Introducción a las Superficies de Riemann

Antonio Alarcón López

Enero de 2005

1. Primeras definiciones y resultados elementales

Definición 1.1 *Llamaremos superficie de Riemann a una superficie diferenciable con un atlas holomorfo.*

Veamos algunos ejemplos sencillos:

1. $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(\mathbb{C}, 1_{\mathbb{C}})\}$.
2. $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{B} = \{(\mathbb{C}, 1_{\mathbb{C}}), \big(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, z \mapsto \frac{1}{z}\big)\}$.
3. Todo abierto de una superficie de Riemann es una superficie de Riemann.

Teorema 1.1 *Toda superficie de Riemann es orientable.*

Demostración. Sean (V, ϕ) y (W, ψ) dos cartas en una superficie de Riemann M, de manera que $V \cap W \neq \emptyset$. Entonces, donde se puede componer,

$$\phi \circ \psi^{-1}(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

es holomorfa, luego verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

En consecuencia, $Jac(\phi \circ \psi^{-1}) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 > 0$, luego, es posible encontrar un recubrimiento de M por abiertos coordenados de forma que el cambio de cartas siempre tenga jacobiano positivo. $\square$

Definición 1.2 *Una aplicación entre superficies de Riemann diremos que es holomorfa si lo es al componer con cartas.*

Dada una superficie de Riemann M, los principales teoremas clásicos sobre funciones holomorfas se pueden trasladar al $\mathbb{C}$-álgebra de las funciones holomorfas de M en $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2 (de la singularidad evitable) *Sean U un abierto de M, $a \in U$ y f holomorfa en $U \setminus \{a\}$. Si f está acotada en un entorno de a, entonces existe $\widetilde{f}$ holomorfa en U con $\widetilde{f} = f$ en $U \setminus \{a\}$.*

Demostración. Tomamos una carta (U, ϕ) y aplicamos el teorema de la singularidad evitable clásico para $f \circ \phi^{-1}$. □

Teorema 1.3 (de identidad) *Sean M y N superficies de Riemann con M conexa y $f, g : M \to N$ dos aplicaciones holomorfas. Si el conjunto de puntos donde f y g coniciden tiene puntos de acumulación entonces f y g coninciden en todo M.*

Demostración. El conjunto $G = \{p \in M : \exists V(p)$ entorno de p tal que $f \equiv g$ en $V(p)\}$ es abierto y cerrado. Además, el teorema de identidad clásico asegura que G es no vacio, luego, $G = M$. □

Teorema 1.4 (de la aplicación abierta) *Sea $f : M \to N$ una aplicación holomorfa y no constante entre superficies de Riemann. Entonces f es abierta.*

Teorema 1.5 (principio del máximo) *Sea $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante. Entonces $|f|$ no alcanza su máximo.*

Demostración. Supongamos $a \in M$ con $|f(a)| \geq |f(x)|\ \forall x \in M$. De esta forma, $f(M) \subseteq \overline{B}(0, |f(a)|)$ y f es abierta, luego, $f(M) \subset B(0, |f(a)|)$. En consecuencia, $|f(a)| < |f(a)|$. □

Corolario 1.1 *Sean M una variedad de Riemann compacta y $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces f es constante.*

Teorema 1.6 (de Liouville) *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y acotada. Entonces f es constante.*

Definición 1.3 *Una función meromorfa en una superficie de Riemann M es una función holomorfa $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$ que no es constantemente ∞.*

Si f es meromorfa entonces por el principio de identidad, $f^{-1}(\{\infty\})$ es discreto y cerrado, luego, $M' = M \setminus f^{-1}(\{\infty\})$ es un abierto.

