Alemania con lo cual requiere un aumento de varios diputados o si no Alemania debe disminuir a menos de 96 escaños.

Casi todos los trabajos científicos coinciden en un aumento importante de escaños para España y también para Francia y Reino Unido. Ello supone que un gran número de países debe disminuir su representación. Los países que más reducen su representación, los de poblaciones intermedias, rechazan las fórmulas que se presentan.

En cualquier caso el problema continúa pendiente de ser resuelto y, desde mi punto de vista, es uno de los más adecuados para tener en cuenta un equilibrio entre la representación proporcional y el poder de los ciudadanos de la UE.

Los eurodiputados votarán de formas muy diferentes en el PE. En ocasiones tendrán cierta unión en votar a favor de políticas que benefician a su país de procedencia, otras veces votarán por afinidad ideológica, otras veces no se dará ninguna de esas motivaciones.

Esta mezcla de comportamientos debiera llevarnos a proponer como método de reparto una combinación de proporcionalidad con respecto al número de habitantes y con respecto a la raíz cuadrada del número de habitantes.

Al establecer la combinación entre esas dos cantidades quedaría un parámetro por determinar cuyo valor debiera ser una decisión política en función de que se deseara un mayor o menor grado de degresividad, es decir, el grado de decrecimiento en la proporcionalidad del reparto.

Concretamente, una vez que se ha establecido el grado r de degresividad, la representación para el estado i , con población p_i debiera ser proporcional a su cuota ajustada q_i :

$$q_i = 751 \left(r \frac{\sqrt{p_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i}} + (1-r) \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right).$$

Por ejemplo $r = 0,5$ conduce al reparto que aparece en la columna sexta de la Tabla 8.

En la Tabla 8 también aparecen las distribuciones que se habrían obtenido con otros tres métodos recogidos en la literatura sobre este tema: Compromiso de Cambridge, Parabólico, Potencial (CC, Pa y Po respectivamente) y, en la última columna, la distribución aprobada para el periodo 2014-2019.

Tabla 8. Diferentes repartos de los escaños del Parlamento Europeo para 2014-2019.

País	Población	CC	Pa	Po	$r=0,5$	Actual
Alemania	81.843.743	96	96	96	93	96
Francia	65.397.912	83	80	79	77	74
Reino Unido	62.989.550	80	78	76	75	73
Italia	60.820.764	78	75	74	73	72
España	46.196.276	60	60	59	59	54
Polonia	38.538.447	51	51	50	51	51
Rumanía	21.355.849	31	32	32	33	33
Holanda	16.730.348	25	26	26	28	26
Grecia	11.290.935	19	20	20	21	21
Bélgica	11.041.266	19	19	20	21	21
Portugal	10.541.840	18	19	19	20	21
Rep. Checa	10.505.445	18	19	19	20	21
Hungría	9.957.731	17	18	18	19	21
Suecia	9.482.855	17	17	18	19	20
Austria	8.443.018	16	16	16	17	19
Bulgaria	7.327.224	14	15	15	16	17
Dinamarca	5.580.516	12	13	13	13	13
Eslovaquia	5.404.322	12	12	13	13	13
Finlandia	5.401.267	12	12	13	13	13
Irlanda	4.582.769	11	11	12	12	12
Croacia	4.398.150	11	11	11	11	12
Lituania	3.007.758	9	9	10	9	12
Eslovenia	2.055.496	8	8	8	7	8
Latvia	2.041.763	8	8	8	7	8
Estonia	1.339.662	7	7	7	6	6
Chipre	862.011	7	7	7	6	6
Luxemburgo	524.853	6	6	6	6	6
Malta	416.110	6	6	6	6	6
Total	508.077.880	751	751	751	751	751

Nota: la gran mayoría de las propuestas elaboradas asignan a España 59 o 60 escaños.

Curiosamente, el reparto con $r = 0,5$ es el más próximo al reparto actual para 23 de los 28 estados, mientras que los repartos Compromiso de Cambridge, Parabólico y Potencial lo son para 8, 9 y 13 estados respectivamente.

Posiblemente los políticos tuviesen en su mente una idea cercana a la representación proporcional combinada con poder proporcional al negociar los repartos en el pasado.

10. REFLEXIONES FINALES

Normalmente, los avances de la Ciencia los aplica de inmediato la Técnica para que lleguen a la Sociedad lo antes posible. Sin embargo, eso no ocurre con los avances que afectan a las elecciones democráticas.

Los políticos no muestran interés en hacer reformas electorales para incorporar en ellas los avances científicos. Más aún, cuando un partido pretende hacer una reforma electoral, porque tiene apoyos para llevarla a cabo, no se preocupa por conocer las posibilidades que la ciencia ofrece sino, más bien, busca argumentos para esquivarlas y así poder justificar unas reglas que le sean más favorables. Los políticos, a veces, inventan fórmulas que resultan inaplicables ante una determinada distribución de votos, como ocurre con las leyes electorales de México posteriores a 1996 o en la de Italia de 2005, otras veces las fórmulas que proponen permiten comportamientos absurdos, como no obtener un escaño por haber recibido demasiados votos; eso ocurrió en Alemania a principios de este siglo y podría ocurrir en España en unas elecciones municipales si se aprueba la propuesta presentada por el gobierno en julio de 2015.

