Universidad de Granada



Representación de Bryant

José Mª. Espinar García

$\acute{\mathbf{I}}\mathbf{ndice}$

1.	Intr	oducción Histórica	2	
2.	Rep	Representación de superficies en el espacio hiperbólico		
	2.1.	Modelos del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3	2	
		2.1.1. El modelo del semiespacio superior	3	
		2.1.2. El modelo de Poincaré	4	
		2.1.3. El modelo hermítico	4	
3.	Rep	resentación de Bryant	6	
	3.1.	Conceptos Generales	6	
	3.2.	Teorema de representación	8	
4.	Aplicaciones 1			
	4.1.	La correspondencia de Lawson	12	
	4.2.	El problema de periodos	12	
	4.3.	Curvatura total finita	13	
		Dualidad sobre superficies de Bryant	14	
	4.5.	Imposición de propiedades geométricas	14	
	4.6.	Representación de superficies llanas en \mathbb{H}^3	15	
		Ejemplos	18	

1. Introducción Histórica

Está completamente aceptado que la teoría de superficies de curvatura de media constante uno en el espacio hiperbólico comenzó con el trabajo seminal de R. Bryant [Bry], donde obtuvo una representación de tales superficies en términos de datos holomorfos, en analogía con la fórmula de representación de Weierstrass en \mathbb{R}^3 .

Después de la aparición de dicho trabajo, muchos otros matemáticos contribuyeron en el tema. Entre ellos, M. Umeara y K. Yamada [UY], refinaron considerablemente el trabajo de Bryant, y fueron capaces de construir una variada clase de ejemplos de superficies de curvatura media uno en \mathbb{H}^3 , que se conocen como superficies de Bryant, así como desarrollar muchos de los interesantes aspectos globales de la teoría. Por otra parte, A.J. Small re-interpretó las superficies de Bryant, dando en particular una fórmula tipo Weierstrass para dichas superficies involucrando operaciones algebraicas en las derivadas hasta la de segundo orden de un par (f,g) de funciones holomorfas. Además, otras muchas contribuciones se han hecho al respecto [CHR, HRR, UY2, UY3].

Aunque para ser totalmente correcto, cabria remontarse a Bianchi [Bi], donde podemos encontrar un método explícito para construir superficies de curvatura media constante uno en el espacio hiperbólico a partir de datos holomorfos.

A lo largo de estas hojas daremos una demostración alternativa del resultado de Bryant [GaMi], debido a dos motivos principalemente:

Por una parte, la demostración original de Bryant usa técnicas y notaciones de la teoría general de subvariedades. No obstante, estas herramientas no han seguido utilizándose en el posterior estudio de las superficies de curvatura media constante en el espacio hiperbólico. En contraposición, la demostración que aquí presentamos usa técnicas standard de la teoría.

Por otra parte, la posibilidad de obtener un representación meromorfa para una clase de superficies es de gran importancia, ya que los poderosos teoremas del análisis complejo permiten un estudio muy preciso de la geometría global de dicha familia. Por lo tanto, una línea de investigación con un importante número de contribuciones en los últimos años a sido generalizar la representación de Bryant a otras teorías geométricas [AA, AA2, GMM, KTUY]. En este sentido, la importancia de una demostración alternativa es obvia, ya que puede sugerir generalizaciones de la teoría.

2. Representación de superficies en el espacio hiperbólico

2.1. Modelos del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3

Vamos a estudiar superficies inmersas con curvatura media uno en el espacio hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 , esto es, la única variedad riemanniana 3-dimensional simplemente conexa, completa y de curvatura seccional constante -1. En esta sección vamos a exponer diversos modelos geométricos para \mathbb{H}^3 .

Recordemos que el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 puede ser realizado como una hipercuádrica en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^4 . Así, \mathbb{L}^4 será el espacio \mathbb{R}^4 dotado de la métrica lorentziana

$$\langle , \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

donde (x_0, \ldots, x_3) son coordenadas canónicas de \mathbb{R}^4 . Con esto, el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3

$$\mathbb{H}^3 = \{ (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{L}^4 : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_0 > 0 \}$$
 (1)

con la métrica riemanniana inducida por la de \mathbb{L}^4 .

