El problema de Dirichlet en superficies de Riemann. Superficies parabólicas e hiperbólicas.

Isabel Fernández

8 de febrero de 2005

Índice

1. Introducción

Sea $\mathcal{M}$ una superficie de Riemann, $\Omega \subset \mathcal{M}$ un dominio con frontera $\partial\Omega \neq \emptyset$ y $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua. El *problema de Dirichlet* en Ω consiste en encontrar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω verificando

$$(PD)_{\Omega,f} \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \quad (u \text{ es armónica en } \Omega), \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Ejemplo 1 *1.* $\mathcal{M} = \mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{D}$: *El problema de Dirichlet en un disco siempre tiene solución única.*

2. $\mathcal{M} = \mathbb{D}$, $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\}$: *El problema de Dirichlet tiene solución para cualquier f (nótese que $\partial\Omega = \{0\}$) pero la solución no es única.*

3. $\mathcal{M} = \mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\}$: *El problema de Dirichlet $(PD)_{\Omega,f}$ para la función definida por $f = 1$ en $\partial\mathbb{D}$ y $f = 0$ en $z = 0$ no tiene solución (para comprobarlo úsese el teorema de la singularidad evitable y el principio del máximo para funciones armónicas).*

Como se puede deducir de los ejemplos anteriores, en general no tenemos asegurada la existencia o unicidad del problema de Dirichlet $(PD)_{\Omega,f}$.

Al estudiar condiciones sobre existencia y unicidad de las soluciones de este problema aparecen de forma natural los conceptos de "función barrera"(para la existencia) así como una división de las superficies de Riemann en superficies elípticas (o compactas), parabólicas o hiperbólicas. A grandes rasgos, las superficies parabólicas son aquellas en las que es válido un *principio del máximo fuerte* (ver Proposición 4.2) que nos permite obtener unicidad para $(PD)_{\Omega,f}$.

Curiosamente, en la definición de función barrera y de superficies parabólicas/hiperbólicas no intervienen las funciones armónicas, sino una clase de funciones más débil, las funciones subarmónicas y superarmónicas, a las que no se les exige 2-diferenciabilidad, sólo que sean continuas, y que se caracterizan porque su valor en cualquier punto es menor (en el caso de las subarmónicas) o mayor (para las superarmónicas) que la media de los valores alrededor de ese punto (ver definición 2.2).

2. Preliminares

En lo que sigue $\mathcal{M}$ denotará una superficie de Riemann.

Definición 2.1 *Una función $u : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ se dice armónica si en cualquier carta holomorfa (x, y) se cumple*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Observación 1 *La expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ no es independiente de la carta (holomorfa) elegida. En efecto, si (x', y') es otra carta holomorfa, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función del cambio de carta $f(x', y') = (x, y)$ obtenemos*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = |f'|^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

por tanto, la definición anterior NO *depende de la carta (holomorfa) elegida.*

Observación 2 *El laplaciano de una función de clase $\mathcal{C}^2$ en una superficie de Riemann $\mathcal{M}$ se define como la 2-forma Δu que en coordenadas holomorfas (x, y) viene dada por la expresión*

$$\Delta u = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})(dx^2 + dy^2)$$

donde $\forall p \in U$ =entorno de definición de la carta, $(dx^2)_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ viene dada por $(dx^2)_p(u, v) = dx_p(u) \cdot dx_p(v)$ (la definición es análoga para $(dy^2)_p$).

Recordemos que en una superficie (y en general en cualquier variedad) dotada de una métrica g se definía el laplaciano de una función como la divergencia del gradiente *de la* *función. Ambas definiciones son equivalentes, ya que no es difícil comprobar que* $\Delta u = Div(\nabla u) \cdot g$.

Algunas propiedades de las funciones armónicas

- Propiedad de la media: Sea u armónica en $\mathcal{M}$, y (D, z) un disco conforme[1] en $\mathcal{M}$, entonces

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt, \qquad \text{donde estamos identificando } u(re^{it}) \equiv (u \circ z^{-1})(re^{it})$$

- Principio del máximo/mínimo (débil): Si u es armónica y no constante en un dominio $\Omega \subset \mathcal{M}$, u no puede alcanzar su máximo ni su mínimo en Ω.

  Consecuencia: en una superficie compacta NO EXISTEN funciones armónicas globalmente definidas.