Definición 1.4 *Se llaman polos de f a los puntos de $f^{-1}(\{\infty\})$.*

Sean M una superficie de Riemann, $p \in M$, $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $\alpha : \Omega \to M$ una aplicación holomorfa con $\alpha(0) = p$. Definimos

$$\alpha'(0) : \mathcal{O}(M, p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\alpha'(0)(f) = (f \circ \alpha)'(0),$$

donde $\mathcal{O}(M, p)$ denota al conjunto de gérmenes de funciones holomorfas en p. Claramente, $\alpha'(0)$ es una derivación sobre $\mathcal{O}(M, p)$.

Definición 1.5 *Se define el espacio tangente holomorfo a M en p como $T_pM = \{\alpha'(0) : \alpha$ es una curva holomorfa con $\alpha(0) = p\}$.*

Sea (V, z) un entorno coordenado alrededor de p. Llamamos $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$ a la derivación $(z^{-1})'(0)$. De este modo, dada $\beta'(0) \in T_pM$ tenemos

$$\beta'(0)(f) = (f \circ \beta)'(0) = (f \circ z^{-1} \circ z \circ \beta)'(0) = \beta'(0)(z) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p.$$

Por tanto, T_pM es un espacio vectorial complejo generado por $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$, luego, 1-dimensional.

Definición 1.6 *Un campo holomorfo sobre una superficie de Riemann M es una aplicación que asigna a cada $p \in M$ un vector $X(p) \in T_pM$ de manera que si (V, z) es una carta en M entonces $X = f \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ en V siendo f holomorfa en V.*

Definición 1.7 *Dada $\phi : M \to N$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann se define*

$$(d\phi)_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$$

$$(d\phi)_p(\alpha'(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0).$$

Claramente, $(d\phi)_p$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Si $f : M \to \mathbb{C}$ es holomorfa, identificando $\mathbb{C} \equiv T_{f(p)}\mathbb{C}$ y tomando $(\mathbb{C}, z)$ como carta global de $\mathbb{C}$, tenemos $(df)_p(v) = v(f) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$, esto es, $(df)_p \in (T_pM)^*$.

Definición 1.8 *Al espacio dual de T_pM lo llamaremos espacio co-tangente holomorfo a M en p y lo denotaremos T_p^*M.*

Definición 1.9 *Una 1-forma holomorfa en M es una aplicación que a cada punto $p \in M$ le asigna una forma $\alpha_p \in T_p^*M$ de manera que si (V, z) es una carta en M entonces $\alpha_p = f(p) \cdot (dz)_p$ en cada $p \in V$ siendo f holomorfa en V. Al conjunto de todas las 1-formas holomorfas sobre M lo denotaremos $H(M)$.*

2. La fórmula de Riemann-Hurwitz

Las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas se comportan en casi toda la superficie como si fuesen aplicaciones recubridoras. A lo largo de este epígrafe supondremos que todas las superficies son conexas.

Definición 2.1 *Sea M una superficie de Riemann y $p \in M$. Llamamos disco conforme alrededor de p a toda carta (D, ϕ) tal que $\phi(D) = \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ y $\phi(p) = 0$.*

Sean $f : M \to N$ una aplicación holomorfa, $p \in M$ y (D, ϕ), $(\tilde{D}, \tilde{\phi})$ discos conformes alrededor de p y $f(p)$, respectivamente, tenemos entonces una aplicación holomorfa

$$F = \tilde{\phi} \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D},$$

verificando $F(0) = 0$. Resultados clásicos de análisis complejo aseguran que existen $n \in \mathbb{N}$ y una función holomorfa $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ con $g(0) \neq 0$ y $F(z) = z^n \cdot g(z)$. Ahora, dado $r > 0$ suficientemente pequeño para que g no tenga ceros en $D(0, r)$, la función g tiene una raíz n-ésima en ese disco, esto es, existe $h : D(0, r) \to \mathbb{D}$ con $h(z)^n = g(z)$. En consecuencia, $F(z) = (z \cdot h(z))^n$. Llamando $\psi(z) = z \cdot h(z)$ entonces $\psi'(0) = h(0) \neq 0$, luego, por el teorema de la función inversa, existe $r' > 0$ tal que $\psi : D(0, r') \to \psi(D(0, r'))$ es un biholomorfismo. De esta forma,

$$\tilde{\phi} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \psi^{-1}(z) = \psi^n \circ \psi^{-1}(z) = (\psi(\psi^{-1}(z)))^n = z^n.$$