Si bien el método más interesante de reparto proporcional a los partidos políticos, es decir D'Hondt, fue inventado a finales del siglo XVIII y el de Sainte-Laguë a principios del siglo XIX, ambos usados para distribuir los escaños de la Cámara de representantes en EEUU entre los estados de la Unión, muchas de sus propiedades y caracterizaciones se han probado en las últimas décadas. Pero el avance más importante en la representación proporcional, tras aquellos primeros métodos, ha sido bastante reciente mediante los métodos de divisores desarrollados por M. Balinski y H. P. Young y más aún cuando surgió la biproporcionalidad a finales de los años 80 del siglo pasado, de manos de Michel Balinski y Gabrielle Demange.

Como hemos indicado en este discurso, la biproporcionalidad permite compatibilizar una representación razonable a los partidos con unos tamaños preestablecidos para las circunscripciones electorales.

Por ejemplo, México tiene 5 circunscripciones de 40 escaños (además de 300 distritos uninominales) e Italia tiene 28 circunscripciones electorales. Sus legislaciones electorales incluyen esa doble restricción en la que se indica tanto el tamaño de las circunscripciones como el método para calcular el número de escaños de cada partido de acuerdo con sus votos totales. Los políticos, en ambos casos, fallaron al describir el

procedimiento para distribuir los escaños de los partidos entre las circunscripciones. En ambos países se han producido repartos que contradicen a sus leyes electorales. Es curioso que, siendo tales fallos objeto de crítica, no hayan establecido el método biproporcional a pesar de que la biproporcionalidad es conocida por ellos y, de hecho, se aplica desde 2006 para distribuir los escaños del cantón suizo de Zurich y en algunos otros cantones suizos a partir de 2008.

Existe una gran resistencia por parte de políticos de muchos países a establecer la biproporcionalidad, argumentando que no pueden hacer los cálculos del reparto de forma elemental sino que requiere usar un ordenador y un programa para resolverlo, a pesar de que eso puede hacerlo cualquier persona con conocimientos de programación, o bien cualquiera que lo desee puede usar el BAZI que es gratuito y descargable libremente.

El sistema electoral es una de las piezas fundamentales del sistema democrático. Sin embargo son muchos más aspectos, más allá del sistema electoral, los que influyen en la representación efectiva de los ciudadanos y, por tanto, no debemos pensar que basta con modificar el sistema electoral para garantizar una buena representatividad y un buen funcionamiento de las instituciones.

Por ejemplo, ¿cómo llegan los partidos a obtener los votos en unas elecciones? Es decir, ¿en base a qué votan los electores por un partido u otro? Lógicamente lo harán en función de la información recibida y de la ideología que cada uno tenga. La información que reciben los electores depende de la actuación de muchos medios de comunicación y de las campañas de marketing desarrolladas por los propios partidos políticos. Esta información no suele ser ni objetiva ni rigurosa. Los partidos tienen como objetivo maximizar el número de votos. De tal forma que el éxito de un partido no depende tanto de la valía de sus candidatos ni de presentar las propuestas óptimas a los problemas de la sociedad sino más bien de conseguir un líder carismático capaz de transmitir ilusión a los ciudadanos, aunque las soluciones que propongan no sean factibles. Esto debería transmitirnos inseguridad y preocupación.

Por ello, el marketing electoral, los fondos económicos de que dispone cada partido para llevarlo a cabo y el papel de los medios de comunicación, están demostrando ser muy eficaces a la hora de conseguir representantes.

Ahora bien, esa misma posible eficacia en la búsqueda del voto a través de falsas expectativas está minando la confianza de los ciudadanos en la democracia y creando una situación de apatía, por la creencia de que los políticos no van a resolverles los problemas sino que intentan mantener o mejorar sus propias posiciones.

En este sentido hemos de indicar que posiblemente, en algunos aspectos, la democracia haya avanzado poco desde su inicio en la Grecia ateniense en el siglo V a. C. (el siglo de Pericles). Si bien el voto ahora es universal y ha habido grandes avances en la paridad de género, también es cierto que las posibilidades de manipular la información son mucho mayores que antaño. Los parlamentos aprueban presupuestos que gestionan los gobiernos correspondientes; son cantidades de dinero que superan a las que gestionan las mayores empresas del país.

A cualquier empresa, uno de los asuntos que más le importa es la selección de personal, pues desea contar con las personas mejor cualificadas para cada puesto. Para seleccionar a sus representantes la democracia dispone de la Ley Electoral y de la Ley de Partidos Políticos. Ambas establecen limitaciones en la participación y métodos de elección que, junto con una información escasa en unas ocasiones y sesgada o incluso falsa en otras, hace que no se tenga garantía de que los electores puedan elegir a los mejores candidatos, ni siquiera que los mejor preparados puedan llegar a ser candidatos. Un hecho que debilita enormemente a la propia democracia.

En los partidos políticos, más que debate interno sobre los problemas que afectan a los ciudadanos, existe sumisión a la dirección y defensa incondicional a las propuestas que emanan de ella. La elección de un cabeza de partido, a cada nivel, cuando se hace mediante un proceso de participación de todos los militantes afectados, va precedida de barreras muy difíciles de salvar por un militante que no provenga de la cúpula del partido o tenga su apoyo; hasta el punto de que, a veces, para unas elecciones primarias solo un candidato consigue los avales estipulados.

Los nuevos partidos también tienen unas enormes barreras para entrar en el parlamento. Les obliga a recoger gran cantidad de firmas para poder presentarse. Después el sistema electoral actual les trata de forma desigual al asignar los escaños, dependiendo de que hayan recibido los votos concentrados en pocas circunscripciones o dispersos por todo el país.