- Teorema de la singularidad evitable: Sea $U \subset \mathcal{M}$ un abierto y $p \in U$. Si $u : U \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada, entonces u extiende a una función armónica en todo U.

Definición 2.2 *Una función continua* $u : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *es subarmónica (resp. superarmónica) en* $\mathcal{M}$ *si para cualquier disco conforme* D *de* $\mathcal{M}$ *se cumple*

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt \qquad \Big(resp.\, u(0) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt\Big)$$

Observación 3 *Cuando* u *es de clase* $\mathcal{C}^2$ *ser subarmónica (resp. superarmónica) equivale a que en cualquier carta holomorfa* (x, y) *se cumpla que* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0$ *(resp.* ≤ 0*).*

A partir de la definición de función subarmónica es inmediato comprobar la siguiente propiedad.

Principio del máximo (débil) para funciones subarmónicas:
Si u es subarmónica y no constante en un dominio $\Omega \subset \mathcal{M}$, u no puede alcanzar un máximo absoluto en Ω.

Teniendo en cuenta que si u es superarmónica, $-u$ es subarmónica, la propiedad anterior se traduce en un *principio del mínimo (débil) para funciones superarmónicas.*

[1] un disco conforme en $\mathcal{M}$ es un entorno coordenado holomorfo $(D \subset \mathcal{M}, z)$ tal que z aplica D en el disco unidad de $\mathbb{C}$.

3. El método de Perron y las funciones barrera

El principio de Perron nos da condiciones para que el supremo de una familia de funciones subarmónicas sea una función armónica, y es una herramienta fundamental en la demostración de los principales resultados de existencia que veremos, como por ejemplo el Teorema 3.2 sobre la existencia de solución de $(PD)_{\Omega,f}$.

Definición 3.1 *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones subarmónicas definidas en un abierto $\Omega \subset \mathcal{M}$ de una superficie de Riemann. $\mathcal{F}$ es una familia de Perron si cumple*

(I) $\mathcal{F} \neq \emptyset$

(II) dada $u \in \mathcal{F}$ y D disco conforme contenido en Ω existe $v \in \mathcal{F}$ armónica en D y tal que $v \geq u$,

(III) dadas $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$ existe $v \in \mathcal{F}$ tal que $v \geq Max\{u_1, u_2\}$

Observación 4 *En la mayoría de los casos en los que usaremos el Principio de Perron la función v de (III) será $v = Max\{u_1, u_2\}$, mientras que en (II) la función v será la* armonización de u en $\overline{D}$, *que se suele denotar por $u^{\overline{D}}$.*

Esta función se define como $\begin{cases} u^{\overline{D}} = u \text{ en } \mathcal{M} \setminus \overline{D} \\ u^{\overline{D}} = w \text{ en } \overline{D} \end{cases}$

donde w es la solución del problema de Dirichlet en D con la condición de frontera $w = u$ en ∂D. No es difícil comprobar que si u es subarmónica $u^{\overline{D}}$ también lo es y además $u^{\overline{D}} \geq u$.

Teorema 3.1 (Principio de Perron) *Sea $\mathcal{F}$ una familia de Perron en $\mathcal{M}$, y definamos*

$$u : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \qquad u := Sup_{v \in \mathcal{F}}\{v\}$$

Entonces, o bien u es constantemente igual a $+\infty$, o bien u es armónica en $\mathcal{M}$.

Demostración: Paso 1: Basta demostrarlo para los discos conformes, es decir, nos podemos reducir al caso del disco unidad $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.

En efecto, supongamos que el teorema es cierto para los discos conformes de $\mathcal{M}$ y supongamos también que u no es constantemente $+\infty$. Como la armonicidad es un concepto local, basta ver que u es armónica en cualquier disco conforme de $\mathcal{M}$. Al ser $u \not\equiv +\infty$ en $\mathcal{M}$ habrá un disco conforme D en el que $u \not\equiv +\infty$ y por tanto es armónica en D. Si consideramos cualquier otro disco conforme D^* podemos unir D con D^* por una "cadena" de discos conformes de forma que cada disco corte al siguiente. Esto nos asegura que u es armónica en todos los discos (de lo contrario sería constantemente $+\infty$), en particular en D^*.

Paso 2: Demostración del Teorema para $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.

