

Introducción a la Teoría de Superficies Minimales. Representación de Weierstrass.

M^a Magdalena Rodríguez Pérez

1. Introducción

El estudio de las superficies minimales en \mathbb{R}^3 se remonta a los orígenes del Cálculo Variacional y de la Geometría Diferencial clásica, en tiempos de Euler y Lagrange (s. XVIII). Por aquellas fechas, estas superficies se veían como los puntos críticos del funcional área, lo que lleva a que, si $z = u(x, y)$ es la expresión local de la superficie como grafo, entonces la superficie será minimal si se cumple

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \quad (1)$$

(que llamaremos *ecuación de los grafos minimales*), donde los subíndices x, y denotan las correspondientes derivadas parciales. Posteriormente, Meusnier interpretó geoméricamente estas superficies diciendo que en ellas, la curvatura media es constantemente cero; y esto es lo que se ha tomado posteriormente como definición.

Definición 1 *Una superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ se dice minimal si su curvatura media es idénticamente cero, $H \equiv 0$.*

En el siglo XIX, Plateau dio una interpretación física de las superficies minimales: éstas se pueden obtener sumergiendo un alambre curvo en una disolución jabonosa. De ahí que el problema de determinar si existen superficies minimales de cierta topología prescrita y bordeadas por una curva de Jordan predeterminada (o por un sistema de curvas de este tipo), se conozca en la literatura como problema de Plateau. Las primeras formulaciones precisas y soluciones parciales del problema de Plateau se deben a Scherk, Riemann, Enneper, Weierstrass y Schwarz (todas en el siglo XIX), que basaron sus avances en el importante hecho, descubierto por Christoffel, de que la aplicación de Gauss de las superficies minimales es conforme, lo que permitió el uso de potentes técnicas del Análisis Complejo y de la emergente Teoría de Superficies de Riemann, obteniendo nuevos ejemplos (aparte del plano, el helicoides y la catenoide, que eran los ejemplos de superficies minimales que se conocían hasta entonces) y propiedades generales de las superficies minimales. Aunque el problema de Plateau (para discos) no fue resuelto hasta principios del siglo XX (entre los años 1929 y 1933) por Douglas y Radó.

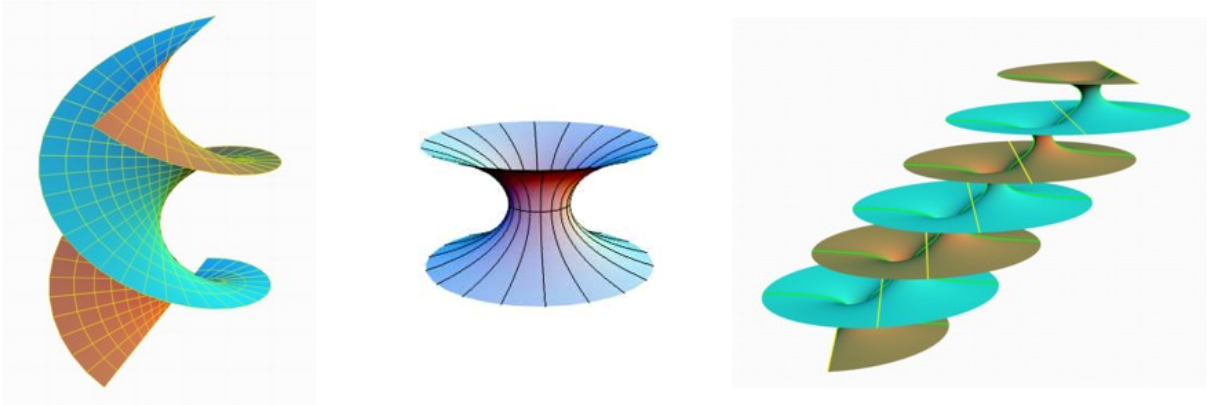


Figura 1: Superficies minimales foliadas por rectas y circunferencias (aparte del plano): helicoides, catenoide y superficie minimal de Riemann.

Teorema 1 (Douglas, Radó) *Dada una curva de Jordan Γ rectificable (i.e. que admite una parametrización lipschitziana), existe un disco minimal cuya frontera es Γ .*

Gracias a estos trabajos sobre el problema de Plateau, Douglas ganó la primera medalla Fields en 1936 (compartida con Ahlfors).