El trato desigual a los partidos se extiende a través de la Ley Electoral en muchos más aspectos, como son por ejemplo la participación en los medios de comunicación y la financiación. El acceso a los medios de comunicación puede negarse por no haber tenido representación en el periodo previo, y las ayudas se niegan o devalúan porque el sistema electoral le otorgó pocos representantes en proporción con sus votos. Así, una injusticia en la representación lleva a la otra en la financiación.

Algunos parlamentos han aprobado que los ciudadanos puedan presentar ILP (iniciativas de legislación popular). Aparentemente es un avance democrático importante, pero la realidad es bien distinta, pues son muy pocas las ILP que no se rechazan de primeras, incluso cuando la propuesta que contienen estuviese contemplada en el programa de gobierno del partido o coalición que la ha rechazado.

No podemos decir que exista una democracia perfecta, es más, estoy seguro de que en España, y posiblemente en muchos más países, la democracia vigente tiene debilidades importantes, que deberían corregirse.

Científicamente existen métodos de elección social que, mediante una sola votación transparente y fácil, permiten elegir un vencedor tanto si se enfrentan solo dos candidatos como si lo hacen doscientos. Por ejemplo, hay un método para hacerlo denominado Majority Judgment, desarrollado por M. Balinski y R. Laraki, que verifica propiedades tan deseables como la de ser monótono, unánime e independiente de las alternativas irrelevantes, pero no se usa, y actualmente en España conseguir elegir el/la Presidente/a de una Comunidad Autónoma o del Gobierno central puede llevar varios meses de votaciones en el correspondiente parlamento, incluso puede ocurrir que tengan que convocarse unas nuevas elecciones porque no se ha alcanzado un acuerdo. La forma más simple de Majority Judgment es la votación aprobatoria defendida por el politólogo Steven Brams, que consiste en aprobar o no a cada uno de los candidatos presentados y el candidato con mayor número de aprobados resulta elegido. Por tanto, la elección de Presidente de Gobierno puede conseguirse de inmediato una vez se ha constituido el parlamento.

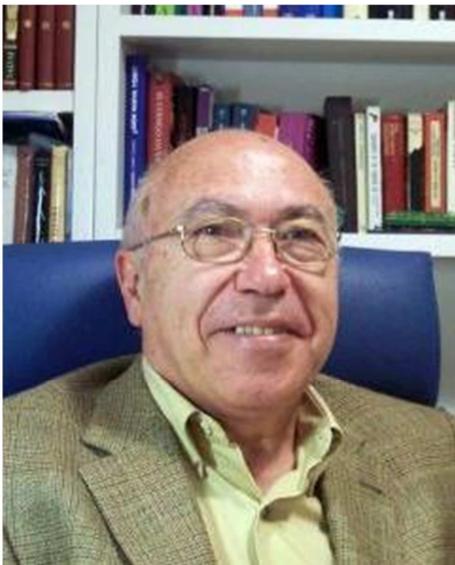
Ciencia y Tecnología (fundamentalmente la de tipo informático en este caso) permiten actualmente que la sociedad pueda debatir mejor sobre sus problemas, garantizar una mayor representatividad y gobernabilidad en el parlamento, y que los representantes elegidos se encuentren entre los más capacitados para desempeñar el puesto que van a

ocupar, pero las leyes electorales no las elabora la sociedad y quienes lo hacen quizás tengan otras prioridades.

Ante ello, los científicos quizás no podremos conseguir cambiar esas reglas pero no se nos puede impedir que hagamos un análisis riguroso de las mismas, una crítica a su comportamiento y que mostremos alternativas mejores, caso de que existan.

Agradecimientos y reconocimientos.

Por último, quiero mostrar mi agradecimiento a todos los profesores que he tenido desde la infancia hasta completar la carrera universitaria. En la primera etapa, durante los estudios primarios y bachiller, consiguieron inculcar en mí el interés por las matemáticas; después en la etapa universitaria reconozco el gran esfuerzo que hicieron los profesores de todos los departamentos, pues a pesar de la escasez de medios disponibles en aquella época, fueron capaces de realizar una docencia de calidad y hacer que me sintiese muy satisfecho con todas las asignaturas. Asimismo quiero mostrar mi agradecimiento:



Mariano Gasca nació en Zaragoza en 1943 y fue Catedrático de Análisis Numérico en la Universidad de Granada entre 1977 y 1982.

- a mi director de tesis, Dr. Mariano Gasca González, quien sembró en mí el interés por la investigación tanto básica como aplicada. También le agradezco que posteriormente haya contribuido a divulgar resultados sobre sistemas electorales obtenidos por mi grupo de investigación.

- al Departamento de Derecho Político de la Universidad de Granada que, en los años 80, me facilitó bibliografía sobre fórmulas electorales.
- a todos aquellos miembros del Departamento de Matemática Aplicada que con su lectura y sugerencias sobre mis trabajos en este campo han contribuido a una mejora de los mismos.
- al grupo de investigación en métodos electorales (GIME) que ha permitido elaborar buen número de trabajos en sistemas electorales. De forma especial, a los profesores Antonio Palomares Bautista, José A. Martínez Aroza y Miguel A. Fortes Escalona, por la revisión detallada que han hecho de este discurso, contribuyendo con ella a una mejor presentación.
- Al profesor Antonio Cañada Villar que ha sido el Académico Numerario encargado de contestar a este discurso.
- un agradecimiento especial a mi esposa y a mis hijas e hijo, quienes han colaborado en muchas ocasiones revisando trabajos o recopilando datos electorales, incluso debatiendo conmigo algún resultado, en su tiempo de ocio.