Obsérvese que basta demostrar la tesis del Teorema para cualquier disco cerrado $K \subset \mathbb{D}$. Durante la demostración usaremos el siguiente resultado:

Principio de Harnack[2]: sea $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones armónicas. Entonces o bien $\lim v_n \equiv +\infty$ o bien $\lim v_n$ es armónica. Además la convergencia es uniforme sobre compactos.

Sea $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{D}$ (siempre existe). Como $u(z_j) = \mathrm{Sup}_{v\in\mathcal{F}}\{v(z_j)\}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ existirá una sucesión $\{v_{j,k}(z_j)\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergiendo a $u(z_j)$. Ahora se trata de usar las propiedades (II) y (III) de la Definición 3.1 para extraer una sucesión creciente de funciones armónicas en K cuyo límite sea la función u y aplicar el principio de Harnack para concluir la demostración.

Esta sucesión $\{v_n\}$ se construye de la siguiente forma:

para $n = 1$ se toma una $v_1 \in \mathcal{F}$ tal que $v_1 \geq v_{1,1}$ y v_1 armónica en K, (úsese (II))

para $n = 2$ se toma una $v_2 \in \mathcal{F}$ tal que $v_2 \geq \mathrm{Max}\{v_{1,2}, v_{2,1}, v_1\}$ y v_2 armónica en K. (úsese (III) y luego (II))...

continuando el proceso obtenemos una sucesión creciente $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ de funciones armónicas en K que además verifican que $v_n \geq v_{j,k}$, $\forall j, k \leq n$. Ya sólo falta demostrar que $u = \lim v_n$.

Por ser la sucesión $\{v_n\}$ creciente y estar contenida en $\mathcal{F}$ se tiene que $u \geq \lim v_n$.

Por otro lado, como $v_n \geq v_{j,k}$ $\forall j, k \leq n$, para cualquier $v \in \mathcal{F}$ se tiene

$$v(z_j) \leq u(z_j) = \lim_{k\to\infty} v_{j,k}(z_j) \leq \lim_{n\to\infty} v_n(z_j)$$

y como el conjunto $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es denso y las funciones v y $\lim v_n$ son continuas, $v \leq \lim v_n$, lo que acaba la demostración. □

3.1. Funciones barrera

Las funciones barrera nos van a permitir determinar cuándo el problema de Dirichlet $(PD)_{\Omega,f}$ va a tener solución *independientemente de la función f.*

Definición 3.2 *Sea $\Omega \subset \mathcal{M}$ un dominio y $p \in \partial\Omega \neq \emptyset$. p se dice que es un punto admisible (o regular) para Ω si existe un entorno W de p en $\mathcal{M}$ y una función continua $\beta : \overline{W \cap \Omega} \to \mathbb{R}$, verificando*

(I) β es superarmónica en $W \cap \Omega$,

(II) $\beta(p) = 0$ y

(III) $\beta > 0$ en $\overline{W \cap \Omega} \setminus \{p\}$

A la función β se le denomina función barrera en p.

[2]para una demostración de este resultado ver ver [1] o [2]

La siguiente proposición muestra que la existencia de funciones barrera está garantizada para dominios con frontera *suave* (de clase $\mathcal{C}^1$ al menos).

Proposición 3.1 *Si $p \in \partial\Omega$ es accesible por un arco analítico (=la imagen de un segmento de $\mathbb{C}$ por una carta) contenido en $\mathcal{M} \setminus \overline{\Omega}$ entonces p es admisible para Ω.*

En particular si $\partial\Omega$ es una curva de clase $\mathcal{C}^1$ en p, entonces p es admisible.

Demostración: Como es una propiedad local puedo suponer que estoy en $\mathbb{C}$, que el punto p es $p = 0$ y que el arco analítico es el semieje de los reales negativos. Basta definir

$$\beta : \mathbb{D} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \to \mathbb{R}, \qquad \beta(z) = \mathrm{Re}\sqrt{z}$$

Como $\mathbb{D} \cap \Omega \subset \mathbb{D} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, β es una función barrera en $p = 0$ para Ω. $\square$

Teorema 3.2 *Dado $\Omega \subset \mathcal{M}$ dominio con $\partial\Omega \neq \emptyset$ son equivalentes:*

(I) *Existe solución propia*[3] *de $(PD)_{\Omega,f}$ para cualquier f continua y acotada en $\partial\Omega$.*

(II) *todos los puntos de $\partial\Omega$ son regulares.*

Idea de la demostración: Para ver $(I) \Rightarrow (II)$ tómese $p \in \partial\Omega$ y $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua con $0 \leq f \leq 1$, y $f(q) = 0$ si y solamente si $q = p$. La solución del problema de Dirichlet asociado a f es una función barrera en p.