Otras hipercuádricas que serán utilizadas son el espacio de De Sitter

$$\mathbb{S}_1^3 = \{ (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{L}^4 : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$$
 (2)

y el cono de luz positivo

$$\mathbb{N}^3 = \{ (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{L}^4 : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_0 > 0 \}.$$
 (3)

Sea $O_1^{\uparrow}(4)$ el grupo ortocrono de Lorentz, formado por todas las transformaciones lineales de \mathbb{R}^4 que conservan el producto y la orientación temporal de \mathbb{L}^4 , y por tanto llevan \mathbb{N}^3 en sí mismo. Entonces el grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 viene dado por la restricción a \mathbb{H}^3 de las transformaciones del grupo $O_1^{\uparrow}(4)$. En particular, las superficies totalmente geodésicas (resp. las geodésicas) de \mathbb{H}^3 son la intersección de \mathbb{H}^3 con hiperplanos (resp. planos) temporales vectoriales de \mathbb{L}^4 .

El producto vectorial \mathbb{L}^4 induce de manera natural un producto exterior en \mathbb{H}^3 . Más concretamente, si $q \in \mathbb{H}^3$ el producto exterior de $u, v \in T_q\mathbb{H}^3$, $u \wedge v$, es

$$u \wedge v = q \times u \times v$$
.

Este producto está relacionado con la orientación canónica de \mathbb{H}^3 : una base $\{u, v, w\}$ de $T_q\mathbb{H}^3$ está positivamente orientada si $\det(q, u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle > 0$. En particular, si $\psi: M^2 \to \mathbb{H}^3$ es una superficie inmersa en \mathbb{H}^3 con normal unitario $\eta: M^2 \to \mathbb{S}^3_1$, entonces una base $\{X, Y\}$ tangente a la superficie está positivamente orientada si $X \wedge Y = \lambda \eta$ para $\lambda > 0$.

A partir de esta realización de \mathbb{H}^3 dentro de \mathbb{L}^4 vamos a comentar tres modelos distintos del espacio hiperbólico. Los dos primeros serán utilizados esencialmente para representar gráficamente superficies en \mathbb{H}^3 , mientras que el tercero será el modelo en el cual trabajaremos.

2.1.1. El modelo del semiespacio superior

Consideremos $\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ el semiespacio superior de \mathbb{R}^3 , y definamos sobre él la métrica

$$ds^{2} = \frac{1}{x_{3}^{2}} \left(dx_{1}^{2} + dx_{2}^{2} + dx_{3}^{2} \right). \tag{4}$$

Dicha métrica tiene curvatura constante -1, y la correspondencia entre $\mathbb{H}^3\subset\mathbb{L}^4$ y \mathbb{R}^3_+ dada por

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3 \longleftrightarrow \frac{1}{x_0 + x_3} (x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3_+$$
 (5)

es una isometría entre \mathbb{H}^3 y (\mathbb{R}^3_+, ds^2) .

Vamos a comentar las isometrías de este modelo. Para empezar, es claro de (4) que las traslaciones y rotaciones horizontales son isometrías de \mathbb{R}^3_+ . Además, para $\lambda > 0$ y

 $(y_1, y_2, 0)$ un punto del borde $x_3 = 0$ de este modelo, la aplicación de \mathbb{R}^3_+ en \mathbb{R}^3_+ dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \lambda(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3)$$

es una isometría de (\mathbb{R}^3_+, ds^2) , a la que denomiremos traslación hiperbólica vertical. Geométricamente, representa una homotecia euclídea de centro $(y_1, y_2, 0)$ y razón λ .

Si escogemos de nuevo $(y_1, y_2, 0)$ en el borde de \mathbb{R}^3_+ , $\lambda > 0$, y $||\cdot||$ denota la norma de \mathbb{R}^3 , entonces la aplicación

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+ \to (y_1, y_2, 0) + \lambda^2 \frac{(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3)}{||(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3)||^2}$$

vuelve a ser una isometría de (\mathbb{R}^3_+, ds^2) . Estas simetrías se denominan reflexiones hiperbólicas, y desde el punto de vista euclídeo representan inversiones en \mathbb{R}^3_+ de una esfera de centro $(y_1, y_2, 0)$ y radio λ . Como caso límite de esta situación, tenemos simetrías euclídeas en hiperplanos verticales, que también serán vistas como reflexiones hiperbólicas.

Las geodésicas en este modelo son rectas verticales y semicírculos que intersecan al borde $\partial \mathbb{R}^3_+$ ortogonalmente. Los espacios totalmente geodésicos son planos verticales y semiesferas que intersecan a $\partial \mathbb{R}^3_+$ ortogonalmente.