Por último quiero expresar mi más sincero reconocimiento a todos los científicos que en las últimas décadas han contribuido al desarrollo de los métodos electorales relacionados con la nuestra línea de investigación.

En especial a Michel Balinski por la investigación desarrollada en la representación proporcional (con los métodos de divisores), biproporcional y en elección social.



*De izquierda a derecha: **Michel Balinski** (1933), **Friedrich Pukelsheim** (1948), **Steven Brams** (1940), organizadores del *Whorkshop Analysis and Design of Electoral Systems en Oberwolfach en 2004.**

También a Friedrich Pukelsheim, que aparte de ser otro gran especialista en sistemas electorales, ha contribuido a facilitar la aplicación y difusión de la biproporcionalidad con el desarrollo del BAZI, programa que permite de forma libre y gratuita hacer tales repartos, evitando así la complejidad de programar ese reparto.

Y Steven Brams por sus aportaciones desde el campo de la Ciencia Política.

Los libros de ellos tres (Fair Representation, Proportional Representation y Approval Voting) y la bibliografía que citamos a continuación, son lectura recomendada para quienes deseen profundizar en los métodos de reparto proporcional y en los restantes métodos de elección social. Por otra parte, el libro publicado por mi grupo de investigación a través de la editorial de la Universidad de Granada puede ser clarificador para quién esté interesado en la reforma del sistema electoral del Congreso de los Diputados.

Bibliografía

- Arrow, K., (1963). *Social Choice and individual Values*. Wiley, New York.
- Bacharach, M., (1970). *Biproportional Matrices and Input-Output Change*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Balinski, M. L. and Young, H.P., (1978). Stability Coalitions and Schism in Proportional Representation Systems. *American Political Science Rev.*, 72, 3, pp- 848-858.
- Balinski, M. L. and Young, H.P., (1982). *Fair representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. New Haven, CT. Yale University.
- Balinski, M. L. and Demange G. (1989a). Algorithms for Proportional Matrices in Reals and Integers. *Mathematical Programming, Series A, Springer*, 45 (1-3), pp. 193-210.
- Balinski, M. L. and Demange G. (1989b). An Axiomatic Approach to Proportionality between Matrices. *Mathematics of Operations Research*, 14 (4), pp. 700-719.
- Balinski, M. L. and Ramírez, V., (1996). A case study of electoral manipulation: The Mexican Laws of 1989 and 1994, *Electoral Studies*, 15, pp. 2030-217.
- Balinski, M. L. and Laraki, R. (2010). *Majority Judgment*. The MIT Press. Massachusetts Institute of Technology.
- Balinski, M. L. and Ramírez, V., (2014). Parametrics vs. divisor methods of apportionment. *Annals of Operations Research*, Vol. 15, pp. 39-48.
- Barberá, S. and Jackson, M. O., (2006). On the Weights of Nations: Assigning Voting Weights in a Heterogeneous Union. *Journal of Polit. Econ.* 114(2): 317 – 339.
- Beisbart, C. and Luc Bovens, (2007). Welfarist Evaluations of Decision Rules for Boards of Representatives. *Social Choice and Welfare* 29: 581 – 608.

- Bilbao, J. M., (1994). Ley Electoral y Sistema de Partidos en España, *Revista de Estudios Políticos* 85, pp. 313-321.
- Brams, S. and P. C. Fishburn (1983). *Approval Voting*, Birkhäuser.
- Brighthouse, H. and Fleurbaey, M. (2010). Democracy and Proportionality. *Journal of Philosophy*, 137-155.
- Cichocki, M. A. and Życzkowski, K. (eds) (2010). *Design and Voting Power in the European Union*. Farnham: Ashgate Publishing Limited.
- D'Hondt, V., *La représentation proportionnelle des partis par un électeur*, Gante, 1878. *Système pratique et raisonné de représentation proportionnelle*, Bruselas, 1882. *Exposé du système pratique de représentation proportionnelle*, Gante, 1885.
- Diamond, L. and Plattner M. F. (2006). *Electoral Systems and democracy*. The John Hopkins University Press. Baltimore.
- Eur-lex (2009). Consolidated versions of the Treaty on European Union and the Treaty on the Functioning of the European Union (Treaty of Lisbon). *Official Journal of the European Union*. C306:1-388, 2007. Available at: http://europa.eu/lisbon_treaty/full_text/index_en.htm (accessed).
- European Parliament (2007). European Parliament resolution of 11 October 2007 on the composition of the European Parliament (2007/2169(INI)).
- Farrell, D. M. (2011). *Electoral Systems. A Comparative introduction*. Palgrave Macmillan.
- Grimmett, G. R., Laslier, J.F., Pukelsheim, F., Ramírez-González, V., Rose, R., Slomczynski, W., Zachariassen, M. and Życzkowski, K. (2011) The allocation between the EU Member States of the seats in the European Parliament – Cambridge Compromise. *European Parliament Studies*, PE 432.760.
- García-Lapresta, J.L., Llamazares, B., Martínez-Panero, M. (2010). A Social Choice analysis of the Borda rule in a general linguistic framework. *International Journal of Computational Intelligent Systems*. 3, pp. 501-513, 2010.
- Grimmett, G. R., Oelbermann, K. F. and Pukelsheim, F. (2012). A power-weighted variant of the EU27 Cambridge Compromise. *Mathematical Social Sciences* 63: 136-140.
- Gualtieri, R. and Trzaskowski, R., (2013). Report on the composition of the European Parliament with view to the 2014 elections. *Committee on Constitutional Affairs* (2012/2309(INI)).
- Hosli, M. O. and Machover, M., (2004). The Nice Treaty and Voting Rules in the Council: A Reply to Moberg. *Journal of Common Market Studies* 42(3): 497–521.