Para ver $(II) \Rightarrow (I)$ aplíquese el principio de Perron (Teorema 3.1) a la familia $\mathcal{F}$ de funciones v subarmónicas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$ tales que $\mathrm{Inf}_{\partial\Omega} f \leq v \leq \mathrm{Sup}_{\partial\Omega} f$ y $v|_{\partial\Omega} \leq f$. La función $u = \mathrm{Sup}_{\mathcal{F}}\{v\}$, que no es constantemente igual a $+\infty$ por ser f acotada, es la solución de $(PD)_{\Omega,f}$ que buscábamos[4]. $\square$

Corolario 3.1 *Si $\partial\Omega \neq \emptyset$ es compacta y de clase $\mathcal{C}^1$ el problema $(PD)_{\Omega,f}$ tiene solución propia para cualquier $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua.*

4. Una clasificación de las superficies de Riemann

En esta sección nos ocuparemos del problema de la unicidad de solución para $(PD)_{\Omega,f}$, esto motiva una división de las superficies de Riemann en tres grandes grupos:

Definición 4.1 *Una superficie de Riemann $\mathcal{M}$ se dice que es*

- *Elíptica: si es compacta.*

[3] una solución de $(PD)_{\Omega,f}$ es propia si verifica $\mathrm{Inf}_{\partial\Omega} u \leq u \leq \mathrm{Sup}_{\partial\Omega} u$

[4] Nota: el principio de Perron nos da la armonicidad de u en Ω, pero además hay que comprobar que $u = f$ en $\partial\Omega$, ahí es donde se usa la existencia de funciones barrera!

- *Parabólica: si no es compacta y no existen funciones subarmónicas negativas no constantes (o equivalentemente, no existen funciones superarmónicas positivas no constantes).*

- *Hiperbólica: si admite una función subarmónica negativa y no constante.*

Obsérvese que las tres clases de superficies son mutuamente excluyentes y que por tanto constituyen una división de las superficies de Riemann.

Ejemplo 2 *La esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es elíptica, el plano complejo $\mathbb{C}$ es parabólico*[5] *mientras que el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ es hiperbólico*[6]*. De hecho el Teorema de uniformización (ver Teorema 4.1) nos dice que éstas son las únicas superficies de Riemann simplemente conexas, es decir, cada una de las clases que hemos definido contiene una y sólo una superficie de Riemann simplemente conexa.*

Teorema 4.1 (Uniformización) *Sea $\mathcal{M}$ una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces*

1. *Si $\mathcal{M}$ es elíptica, $\mathcal{M}$ es biholomorfa a la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*
2. *Si $\mathcal{M}$ es parabólica, es biholomorfa al plano complejo $\mathbb{C}$.*
3. *Si $\mathcal{M}$ es hiperbólica, es biholomorfa al disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$.*

Para una demostración de este teorema ver por ejemplo [1].

Proposición 4.1 *Sea $\Omega \subset \mathcal{M}$ un dominio relativamente compacto de $\mathcal{M}$ con $\partial\Omega \neq \emptyset$ y regular (=todos sus puntos son admisibles, ver Definición 3.2). Entonces Ω es una superficie de Riemann hiperbólica.*

Demostración: Consideremos el problema de Dirichlet en Ω con condición de frontera $f < 0$ no constante. En virtud del Teorema 3.2 sabemos que ese problema tiene solución $u : \Omega \to \mathbb{R}$. u es por tanto una función armónica (en particular subarmónica), negativa (por el principio del máximo) y no constante. □

Proposición 4.2 (Principio del máximo fuerte en sups. parabólicas) *Sea $\mathcal{M}$ una superficie parabólica y $\Omega \subset \mathcal{M}$ un dominio suyo con $\partial\Omega \neq \emptyset$. Supongamos que $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $\overline{\Omega}$, subarmónica en Ω y acotada superiormente.*

Entonces $Sup_{\Omega} u \leq Sup_{\partial\Omega} u$.

Como consecuencia, el problema de Dirichlet $(PD)_{\Omega,f}$ en una superficie parabólica, si tiene solución es única.