Jenkins-Serrin

Como no se encontraron nuevos ejemplos durante un largo periodo de tiempo, se trató de encontrar teoremas de unicidad. En esta línea, Bernstein demostró a principios del s. XX que las únicas soluciones u de 1 definidas en todo \mathbb{R}^2 son las afines; es decir, los únicos grafos minimales completos son los planos. Todos los demás ejemplos minimales y completos conocidos (aparte del plano) se aplicaban mediante la aplicación de Gauss en la esfera menos a lo más 4 puntos. Pero... ¿esto ocurre siempre? Esta pregunta ha estado sin responder durante un largo periodo de tiempo. Se obtuvieron resultados parciales al respecto (Osserman, Xavier, López, Ros, podéis consultarlos en la página de Francisco Martín: <http://www.ugr.es/fmartin/aplGauss.pdf>) hasta que en 1988 Fujimoto respondió afirmativamente a la pregunta.

Teorema 2 (Fujimoto) *La aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana en \mathbb{R}^3 no puede omitir 5 puntos distintos de \mathbb{S}^2 .*

En los años sesenta, Osserman recuperó la representación para superficies minimales dada por Enneper y Weierstrass, permitiendo un gran avance en la teoría de superficies minimales completas (esto es lo que explicaré brevemente en la sección siguiente). Cabe destacar, en 1984, el sorprendente descubrimiento por Costa de una nueva superficie minimal completa. A partir de entonces, se ha encontrado una enorme cantidad de nuevas

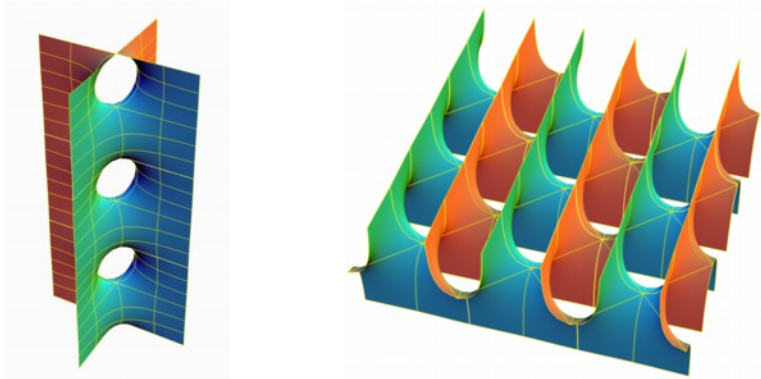


Figura 2: Superficies minimales de Scherk simple y doblemente periódicas.

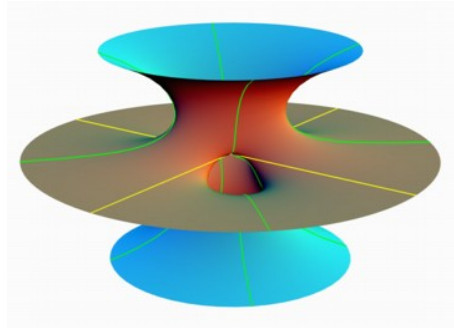


Figura 3: Superficie minimal de Costa.

superficies minimales completas (Costa, Hoffman, Karcher, Meeks). Ahora, el objetivo es obtener resultados de clasificación y no existencia de superficies minimales con ciertos tipos topológicos, comportamiento asintótico, estructura de espacios de superficies minimales con cierta topología y geometría prescritas (Collin, Hoffman, López, Meeks, Pérez, Rosenberg, Rodríguez, Ros, Traizet).

Por último, las superficies minimales no son sólo interesantes desde un punto de vista matemático; también juegan un papel importante en Física, Química, Biología e Ingeniería. Por poner algunos ejemplos, las superficies minimales han sido usadas para modelar las interfases en ciertas microemulsiones de copolímeros, han servido de modelo en la construcción de diversos tipos de cubiertas de grandes espacios (estadio olímpico de Munich) o han permitido resolver afirmativamente la conjetura de la masa positiva en la teoría de la relatividad general.