2.1.2. El modelo de Poincaré

Sea \mathbb{B}^3 la bola unidad en $\mathbb{R}^3,$ y dotémos
la de la métrica riemanniana de curvatura constante -1 dada por

$$d\sigma^2 \frac{4}{(1-||x||^2)^2} \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right),$$

siendo $||\cdot||$ la norma euclídea de \mathbb{R}^3 y $x=(x_1,x_2,x_3)$. Entonces la aplicación de \mathbb{R}^3_+ sobre \mathbb{B}^3 dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+ \longrightarrow \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2} (2x_1, 2x_2, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \in \mathbb{B}^3$$

define una isometría entre (\mathbb{R}^3_+, ds^2) y $(\mathbb{B}^3, d\sigma^2)$.

Las superficies totalmente geodésicas en el modelo de la bola de Poincaré son los casquetes esféricos y los discos que cortan ortogonalmente al borde de la bola \mathbb{B}^3 .

2.1.3. El modelo hermítico

La utilización del modelo que vamos a presentar permite simplificar considerablemente los cálculos. Este modelo está expuesto en [Bry], por ejemplo.

Para empezar, identificaremos a \mathbb{L}^4 con el conjunto de las matrices hermíticas 2×2 , Herm(2), mediante la relación

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \text{Herm}(2).$$

Bajo esta identificación, el producto lorentziano de \mathbb{L}^4 se traduce sobre Herm(2) en

$$\left\langle \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ \overline{b_1} & c_1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ \overline{b_2} & c_2 \end{array}\right) \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\{ a_1 c_2 + a_2 c_1 - b_1 \overline{b_2} - b_2 \overline{b_1} \right\}.$$

En particular, para cada $m \in \text{Herm}(2)$ se tiene $\langle m, m \rangle = -\det(m)$.

El grupo de Lie complejo $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ compuesto por las matrices complejas 2×2 de determinante 1 actúa de forma natural sobre \mathbb{L}^4 mediante la acción

$$\Phi \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \mapsto \Phi \cdot m = \Phi m \Phi^*, \quad m \in \mathrm{Herm}(2).$$

Aquí $\Phi^* = \bar{\Phi}^t$, denota la matriz traspuesta y conjugada de Φ .

De este modo $\det(\Phi m \Phi^*) = \det(m)$, por lo que la acción conserva tanto la métrica como la orientación temporal de \mathbb{L}^4 .

En este modelo de \mathbb{L}^4 , el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 dado por (1) se representa como

$$\mathbb{H}^3 = \{ \Phi \Phi^* : \Phi \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \}, \tag{6}$$

mientras que el espacio de De Sitter (2) viene descrito por

$$\mathbb{S}_1^3 = \left\{ \Phi \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \Phi^* : \Phi \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \right\}. \tag{7}$$

Finalmente, el cono de luz positivo (3) puede ser contemplado como el conjunto de matrices semidefinidas positivas en Herm(2) de determinante cero, las cuales se descomponen como

$$\mathbb{N}^3 = \{ w\bar{w}^t : w^t = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \}, \tag{8}$$

Dicho $w \in \mathbb{C}^2$ está determinado salvo multiplicación por un número complejo de módulo uno.

Si consideramos el cociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$ bajo la relación de equivalencia proyectiva usual, tenemos una identificación natural de $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$ con el borde ideal \mathbb{S}^2_{∞} de \mathbb{H}^3 . De este modo, la métrica inducida sobre dicho cociente está definida salvo un factor de proporcionalidad, por lo que \mathbb{S}^2_{∞} hereda una estructura conforme natural.

Más aún, la aplicación de \mathbb{N}^3 en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ dada por $w\bar{w}^t \mapsto [w]$ se convierte en la proyección de \mathbb{N}^3 en $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+ \equiv \mathbb{S}^2_{\infty}$ e identifica a \mathbb{S}^2_{∞} con $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Dicha proyección se expresa en coordenadas como

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \longmapsto \frac{x_1 - ix_2}{x_0 + x_3} \in \mathbb{C}_{\infty} \equiv \mathbb{C}\mathbf{P}^1.$$
 (9)

De esta manera, la acción natural de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ sobre \mathbb{S}^2_{∞} es la de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ por transformaciones de Möbius.