[5] de hecho cualquier superficie elíptica/parabólica menos una cantidad finita de puntos es parabólica, Corolario 4.2

[6] de hecho cualquier dominio relativamente compacto con frontera regular de una superficie de Riemann es hiperbólico, Proposición 4.1

Demostración: Si u es constante no hay nada que probar, supongamos por tanto que u no es constante. Denotaremos $m_1 = \mathrm{Sup}_{\partial\Omega}\, u$ y $m_2 = \mathrm{Sup}_{\Omega}\, u$.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que $m_1 < m_2$. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que $m_1 + \varepsilon < m_2$.

Defino $v : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ como $\begin{cases} \mathrm{Max}\{u, m_1 + \varepsilon\} - m_2 & \text{en } \overline{\Omega} \\ m_1 + \varepsilon - m_2 & \text{en } \mathcal{M} \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$

Es fácil comprobar que v es subarmónica y negativa, y por tanto debe ser constante ($\mathcal{M}$ es parabólica) y por tanto $\mathrm{Max}\{u, m_1 + \varepsilon\} = m_1 + \varepsilon < m_2$ en Ω, lo que contradice que m_2 sea el supremo de u en Ω. □

La siguiente proposición es consecuencia del principio de Perron (Teorema 3.1) y nos muestra que en la superficies hiperbólicas no tenemos en general unicidad para el problema de Dirichlet.

Proposición 4.3 (Existencia de medidas armónicas en sups. hiperbólicas) *Sea $\mathcal{M}$ una superficie hiperbólica y $K \subset \mathcal{M}$ compacto con ∂K regular y $\mathcal{M} \setminus K$ conexo.*

En estas condiciones existe $w : \overline{\mathcal{M} \setminus K} \to \mathbb{R}$ continua

verificando $\begin{cases} (i) & w \text{ es armónica en } \mathcal{M} \setminus K \\ (ii) & w = 1 \text{ en } \partial K \\ (iii) & 0 < w < 1 \text{ en } \mathcal{M} \setminus K \end{cases}$

A la menor función que verifica lo anterior se le denomina "medida armónica del compacto K en $\mathcal{M}$"

Idea de la demostración: Como $\mathcal{M}$ es hiperbólica existe $\varphi_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ superarmónica positiva no constante. Como K es compacto, existe $m_0 = \mathrm{Min}\varphi_0|_K > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m_0 = 1$ en K.

Sea $\varphi := \mathrm{Min}\,\{1, \varphi_0\}$. Es fácil comprobar que φ es superarmónica en $\mathcal{M}$, no contante, $0 < \varphi \leq 1$ y $\varphi|_K = 1$.

Para obtener la función w del enunciado, usar el principio de Perron (Teorema 3.1) para la familia $\mathcal{F} = \{v$ continua en $\overline{\mathcal{M} \setminus K}$, subarmónica en $\mathcal{M} \setminus K$, y $v \leq \varphi$ en $\mathcal{M} \setminus K\}$ □

Corolario 4.1 *Sea $\mathcal{M}$ superficie hiperbólica y $K \subset \mathcal{M}$ compacto con $\partial K \neq \emptyset$ y $\mathcal{M} \setminus K$ conexo.*

Entonces, el problema de Dirichlet $(PD)_{\Omega,f}$ en $\Omega := \mathcal{M} \setminus K$ no tiene solución única, independientemente de f.

Demostración: En efecto, si u es solución de $(PD)_{\Omega,f}$ y w es la medida armónica de K entonces $(1 - w) + u$ es también solución. □

Observación 5 *Hemos visto que si $\mathcal{M}$ es hiperbólica existe la medida armónica de cualquier compacto. Recíprocamente, si existe la medida armónica de* un *compacto en $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M}$ no satisface el principio del máximo fuerte (Proposición 4.2) y por tanto ha de ser hiperbólica. Luego en realidad lo que tenemos es que las siguientes tres afiramciones son equivlentes:*

1. $\mathcal{M}$ *es hiperbólica*

2. *Existe la medida armónica de cualquier compacto de* $\mathcal{M}$*,*

3. *Existe la medida armónica de un compacto de* $\mathcal{M}$*.*

La medidas armónicas nos permiten también demostrar que ciertas superficies son parabólicas:

Corolario 4.2 *Sea* $\mathcal{M}$ *una superficie elíptica o parabólica y* $P_1, \dots, P_n$ *una cantidad finita de puntos en* $\mathcal{M}$*.*

Entonces $\mathcal{M} \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ *es parabólica.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ y D un disco conforme en $\mathcal{M}_0$. Supongamos por reducción al absurdo que $\mathcal{M}_0$ es hiperbólica, y por tanto existe $w =$ medida armónica del compacto $\overline{D}$ en $\mathcal{M}_0$, que recordemos que está definida en $\mathcal{M}_0 \setminus \overline{D}$.