2. Representación de Weierstrass

Es bien sabido que, si $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión isométrica, M una superficie de Riemann (elegimos parámetros isotermos), entonces

$$\Delta X = 2\lambda^2 H N, \quad (2)$$

donde λ^4 es el determinante de la primera forma fundamental de M (estamos identificando $M \equiv X(M)$), $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ es la aplicación de Gauss de M y H es la curvatura media respecto de N ([1] pág. 204, [4] pág. 27). Por tanto, obtenemos la siguiente caracterización de las superficies minimales.

Proposición 3 *Sea $X = (x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión isométrica. Entonces, $M \equiv X(M)$ es una superficie minimal si y sólo si sus funciones coordenadas x_1, x_2, x_3 son armónicas (es decir, $\Delta x_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$).*

Como x_3 es armónica, es localmente la parte real de una función holomorfa $h = x_3 + i x_3^*$ (x_3^* es la *conjugada armónica* de x_3 , que está bien definida salvo constante aditiva). Llamaremos a su diferencial dh la *diferencial altura*. Nótese que aunque h está definida localmente, dh está globalmente bien definida. Veremos que se puede recuperar la inmersión X como

$$X = \operatorname{Re} \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right) dh, \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right) dh, dh \right) + C, \quad (3)$$

para cierta constante $C \in \mathbb{R}^3$, donde g es la composición de la aplicación de Gauss N de M con la proyección estereográfica (seguiremos llamando a g aplicación de Gauss de M), que veremos que es meromorfa. De hecho, dada una función meromorfa $g : M \rightarrow \mathbb{C}$ y una 1-forma holomorfa dh , daremos condiciones para que (3) defina una inmersión minimal.

Los resultados que siguen los he sacado en su mayor parte del libro de Osserman [4].

Lema 4 *Sean $D \subset \mathbb{C}$ un dominio, $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tales que si z_0 es un polo de g de orden m , entonces z_0 es un cero de f de orden al menos $2m$. Entonces, las funciones*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg \quad (4)$$

definidas en D son holomorfas y cumplen

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \quad (5)$$

Recíprocamente, cualesquiera tres funciones holomorfas $\phi_i : D \rightarrow \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, 3$) cumpliendo (5) se pueden escribir como en (4) para ciertas $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

Demostración. Como los polos de g son ceros de f de orden el doble, las funciones ϕ_i definidas en (4) son holomorfas. Además, $(\frac{1}{2}f(1-g^2))^2 + (\frac{i}{2}f(1+g^2))^2 + (fg)^2 =$

$$= \frac{1}{4}f^2(1+g^4-2g^2) - \frac{1}{4}f^2(1+g^4+2g^2) + f^2g^2 = \frac{1}{4}f^2(-4g^2) + f^2g^2 = 0.$$

Probemos, pues, el recíproco. Sean $\phi_i : D \rightarrow \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, 3$) cumpliendo (5), y tomemos

$$f = \phi_1 - i\phi_2 \quad g = \frac{\phi_3}{f}.$$

Con estas definiciones de f, g , se cumple claramente que $\phi_3 = gf$. Veamos que también se cumplen las dos primeras igualdades de (4). Nótese que $(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2$, de donde se deduce que $\phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$.

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1 - i\phi_2 = -f \\ \phi_1 + i\phi_2 = -fg^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2\phi_1 = f(1-g^2) \\ -2i\phi_2 = f(1+g^2) \end{array} \right\}$$

□

Lema 5 *Toda superficie minimal (regular) $M \subset \mathbb{R}^3$ inmersa se puede representar localmente de la forma*

$$X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi + C, \quad (6)$$

donde $C \in \mathbb{C}$, $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ es a lo que se llama forma de Weierstrass, las ϕ_i están definidas en (4) para ciertas g meromorfa y f holomorfa definidas sobre un disco $D \subset \mathbb{C}$ (posiblemente \mathbb{C}), y $z_0 \in D$.