- Lamassoure, A. and Severin, A. (2007). A proposal to amend the Treaty provisions concerning the composition of the European Parliament. Brussels: *Draft Explanatory statement, 31 August 2007*.
- Lari I. Ricca, F. and Scozzari A. (2014). Bidimensional allocation of seats via zero-one matrices with given line sums. *Annals of Operations Research*, Vol. 15, pp. 165-181.
- Lari I. Ricca, F. and Pukelsheim, F. (2014). Mathematical modeling of electoral systems: analysis, evaluation, optimization. In memory of Bruno Simeone (1945-2010). *Annals of Operations Research*, Vol. 15, pp. 1-14.
- Laslier, J. F. (ed) (2012) Special Issue around the Cambridge Compromise: Apportionment in Theory and Practice. Elsevier, (*Mathematical Social Science*, 63).
- Laslier, J. F. (2012). “Why Not Proportional?” *Mathematical Social Sciences*. 63: 90 – 93.
- Lijphart, A., (1995). *Sistemas electorales y sistemas de partidos. Un estudio de 25 democracias*. Madrid: Centro de Estudios Constitucionales.
- Márquez, M. L. and Ramírez, V., (1998). The Spanish Electoral System. Proportionality and Governability. *Annals of Operations Research*, Vol. 68, pp. 45-59.
- Martínez-Aroza, J. A. and Ramírez-González, V. (2008). *Several methods for degressively proportional allotments. A case study*. Mathematical and Computer Modelling, Vol 48, 9-10, pp. 1439-1445.
- McElroy, G. (2006). Committee representation in the European Parliament. *European Union Politics* 7(1): 5–29.
- Montero, J. R., Gunther, R. , (1994). Sistemas ‘cerrados’ y listas ‘abiertas’: sobre algunas propuestas de reforma del sistema electoral en España, en *La Reforma del Régimen Electoral*, Centro de Estudios Constitucionales.
- Palomares, A. and Ramírez, V., (2003). Thresholds of the divisor methods. *Numerical Algorithms*. Vol 34, pp. 405-415.
- Pennisi, A. (2006). The Italian Bug. A Flawed Procedure for biproportional Allocation. In Simeone and Pukelsheim, ed. *Mathematics and democracy. Recent Advances in Voting Systems and Collective Choice*. Springer, pp. 151-166.
- Penrose Lionel, S., (1946). The Elementary Statistics of Majority Voting. *J. Royal Statis. Soc.* 109:53 – 57.
- Pukelsheim, F., Ramírez, V., Palomares, A. and Martínez-Aroza, J. A. (2008). *The biproportional methods applied to the Spanish Congress*. Mathematical and Computer Modelling48, pp. 1461-1467.

- Pukelsheim, F. (2014). Biproportional scaling of matrices and the iterative proportional fitting procedure. *Annals of Operations Research*, Vol. 15, pp. 269-283.
- Pukelsheim, F. (2014). *Proportional Representation. Apportionment Methods and Their Applications*. Springer.
- Rae, D. (1967). *The Political Consequences of Electoral Laws*. New Haven, Conn.: Yale University Press.
- Rae, D. and Ramírez, V. (1993). *El sistema electoral español. Quince años de experiencia*. McGraw-Hill.
- Ramírez, V., Palomares, A. and Márquez, M. L. (2006). Degressively proportional methods for the allotment of the European Parliament seats amongst the EU member States. *Mathematics and Democracy*, pp. 205-220. Berlin: Springer.
- Ramírez, V., Palomares, A., López, A., Fortes, M. A., González, P., Ramírez, C., Martínez, J. A., Márquez, M. L., Pasadas, M. y Delgado, B. (2013). *Sistema Electoral para el Congreso de los Diputados. Propuesta para un Parlamento más ecuánime, representativo y gobernable*. Granada, Editorial de la Universidad de Granada.
- Ramírez, V. (2012). Seats distribution in the European Parliament according to the Treaty of Lisbon. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 63, pp. 130-135.
- Ramírez V., Delgado, B., Palomares, A. and López A. (2014). Evaluation and possible improvements of the Swedish electoral system. *Annals of Operations Research*, Vol. 15, pp. 285-307.
- Saari, D. (1994). *Geometry of voting*, Springer.
- Slomczyński, W. and Życzkowski, k. (2010). Jagiellonian Compromise: an alternative voting system for the Council of the European Union, in *Cichocki MA and Życzkowski K (eds) (2010) Design and Voting Power in the European Union*. Farnham: Ashgate Publishing Limited, pp. 43-57.
- Shugart, M. S. and Wattenberg, M. P. eds., (2001). *Mixed-Member Electoral Systems. The best of both Worlds?* Oxford University Press.
- Taagepera, R., and Shugart, M. S., (1989). *Seats and Votes*. Yale University press.
- Taylor, A. and Pacelli A. (2008), *Mathematics and Politics*, Springer.

**CONTESTACIÓN DEL
ILMO. SR. D. ANTONIO CAÑADA VILLAR**

**Excmo. Sr. Presidente
Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos
Queridos familiares y amigos del nuevo Académico Numerario,
Sras. y Sres.**

En primer lugar quiero expresar mi satisfacción y profundo agradecimiento a nuestra Academia, por el honor que me ha concedido, al permitirme contestar al discurso pronunciado por el Ilmo. Sr. D. Victoriano Ramírez González, mi querido amigo, colega y, compañero, con quien he compartido innumerables momentos de trabajo y amistad, siendo ésta última una función estrictamente creciente en el tiempo.