De esta forma, hemos probado que existen entornos coordenados de p y $f(p)$ de tal forma que f se escribe localmente como $z \mapsto z^n$. Además, este número n es independiente del sistema de coordenadas escogido, en esencia, representa el número de preimágenes por f de un punto en un entorno de $f(p)$.

Definición 2.2 *Al número natural n se le llama la multiplicidad de f en p y se le denota $m_f(p)$. Se llama número de ramificación de f en p a $b_f(p) = m_f(p) - 1$.*

Proposición 2.1 *Sea $f : M \to N$ una aplicación holomorfa y no constante entre dos superficies de Riemann compactas. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m = \sum_{p \in f^{-1}(q)} m_f(p) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} (b_f(p) + 1) \quad \forall q \in N.$$

Idea de la demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto $\Sigma_n = \{q \in N : \sum_{p \in f^{-1}(q)} m_f(p) \geq n\}$ que es abierto y cerrado en N. Ahora dado $q_0 \in N$, $f^{-1}(q_0)$ es finito por ser M compacta, luego $m = \sum_{p \in f^{-1}(q_0)} m_f(p) \in \mathbb{N}$ y $\Sigma_m \neq \emptyset$, en consecuencia, $\Sigma_m = N$. Además, $q_0 \notin \Sigma_{m+1}$, luego, $\Sigma_{m+1} = \emptyset$. $\square$

Definición 2.3 *Se llama grado de f al entero $m = deg(f)$ de la proposición anterior.*

Definición 2.4 *Se llama índice total de ramificación de f al entero*

$$B_f = \sum_{p \in M} b_f(p).$$

Corolario 2.1 *Una función meromorfa en una superficie de Riemann compacta tiene el mismo número de ceros que de polos, contados con su multiplicidad.*

Corolario 2.2 *El grado de una aplicación es uno si, y solo si, la aplicación es un biholomorfismo.*

Teorema 2.1 (fórmula de Riemann-Hurwitz) *Sea $f : M \to N$ una aplicación holomorfa y no constante entre dos superficies de Riemann compactas. Entonces*

$$\chi(M) = deg(f) \cdot \chi(N) - B_f,$$

donde χ denota la característica de Euler.

Demostración. Sean $n = \deg(f)$ y $S = \{f(p) : \ p \in M, \ b_f(p) > 0\}$. S está formado por puntos aislados en una compacta, luego es finito. En consecuencia, podemos triangular N de forma que cada punto de S sea un vértice de la triangulación. Supongamos que esta triangulación tiene C caras, L lados y V vértices. Levantando la triangulación a M a través de f, obtenemos una triangulación de M con nC caras, nL lados y $nV - B_f$ vértices. Por tanto, $\chi(N) = C - L + V$ y $\chi(M) = nC - nL + nV - B_f$. □

De esta forma, relacionamos el género de las superficies sin más que recordar la relación $\chi(M) = 2(1 - g)$, siendo g el género de M.

3. La superficie de Riemann de un polinomio

Consideremos $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_p)$, donde $p \in \mathbb{N}$ y $a_i \in \mathbb{C}$, $\forall\, i = 1, \ldots, p$. Para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, la función $\omega(z) = \sqrt[n]{P(z)}$ es multivaluada si la consideramos de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, ya que casi todo punto $z \in \mathbb{C}$ tiene n posibles imágenes. En cambio, los puntos $a_1, \ldots, a_p$ son singulares, esto es, admiten una única imagen. En estas condiciones existe una superficie de Riemann, R_ω, llamada la superficie de Riemann asociada al polinomio

$$\omega(z)^n = P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_p)$$

sobre la que la función ω es univaluada, esto es, está bien definida. En esta superficie, ∞ será un punto regular cuando $\frac{1}{\omega(\frac{1}{z})}$ esté bien definido en un entorno de cero, esto es, cuando n divida a p, mientras que ∞ será un punto singular cuando n no divida a p.