Vamos a extender w a una función superarmónica positiva en todo $\mathcal{M}$. Para eso observemos primero que $0 < w < 1$ en $\mathcal{M}_0 \setminus \overline{D}$, y por el teorema de la singularidad evitable w extiende a los puntos $P_1, \dots, P_n$. Seguiremos llamando w a esa función (que ahora está definida en $\mathcal{M} \setminus D$). En estas condiciones, definimos $\tilde{w} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ como $\begin{cases} \tilde{w} = w & \text{en } \mathcal{M} \setminus D \\ \tilde{w} = 1 & \text{en } D \end{cases}$

Como $w = 1$ en ∂D, la función $\tilde{w}$ es continua, y no es difícil comprobar que es superarmónica en $\mathcal{M}$. Además $\tilde{w}$ es positiva y no constante, lo que contradice que $\mathcal{M}$ es elíptica o parabólica. $\square$

4.1. Función de Green

Definición 4.2 *Sea* $P \in \mathcal{M}$*, la función de Green para* $\mathcal{M}$ *con singularidad en* P *es una función* $G : \mathcal{M} \setminus \{P\} \to \mathbb{R}$ *verificando*

(I) G *es armónica en* $\mathcal{M} \setminus \{P\}$

(II) $G > 0$

(III) *Si* (D, z) *es un disco conforme alrededor centrado en* P *(es decir,* $z(P) = 0$*) entonces* $G(z) + log|z|$ *es armónica en* D*.*

(IV) $\forall \tilde{G}$ *cumpliendo* $(i), (ii)$ *y* (iii) *como antes,* $G \leq \tilde{G}$*.*

Observación 6 *Es fácil comprobar que la condición* (III) *no depende de la carta holomorfa elegida. Además* (IV) *nos asegura que la función de Green, si existe, es única.*

Teorema 4.2 $\mathcal{M}$ *es hiperbólica si y solamente si existe la función de Green en un punto.*

De hecho, esto es equivalente a que exista la función de Green para cualquier punto de $\mathcal{M}$*.*

Idea de la demostración: $\Rightarrow$) Si existe G función de Green en $P \in \mathcal{M}$ considero un $m > 0$ y defino $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $f = \text{Min}\{m, G\}$. Es fácil comprobar que f es superarmónica[7] en $\mathcal{M} \setminus \{P\}$. Además por la propiedad (iii) de la definición de función de Green tenemos que $\lim_{q \to P} G(q) = \infty$, y por tanto $f(P) = m$, luego f es superarmónica en todo $\mathcal{M}$. Y como $G, m > 0$, f es positiva. Sólo resta ver que no puede ser constante, de serlo sería $f \equiv m$, pero entonces $G - \frac{m}{2}$ contradice la propiedad (iv) de la definición de función de Green.

$\Leftarrow$) Aplíquese el principio de Perron (Teorema 3.1) a la familia $\mathcal{F}$ de funciones v subarmónicas en $\mathcal{M} \setminus \{P\}$, de soporte compacto en $\mathcal{M}$ y tales que $v(z) + \log|z|$ es subarmónica en $|z| \leq 1$.

$\square$

4.2. El caso elíptico

A pesar de que el caso en que el dominio Ω esté contenido en una superficie elíptica (i.e., compacta) no ha sido tratado en esta sección, teniendo en cuenta el corolario 4.2 es fácil ver que al final se reduce a un problema de Dirichlet en una superficie parabólica (salvo el caso en que $\Omega = \mathcal{M} \setminus \{P\}$, en cuyo caso el problema no tiene solución nunca por el teorema de la singularidad evitable para funciones armónicas y por ser $\mathcal{M}$ compacta).

Referencias

[1] H. M. Farkas, I. Kra.: *Riemann surfaces.* Graduate Texts in Math., **72**, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[2] Apuntes del curso de Geometría Diferencial de Joaquín Pérez

[7] es un hecho general, el mínimo de dos funciones superarmónicas es una función superarmónica