Demostración. Sea $X = (x_1, x_2, x_3) : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ una representación local de M . Como M es minimal, sabemos que las x_j son armónicas sobre $z = u_1 + iu_2$; y por tanto, las funciones $\phi_j : D \rightarrow \mathbb{C}$ definidas como sigue

$$\phi_j = \frac{\partial x_j}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_j}{\partial u_2}$$

son holomorfas y cumplen (6). Podemos suponer que u_1, u_2 son parámetros isotermos. Entonces, $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \frac{\partial x_j}{\partial u_2} = \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right|^2 - \left| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2 - 2i \langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \rangle = 0$. Ya acabamos por el Lema 4. □

Al par (g, f) es a lo que se suele llamar *datos de Weierstrass*. Para ver que (6) coincide con (3), nótese que $\phi_3 = dh$. Falta ver que g es la composición de la aplicación de Gauss de la superficie minimal M con la proyección estereográfica.

A partir de la expresión de las ϕ_j en la demostración anterior, deducimos que $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_1}\right)^2 + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_2}\right)^2 = \left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2 = 2|dS|^2$ (dS es la métrica Riemanniana en M). Luego

$$\begin{aligned} |dS|^2 &= \frac{1}{8}|f|^2 (|1 - g^2|^2 + |1 + g^2|^2 + 4|g|^2) \\ &= \frac{1}{8}|f|^2 ((1 - \operatorname{Re}(g^2))^2 + (\operatorname{Im}(g^2))^2 + (1 + \operatorname{Re}(g^2))^2 + (\operatorname{Im}(g^2))^2 + 4|g|^2) \\ &= \frac{1}{4}|f|^2 (1 + (\operatorname{Re}(g^2))^2 + (\operatorname{Im}(g^2))^2 + 2|g|^2) = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^4 + 2|g|^2) = \left(\frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2)\right)^2 \\ &\Rightarrow |dS|^2 = \left(\frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2)\right)^2. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que X definida en el lema 5 es una inmersión si y sólo si se cumple:

$$z_0 \text{ es un polo de } g \text{ de orden } m \Leftrightarrow z_0 \text{ es un cero de } f \text{ de orden } 2m. \quad (7)$$

Por otra parte, $\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}$ es normal a la superficie, luego

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}\right|}.$$

Como $\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} = (\operatorname{Im}(\phi_2 \overline{\phi_3}), \operatorname{Im}(\phi_3 \overline{\phi_1}), \operatorname{Im}(\phi_1 \overline{\phi_2})) = \frac{|f|^2(1+|g|^2)}{4} (2 \operatorname{Re}(g), 2 \operatorname{Im}(g), |g|^2 - 1)$.
Entonces, $\left|\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}\right| = \left(\frac{1}{2}|f|(1 + |g|^2)\right)^2$ y

$$N = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right) = \Pi_e^{-1}(g),$$

donde $\Pi_e : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Pi_e(p_1, p_2, p_3) = \frac{p_1}{1-p_3} + i \frac{p_2}{1-p_3}$ es la proyección estereográfica. De aquí se deduce que $g = \Pi_e \circ N$, como queríamos probar.

Con esto, se puede deducir (las cuentas están hechas en el Osserman) que las curvaturas principales vienen dadas por

$$k_1 = \frac{4|dg|}{|f|(1 + |g|^2)^2}, \quad k_2 = \frac{-4|dg|}{|f|(1 + |g|^2)^2},$$

de donde se obtiene la curvatura de Gauss

$$K = - \left(\frac{4|dg|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \right)^2 < 0.$$

Nótese que en la demostración del Lema 5 hemos tomado D simplemente conexo para que X dada en (6) estuviese bien definida. Pero bastaría con exigir que D cumpla que $\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi = 0$ para cualquier curva cerrada $\Gamma \subset D$ (siendo Φ la forma de Weierstrass). Si eso ocurre, se dice que los datos de Weierstrass (g, f) correspondientes cierran periodos. $\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi$ es a lo que llamaremos *periodo* a lo largo de Γ , y lo denotaremos por $\operatorname{Per}(\Gamma)$.

Si $\operatorname{Per}(\Gamma) = 0$, entonces diremos que Γ *cierra periodos*. Y estudiar si D cumple que todas las curvas cerradas contenidas en D cierran periodos (es decir, si los datos de Weierstrass cierran periodos) es a lo que se suele llamar el *problema de periodos*.