En el caso que n divida a p, consideramos

$$R_\omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ w^n = P(z)\} \cup \{(\infty, \infty_k) : \ k = 1, \ldots, n\}$$

mientras que cuando n no divida a p, definimos

$$R_\omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ w^n = P(z)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

Dotemos a R_ω de topología describiendo discos alrededor de cada punto. Un disco centrado en $(a_i, 0)$ es

$$\{(z, w) \in R_\omega : \ z \in D(a_i, \rho)\},$$

siendo $\rho > 0$ suficientemente pequeño.

Ahora, dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$, un disco centrado en $(z_0, w_0) \in R_\omega$ es

$$\{(z, w) \in R_\omega : \ z \in D(z_0, \rho),\, w = f_j(z)\},$$

para cierto $\rho > 0$ suficientemente pequeño, donde f_j es la rama holomorfa de ω en $D(z_0, \rho)$ tal que $f_j(z_0) = w_0$.

Finalmente, en el caso que n divida a p, un disco centrado en (∞, ∞_k) es

$$\{(\infty, \infty_k)\} \cup \{(z, w) \in R_\omega : \ z \in \mathbb{C} \setminus D(0, R),\, w = f_k(z)\},$$

para cierto $R > 0$ suficientemente grande, donde $\{f_k : \ k = 1, \ldots, n\}$ son las distintas n ramas holomorfas de ω en $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$, mientras que en el caso que n no divida a p, un disco centrado en (∞, ∞) será

$$\{(\infty, \infty)\} \cup \{(z, w) \in R_\omega : \ z \in \mathbb{C} \setminus D(0, R)\}.$$

Parametricemos R_ω para darle estructura de superficie de Riemann. Una carta centrada en $(a_i, 0)$ es

$$\begin{array}{ccc} (a_i, 0) & \stackrel{\phi_1}{\longmapsto} & 0 \\ (z, w) & \longmapsto & w. \end{array}$$

Ahora, dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$, una carta centrada en $(z_0, w_0) \in R_\omega$ es

$$\phi_2(z, f_j(z)) = z - z_0.$$

Finalmente, en el caso que n divida a p, una carta centrada en (∞, ∞_k) es

$$\begin{array}{ccc} (\infty, \infty_k) & \stackrel{\phi_3}{\longmapsto} & 0 \\ (z, f_k(z)) & \longmapsto & \frac{1}{z}, \end{array}$$

mientras que si n no divide a p, entonces una carta centrada en (∞, ∞) es

$$\begin{array}{ccc} (\infty, \infty) & \stackrel{\phi_3}{\longmapsto} & 0 \\ (z, w) & \longmapsto & \frac{1}{w}. \end{array}$$

3.1. Superficies hiperelípticas: Realización geométrica

Definición 3.1 *Una superficie de Riemann compacta se dice hiperelíptica si admite una función meromorfa $z : M \to \overline{\mathbb{C}}$ no constante y con exactamente dos polos.*

Obviamente la función z es de grado 2 y cada punto de ramificación de z tiene número de ramificación 1, luego, usando la fórmula de Riemann-Hurwitz, el índice total de ramificación de z y el género g de M están relacionados por la fórmula $B_z = 2g + 2$. En consecuencia, z tiene exactamente $2g + 2$ puntos de ramificación.

Teorema 3.1 *Sea M una superficie de Riemann hiperelíptica de género $g \geq 1$ y z una función de grado 2 sobre ella. Sean $P_1, \ldots, P_{2g+2}$ los puntos de ramificación de z y, sin pérdida de generalidad, suponemos $z(P_j) \neq \infty\ \forall\, j = 1, \ldots, 2g+2$. Entonces la función*

$$w = \sqrt{\prod_{j=1}^{2g+2} \big(z - z(P_j)\big)},$$

está bien definida sobre M.