Victoriano nació en 1953 en Alcalá la Real, provincia de Jaén y de allí sólo pueden venir personas y cosas buenas (¡no sólo de aceituna y aceite de oliva vive el hombre!). Es el penúltimo de nueve hermanos y se crió en una aldea próxima, Fuente Álamo, un sitio idílico en el aspecto de la tranquilidad. Allí fue donde un maestro joven y vivaz, D. José Oria, supo ver en él la facilidad con la que se desenvolvía con los números naturales, concretamente con el 333.333.333, transmitiéndole a sus padres lo que él pensaba sobre las capacidades numéricas de Victoriano. Entonces sus padres lo llevaron a estudiar a Alcalá la Real, donde durante el bachillerato obtuvo las máximas calificaciones, e incluso, participó

en el programa "cesta y puntos" (¡un clásico de los programas culturales serios!), como pivot del equipo de Alcalá la Real.

Cuando terminó el curso selectivo (¡en aquella época se seleccionaba a los alumnos y no pasaba nada!), ya en la Universidad de Granada, dejó que la suerte decidiera su futuro, echando una moneda al aire para ver si elegía Física o Matemáticas. Salió Física, pero por el motivo que fuese, la implantación de la carrera de Física se retrasó un año, así que decidió estudiar Matemáticas. ¡Te aseguro que acertaste!

Victoriano acabó sus estudios de Licenciatura en Ciencias Matemáticas en 1977 y se doctoró en 1980, con una tesis doctoral titulada "Interpolación de Hermite en varias variables".



¡No creo que sea muy difícil encontrar a Victoriano en esta foto de la escuela de Fuente Álamo!

Creo que lo conocí hace poco, allá por 1977, cuando yo era aún estudiante, aunque "punto adherente" del extinto Departamento de Ecuaciones Funcionales (¡hay nombres para todo y me refiero al nombre del Departamento y no a lo de "punto adherente", concepto que

manejamos los matemáticos con asiduidad!). Desde entonces vimos que había "muy buena química entre nosotros".

Cuando echo la vista atrás recuerdo aquellos años de finales de los 70 y principios de los 80, donde numerosas circunstancias académicas y políticas hicieron nacer y crecer en nosotros muchas ilusiones, tanto en el aspecto humano como profesional, la mayoría de las cuales el tiempo se ha encargado de materializar. Entonces nos encontrábamos y nos preguntábamos: ¿cómo va la tesis doctoral? ¿crees que crearán plazas fijas? ¿habrá sobres (las famosas bufandas) estas navidades?... En la actualidad, nuestras preguntas suelen ser diferentes: ¿han encontrado trabajo tus hijos? ¿cuántos nietos tienes? ¿te dio resultado aquel medicamento?... En medio, toda una vida dedicada a la Universidad y a la Ciencia, como ha llevado a cabo de manera brillante Victoriano.

Cuando Victoriano comenzó su labor de profesor universitario, estábamos en unos años clave para el desarrollo de las Matemáticas en nuestra Universidad y en España, en general. Se comenzaba a realizar investigación de calidad y docencia avanzada y era necesario montar toda la infraestructura concerniente a grupos y proyectos de investigación, creación de bibliotecas adecuadas, etc. Victoriano contribuyó de manera significativa a todo esto, creando, un ambiente apropiado para la docencia y la creación científica.

Victoriano tiene una trayectoria docente e investigadora muy amplia, de altísima calidad y es un ejemplo de dedicación a la Universidad, donde ha hecho de todo. Como docente ha desempeñado prácticamente todas las figuras de profesor posibles: ayudante, adjunto interino, adjunto numerario y Catedrático de Universidad desde 1986 (con 33 años) hasta la actualidad. Ha impartido materias muy diversas de Análisis Matemático, Matemática Aplicada y Análisis Numérico, siendo un firme defensor de las "prácticas con ordenador", característica hoy en día generalizada en las asignaturas del Departamento de Matemática Aplicada de nuestra Universidad.

Me gustaría hacer énfasis en algo más concreto: el hecho de que Victoriano fue pionero en la docencia de Cálculo Numérico de tercer curso de la Licenciatura de Matemáticas mediante ordenador, contando con un HP con pantalla de una sola línea y de inusitada rapidez de cálculo para la época. Aquellos inicios llevaron a que en la década de los 90 el Departamento de Matemática Aplicada potenciara en nuestra universidad el uso de medios informáticos, como herramienta de apoyo para la docencia en las asignaturas que les correspondía, al usar el software MATHEMATICA para las clases prácticas de la mayor parte de las asignaturas que se explicaban, no sólo en Matemáticas, sino

también en otras licenciaturas de Ciencias y en las Escuelas de Ingeniería. En particular, es coautor de varios libros, profundos pero fáciles de entender, sobre el uso del programa MATHEMATICA.

La actividad investigadora de Victoriano se enmarca en Análisis Numérico, Interpolación, Splines y Matemática electoral (incluso ha sabido mezclar sabiamente la Matemática Electoral con las funciones splines). Ha participado en numerosos proyectos de investigación (nacionales y proyectos de excelencia) y ha sido investigador principal en muchos de ellos.