Con todo lo anterior, cabe esperar el siguiente teorema más general.

Teorema 6 M denotará una superficie de Riemann.

1. Sea $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión isométrica, g su aplicación de Gauss y dh su diferencial altura. Entonces, X viene dada por (3).
2. Sean $g : M \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa cumpliendo (7). Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, con las ϕ_j definidas como en (4). Si $\operatorname{Per}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \Phi = 0$ para toda curva $\Gamma \subset M$ cerrada, entonces $X = \int \Phi$ define una inmersión minimal.

Observación 7 Basta probar que $\operatorname{Per}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \Phi = 0$ para un representante de cada clase de homología de $H_1(M, \mathbb{Z})$.

En algunos casos, es conveniente conocer cuáles son las isometrías de la superficie, porque en tal caso basta representar un trozo “conveniente” de la superficie (y obtener el resto como imagen de dicho trozo por una de las isometrías de la superficie).

Proposición 8 Denotaremos por $\dot{\Gamma}$ la derivada de la curva $\Gamma \subset M$.

1. Si $\frac{dg}{g}(\dot{\Gamma})\phi_3(\dot{\Gamma}) \in \mathbb{R} \Rightarrow \Gamma$ es una geodésica plana de simetría.
2. Si $\frac{dg}{g}(\dot{\Gamma})\phi_3(\dot{\Gamma}) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \Gamma$ está contenida en una recta.

Teorema 9 (Principio de Reflexión de Schwarz, [2]) Si una superficie minimal M contiene un segmento rectilíneo l , entonces M es invariante por la rotación de ángulo π alrededor de la recta que contiene a l . Además, si M contiene en su frontera un segmento rectilíneo l , entonces M se puede extender por la rotación de ángulo π alrededor de la recta que contiene a l , obteniendo así una superficie minimal que contiene a l en su interior.

3. Ejemplos sencillos

1. **El plano.** $M = \mathbb{C}$, $g = 0$, $f = 1 \rightarrow X(z) = \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{2}, -\frac{\operatorname{Im}(z)}{2}, 0 \right)$.
2. **La catenoide.** $M = \mathbb{C}^*$, $g(z) = z$, $f(z) = \frac{1}{z^2}$

$$X(z) = \left(1 - \frac{\operatorname{Re}(z)}{2} \left(1 + \frac{1}{|z|^2} \right), -\frac{\operatorname{Im}(z)}{2} \left(1 + \frac{1}{|z|^2} \right), \frac{1}{2} \ln(|z|^2) \right).$$

En coordenadas polares, queda

$$X(re^{it}) = \left(1 - \frac{1+r^2}{2r} \cos t, -\frac{1+r^2}{2r} \sin t, \frac{1}{2} \ln(r^2) \right).$$

3. **El helicoide.** $M = \mathbb{C}^*$, $g(z) = z$, $f(z) = \frac{i}{z^2}$

$$X(z) = \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{2} \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right), -\frac{\operatorname{Re}(z)}{2} \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right), -\arg(z) \right).$$

En coordenadas polares, queda

$$X(re^{it}) = \left(\frac{r^2-1}{2r} \sin t, -\frac{r^2-1}{2r} \cos t, -t \right).$$

La catenoide y el helicoide son superficies conjugadas. En general, si M es una superficie minimal con datos de Weierstrass (g, f) , consideramos sus datos de Weierstrass conjugados (g, if) (definidos en la misma superficie de Riemann). Diremos que existe la *superficie conjugada* M^* de M si los datos de Weierstrass (g, if) cierran periodos; y en tal caso, las funciones coordenadas de M^* son las conjugadas armónicas x_j^* de las funciones coordenadas x_j de M .

4. Ejemplos periódicos

Sean M una superficie de Riemann, $g : M \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación meromorfa y $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa cumpliendo (7). Consideramos $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, ϕ_j definidas en (4). Supongamos que $T = \operatorname{Per}(\Gamma_0) = \int_{\Gamma_0} \Phi \neq 0$ para cierta curva $\Gamma_0 \subset M$ cerrada, pero $\operatorname{Per}(\Gamma) = 0$ para cualquier $[\Gamma] \neq [\Gamma_0]$ en $H_1(M, \mathbb{Z})$. Entonces,

$$X = \int \Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/T$$

define una inmersión minimal (en el cociente de \mathbb{R}^3 por la traslación de vector T). Si dibujamos simultáneamente todas las superficies de $X(M) + T\mathbb{Z}$, obtenemos una superficie minimal invariante por la traslación T (diremos que dicha superficie es *simplemente periódica*).