Idea de la demostración. Por tener todos los puntos de ramificación de z número de ramificación 2, w define localmente una función meromorfa en M que es 2-valuada. Para ver que podemos elegir una rama univaluada vamos a introducir una representación de la superficie M como un recubridor de dos hojas de la esfera $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Si $p \in M$, $z(p) \neq \infty$ y p no es de ramificación de z, entonces $z - z(p)$ es una coordenada local anulándose en p. Si $z(p) = \infty$ y p no es de ramificación, entonces $1/z$ es una coordenada local anulándose en p. Si p es de ramificación, entonces una de las dos ramas de $\sqrt{z - z(p)}$ es una coordenada local anulándose en p. Notamos $e_j := z(p_j)$. Así, los e_j son distintos entre sí y $z^{-1}(\alpha)$ consiste exactamente de dos puntos de M para cada $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \ldots, e_{2g+2}\}$, mientras que $z^{-1}(e_j) = \{p_j\}$. Consideramos dos copias, I y II, de $\overline{\mathbb{C}}$. En cada copia y para cada $k = 1, \ldots, g-1$ cortamos por una curva uniendo e_{2k-1} con e_{2k}, renombrando previamente los e_j para que estas curvas no se corten. En cada corte consideramos dos orillas, N y S, y construimos una superficie de Riemann $\widetilde{M}$ pegando cada orilla S de la copia I con la correspondiente orilla N de la copia II y cada orilla N de la copia I con la correspondiente orilla S de la copia II. Así, $\widetilde{M}$ es una superficie de Riemann compacta y z es una función meromorfa sobre ella, luego, $\widetilde{M}$ es en efecto un modelo de M. Ahora, si fijamos una rama de la función $\sqrt{z - e_j}$, su continuación analítica a lo largo de un camino cerrado cambia de signo si, y solo si, el camino da un número impar de vueltas alrededor de e_j. De esta forma, w cambia de signo si nos movemos por un camino cerrado y simple en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \ldots, e_{2g+2}\}$ que empiece en un punto z y vuelva al mismo punto encerrando un número impar de e_j, pero entonces, esta curva pasará por alguno de los cortes, y así, su levantamiento a M es una curva uniendo dos puntos de M, p

y q, con $p \neq q$ y $z(p) = z(q)$. En cambio, cuando un camino envuelva un número par de e_j entonces su levantamiento a M es una curva cerrada. De esta forma, w puede ser continuada analíticamente sobre cualquier camino en M y además, estas continuaciones devuelven los valores originales de w que es, en efecto, univaluada. $\square$

4. Clasificación de las superficies de Riemann

Definición 4.1 *Dos superficies de Riemann se dicen conformemente equivalentes si existe un biholomorfismo entre ellas que identifica las estructuras conformes correspondientes a cada superficie de Riemann.*

Teorema 4.1 (de uniformización de Koebe) *Cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{S}^2$.*

La siguiente definición divide a las superficies de Riemann en tres familias mutuamente excluyentes:

Definición 4.2 *Sea M una superficie de Riemann. Diremos que:*

- *M es elíptica si es compacta.*
- *M es parabólica si no es compacta y no existen funciones subarmónicas negativas y no constantes sobre M.*
- *M es hiperbólica si existe una función subarmónica negativa no constante sobre M.*

Teorema 4.2 *Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces:*

1. *M hiperbólica $\Rightarrow$ M es conformemente equivalente a $D(0,1) \equiv \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.*
2. *M parabólica $\Rightarrow$ M es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$.*
3. *M elíptica $\Rightarrow$ M es conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{S}^2$.*

Referencias

[1] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces.* Graduate text in Math., **72**, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[2] Apuntes del curso de doctorado de Superficies de Riemann impartido por Francisco Martín