Tiene numerosas publicaciones en revistas de gran nivel como Journal of Approximation Theory, Applied Numerical Mathematics, Applied Mathematics Letters, Approximations theory and its Applications, C.R. Academy Sciences Paris, Electoral Studies, Annals of Operations Research, Mathematical Social Sciences, Computers and Mathematics with Applications, Analytical Letters, Numerical Algorithms, Mathematical and Computer Modelling, y ha participado en numerosos congresos de reconocido prestigio, destacando los celebrados en París (Francia), Oberwolfach (Alemania), Sicilia, Roma, Siena y Regio Calabria (Italia), Varsovia (Polonia), Santiago de Chile, Cambridge (Reino Unido), Estocolomo (Suecia) y Montreal (Canadá).



Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

En particular, al congreso citado de Oberwolfach celebrado en 2004, sobre análisis y diseño de métodos electorales, sólo se pudo asistir por invitación personal. Las correspondientes conferencias han sido publicadas por editoriales internacionales de calidad como Birkhauser, North Holland, World Scientific Publishing, Marcel Dekker, Springer Verlag, etc.

Además, ha realizado contribuciones para diversas revistas nacionales de Ciencia Política y Sociología y ha mantenido entrevistas en periódicos como Ideal de Granada, Heraldo de Aragón y el País.

En cuanto a estancias de investigación ha visitado diferentes universidades y centros de investigación en Francia, Alemania e Italia. Ha sido organizador de diversos congresos nacionales e internacionales, director de cinco tesis doctorales y ha impartido numerosas conferencias nacionales e internacionales.

En el aspecto de cargos institucionales, fue director del Departamento de Matemática Aplicada de nuestra Universidad durante 12 años (1988-2000) y Vicedecano de Investigación de la Facultad de Ciencias durante dos años (1985-86). Tiene el máximo número posible de sexenios de investigación y de quinquenios docentes, así como tramos autonómicos. En resumen, un universitario, profesor e investigador ejemplar que ha contribuido a que la Universidad sea cada vez mejor.

Victoriano ha sido una piedra angular en la génesis y posterior desarrollo del Departamento de Matemática Aplicada (creado en 1985) y del grupo de investigación FQM-191, creado en 1992 y llamado precisamente "Matemática Aplicada", subvencionado por la Junta de Andalucía desde sus comienzos.

La investigación el Departamento de Matemática Aplicada contó desde el primer instante con una base sólida en Análisis Numérico, debido al impulso del Dr. Mariano Gasca, que dirigió el Departamento de Ecuaciones Funcionales desde 1978 hasta 1982, los años que estuvo en Granada. La primera tesis doctoral dirigida por Mariano Gasca fue la de Victoriano, en 1980.



¡Qué tiempos aquellos!

Paso a continuación a exponer unas breves reflexiones sobre "Matemática Pura, Matemática Aplicada y la Matemática como Arte", reflexiones que, en mi opinión, encajan muy bien con las características de la dilatada actividad docente e investigadora de Victoriano.

Nadie serio discute el hecho de que las Matemáticas son una disciplina fundamental en la formulación de la Ciencia, a través del entendimiento y explicación de modelos matemáticos apropiados. En el curso del estudio matemático del modelo tratado, el matemático suele apreciar la belleza de las Matemáticas, como si fuesen un arte. Esto es intrínseco a la naturaleza de las Matemáticas: unas veces se muestra como arte y otras como práctica, útil y aplicada. En palabras de nuestro querido maestro Miguel de Guzmán Ozámiz, que fue catedrático de análisis matemático de la Universidad Complutense de Madrid y un modelo para muchos de nosotros:

"Las Matemáticas no tratan de verdades insondables ni infalibles. La Matemática es una actividad del hombre, vieja como la música y la poesía, y que, como ellas, persigue una cierta armonía y belleza, ésas que puede proporcionar la estructura mental ágil, limpia y elegante de las construcciones matemáticas"

Es claro también que las Matemáticas no son sólo arte, y hoy en día se aplican a multitud de disciplinas científicas, además de las consideradas clásicas, como la Física, Química, Ingeniería, etc. Es usual ver aplicaciones de la Matemática a disciplinas tan diversas como

la teoría de juegos, el mundo computacional, la industria, las finanzas, la administración, la vida social, etc. Tenemos un ejemplo patente en los matemáticos que han recibido el premio Nobel de Economía, por el estudio de temas económicos con la ayuda de herramientas Matemáticas avanzadas. Por citar algunos: Kantoróvich en 1975, Nash en 1994, Aumann en 2005, Hurwicz, Maskin y Myerson en 2007 y Shapley en 2012.

¿Alguien se atreve hoy en día a definir las fronteras entre la Matemática Pura y la Matemática Aplicada, o incluso las fronteras entre la Aritmética, la Geometría, el Álgebra o el Análisis? Yo desde luego no. Esta discusión es muy antigua y según el matemático francés Dieudonné, la polémica por establecer tales fronteras consta ya a principios del siglo XIX, siendo protagonistas de ella dos matemáticos ilustres: Jacobi y Fourier.

No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real. A ello han contribuido, sin ninguna duda, los modernos ordenadores, con su tremenda potencia para realizar cálculos que hace unos años considerábamos inabordables.

Los problemas que nos interesan en los tiempos actuales han de tratarse de un modo interdisciplinar, si queremos tener alguna posibilidad de éxito, y por tanto, la Matemática es, cada vez más, una "ciencia global", aunque no me guste éste último calificativo. En consonancia con Pasteur, debemos decir que "no existen ciencias aplicadas, sino aplicaciones de las ciencias". De la misma forma, debemos hablar más que de Matemática Aplicada, de las aplicaciones de las Matemáticas, pues la diferencia entre un matemático puro y un matemático aplicado no son nunca científicas. Como muestra su carrera investigadora, a Victoriano le ha gustado y le sigue gustando, usar las Matemáticas para entender los problemas y retos del mundo, en conexión con la naturaleza y las actividades humanas. Buena prueba de ello es, en estos últimos años, su interés por la Matemática Electoral. En este instante se me viene a la cabeza que su interés por la Matemática Electoral puede estar motivada por una viñeta publicada por el dibujante Soria en el periódico Ideal de 27 de Septiembre de 1984, en relación con el VII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, celebrado en Granada y organizado por los miembros del Departamento de Ecuaciones Funcionales.