Voy a explicar la construcción de un ejemplo doblemente periódico; es decir, obtendremos dos curvas cerradas en distintas clases de homología que darán vectores periodo linealmente independientes, y las demás clases de homología tendrán periodo 0.

Consideramos $M = \{(z, w) \mid w^2 = (z^2 + l^2)(z^2 + l^{-2})\}$, $l > 1$, $g(z, w) = z$ y $f(z, w) = \frac{1}{zw}$. Para $l = 2$, nos queda:

$$X(z) = \int_0^z \left(\frac{1 - h^2}{h\sqrt{(4 + h^2)(1 + 4h^2)}}, \frac{i(1 + h^2)}{h\sqrt{(4 + h^2)(1 + 4h^2)}}, \frac{2}{\sqrt{(4 + h^2)(1 + 4h^2)}} \right) dh.$$

Se puede probar que estos datos de Weierstrass cierran periodos en un ambiente doblemente periódico (ver [5]).

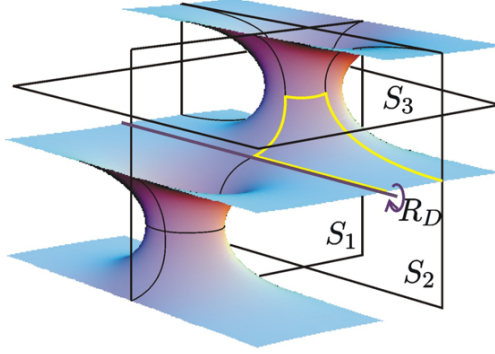


Figura 4: Superficie de Karcher (*Toroidal Halfplane Layer*). El “trozo fundamental” del que hablaba abajo está bordeado en amarillo.

Para dibujar esta superficie, tenemos en cuenta sus isometrías y usamos coordenadas polares:

- Las curvas $\{|z| = 1\}$ son geodésicas planas de simetría, luego la superficie es simétrica respecto de un plano paralelo al plano coordenado x_1x_2 (denotamos por S_3 dicha simetría);
- Las curvas $\{z \in \mathbb{R}\}$ son geodésicas planas de simetría, luego la superficie es simétrica respecto de un plano paralelo al plano x_1x_3 (denotamos por S_2 dicha simetría);
- Las curvas $\{z \in iI\}$, $I = (-\lambda, -\lambda^{-1}) \cup (\lambda^{-1}, \lambda)$, son geodésicas planas de simetría, luego la superficie es simétrica respecto de un plano paralelo al plano x_2x_3 (denotamos por S_1 dicha simetría);
- Las curvas $\{z \in i(\mathbb{R} - I)\}$, $I = (-\lambda, -\lambda^{-1}) \cup (\lambda^{-1}, \lambda)$ son líneas rectas, luego la rotación de ángulo π alrededor de cada una de dichas rectas es una isometría R_D de la superficie;

- Dibujamos $X(r, t) = X(re^{it})$ para $0 \leq r \leq 1$ y $-\pi/2 \leq t \leq 0$ (un “trozo fundamental”), y simetrizamos usando S_1, S_2, S_3, R_D .

Referencias

- [1] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., USA (1976).
- [2] D. Hoffman & H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, in 'Geometry V', Encyclopaedia of Math. Sci. **90** (R. Osserman, ed.), Springer-Verlag (1997) 5-93.
- [3] H. Karcher. *Construction of minimal surfaces*, *Surveys in Geometry*, pp 1-96, University of Tokyo (1989) y Lecture Notes No. 12, SFB256, Bonn (1989).
- [4] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications, Inc., New York (1969).
- [5] M. M. Rodríguez, The space of doubly periodic minimal tori with parallel ends: Standard Examples. Preprint (arXiv.math.math.DG/0501241 v2 19 Jan 2005).