Una de las sociedades matemáticas más prestigiosas hoy en día es SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, con sede principal en Estados Unidos. En su página web oficial se puede leer: "SIAM se creó en 1952 para asegurar y potenciar las fuertes interacciones que existen entre las Matemáticas y otras comunidades científicas y tecnológicas, a través de las aplicaciones a Ingeniería, Industria y Sociedad".

Otros muchos países disponen de sociedades de Matemática Aplicada, como España, donde tenemos SEMA, la Sociedad Española de Matemática Aplicada, creada en 1991.

Victoriano siempre ha sido un firme defensor de la "Matemática aplicada", sin olvidar nunca la "Matemática pura", pues piensa como muchos otros matemáticos, entre los que me incluyo, que la mejor Matemática aplicada es la que se hace desde la buena Matemática pura, y si tiene adecuadas dosis de arte, mucho mejor.

Centrándonos a continuación en el excelente discurso que acabamos de escuchar, dice textualmente Victoriano: "siempre me han gustado las Matemáticas por sí mismas, pero me han fascinado por sus aplicaciones". El tema que ha elegido es uno en el que él es un experto consumado y al que ha dedicado con notable éxito los últimos años de su actividad investigadora: el de la representación proporcional, que se puede enmarcar dentro de los apartados 91F10 ("tratamiento matemático de la ciencia política") y 91B12 ("teoría de las votaciones"), de la Mathematics Subject Classification 2010, elaborada conjuntamente

por los comités editoriales de *Mathematical Reviews* y *Zentralblatt Für Mathematik*, después de una amplia y prolongada consulta a la comunidad matemática internacional.

Ha sido un acierto que lo haya escrito primando la divulgación sobre los grandes teoremas matemáticos (que los hay, como él mismo pone de manifiesto al comienzo de su discurso). No obstante, nos ha regalado un discurso matemático, para los no matemáticos. Más precisamente Victoriano nos ha hablado de sistemas electorales de repartos proporcionales, biproporcionales y con proporcionalidad decreciente.

Comienza con las premisas imprescindibles que hay que establecer al diseñar un sistema electoral, para pasar después a la descripción de diferentes métodos de reparto proporcional, poniendo también de manifiesto los requisitos básicos para que un método sea de reparto proporcional. Dedicar una atención especial a los métodos de Hamilton, D'Hondt, Huntington, de divisores y Sainte-Laguë, para a continuación tratar sobre el problema de reparto proporcional con limitaciones mínima y máxima.

Uno de los apartados más interesante del discurso es, a mi juicio, el que trata sobre cómo elegir un método de reparto, pues aquí hace Victoriano un análisis crítico de los diferentes métodos expuestos con anterioridad. Esta es una de las cualidades más importantes que tenemos que tener los matemáticos y los científicos en general: la capacidad de discernir, criticar, examinar los datos y resultados, en orden a asesorar, informar y sobre todo a no dejarse engañar. *Harina de otro costal* es el título del apartado ¿Cómo elegir un método de reparto?. Si le preguntas previamente a los políticos ... te van a preguntar ellos a tí: ¿quién lo ha propuesto? ¿cuál es el más favorable para mi partido? y después dirán con seguridad: tenemos que estudiarlo, para ver cuál es el que más nos gusta. Claro, a lo mejor no comprenden que eso puede ser en unas determinadas elecciones y no en otras. No tengo ganas de entrar en este tipo de cuestiones, porque éste es un acto científico y a muchos las propuestas les parecen malas o buenas, dependiendo de quién las proponga y no del rigor científico y la coherencia de las mismas.

Las reflexiones finales del discurso incluyen una petición de responsabilidad hacia los que tienen la capacidad de elegir un determinado sistema electoral y al mismo tiempo en el discurso se pone de manifiesto un análisis riguroso de las reglas actuales de elección en diferentes países, haciendo un especial hincapié en que, para conseguir el progreso de todos, las instituciones políticas, comunidades autónomas, naciones, etc. han de ser gobernables. Uno de los libros de Victoriano lleva por título "Sistema electoral para el Congreso de los

Diputados", al que se añade el subtítulo: "propuesta para un Parlamento más ecuánime, representativo y gobernable".

Es muy bueno y útil para nuestra Academia la incorporación del profesor Victoriano Ramírez González a la misma. Tenemos académicos de Álgebra, Análisis Matemático, Estadística y Geometría y Topología, pero faltaba potenciar en la Academia la Matemática Aplicada. La incorporación de Victoriano es sin duda muy beneficiosa para nuestra noble e insigne Institución, por las ideas que puede aportar, por su punto de vista sobre las aplicaciones de la Matemática, por su experiencia docente e investigadora interdisciplinar y por su aporte crítico, pero científico, sobre el tema de las Matemáticas electorales, que tanta repercusión puede tener en nuestra Sociedad.

Vuelvo a repetir que para mí ha sido un gran honor contribuir a ello con este discurso de contestación.

Profesor Victoriano Ramírez González, querido colega, compañero y amigo, bienvenido a la Academia.

Muchas gracias.