La manera en la que vamos a orientar \mathbb{S}^2_{∞} es la que sigue: dado $p \in \mathbb{N}^3$ podemos tomar $e_0 \in \mathbb{H}^3$ y $e_3 \in \mathbb{S}^3_1$ tales que $p = e_0 + e_3$, $\langle e_0, e_3 \rangle = 0$. Sea Π el plano generado por e_0, e_3 , y tomemos una base $\{e_1, e_2\}$ de Π^{\perp} . Así, e_1, e_2 son tangentes a \mathbb{N}^3 en p, y se inducen de modo obvio a \mathbb{S}^2_{∞} como vectores tangentes en [p]. Diremos entonces que e_1, e_2 forman una base positivamente orientada para \mathbb{S}^2_{∞} en [p] si y sólo si la base $\{e_0 + e_3, e_1, e_2, e_0 - e_3\}$ está positivamente orientada en \mathbb{L}^4 . Esto es, si y sólo si $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ está negativamente orientada. Un cálculo inmediato muestra que este proceso es independiente de la elección de e_1, e_2 , y así determina una orientación en \mathbb{S}^2_{∞} .

3. Representación de Bryant

3.1. Conceptos Generales

Esta sección expone una demostración alternativa de la representación de Bryant para superficies de curvatura media uno en \mathbb{H}^3 . Antes de empezar a tratar dichas superficies es conveniente dar un par de conceptos generales sobre superficies en \mathbb{H}^3 .

Sea $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ una superficie inmersa en \mathbb{H}^3 , y denotemos por $\eta: \Sigma \to \mathbb{S}^3_1$ a su normal unitario en \mathbb{H}^3 , de modo que si z=s+it es un parámetro complejo de la superficie de Riemann Σ , $\{\psi, \psi_s, \psi_t, \eta\}$ es una base positivamente orientada de \mathbb{L}^4 . Entonces

- 1. La aplicación $\psi + \eta : \Sigma \to \mathbb{L}^4$ toma sus valores en el cono de luz positivo \mathbb{N}^3 , y así podemos considerar su proyección al cociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$. Con ello obtenemos una aplicación $G = [\psi + \eta] : \Sigma \to \mathbb{S}^2_{\infty}$, conocida como la aplicación de Gauss hiperbólica de la superficie. La interpretación geométrica de G es la siguiente: para cada f es la única geodésica orientada de \mathbb{H}^3 que parte de f con velocidad inicial f pura la frontera ideal f en el punto f punto
- 2. Denotemos por z a un parámetro conforme local de la superficie de Riemann Σ que, recordemos, hereda su estructura conforme de la métrica de ψ . Entonces la 2-forma compleja local $\langle \psi_{zz}, \eta \rangle dz^2$ se extiende a una 2-forma compleja global

$$Q = \langle \psi_{zz}, \eta \rangle dz^2$$

sobre Σ . Llamaremos a Q la diferencial de Hopf de la superficie ψ . Es conveniente observar que Q se anula precisamente en los puntos umbilicales de ψ .

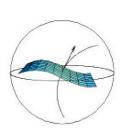


Figura 1: La aplicación de Gauss hiperbólica en el modelo de Poincaré

Para una superficie de curvatura media uno en \mathbb{H}^3 , al igual que para cualquier otra superficie de curvatura media constante, la diferencial de Hopf es holomorfa. La importancia del caso particular H=1 viene dada en gran parte por el siguiente resultado de R.L. Bryant [Bry].

Lema 1 La aplicación de Gauss hiperbólica de una superficie en \mathbb{H}^3 es conforme si y sólo si la superficie es totalmente umbilical (en cuyo caso G invierte la orientación) o tiene curvatura media uno (y G conserva la orientación).

Demostración: Sea z un parámetro conforme local de la superficie $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ de modo que la métrica se expresa como $\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda |dz|^2$ para una función diferenciable positiva λ , y denotemos $q(z) = \langle \psi_{zz}, \eta \rangle$. Si z = s + it y

$$\begin{array}{rcl}
-\eta_s & = & a_{11}\psi_s + a_{12}\psi_t, \\
-\eta_t & = & a_{12}\psi_s + a_{22}\psi_t,
\end{array}$$

entonces la curvatura media de ψ es $H=(a_{11}+a_{22})/2$, por lo que tenemos

$$\eta_z = -H\psi_z - \frac{2q}{\lambda}\psi_{\bar{z}}.\tag{10}$$

Así, resulta que $\langle (\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_z \rangle - 2q(1 - H)$, por lo que G es conforme en $z_0 \in \Sigma$ si y sólo si q(1 - H) = 0 sobre z_0 . Notemos adicionalmente que los puntos en los que q se anula son precisamente los puntos umbilicales de ψ . Sea $A \subset \Sigma$ el abierto de Σ formado por los puntos en que $H \neq 1$, y supongamos que A es no vacío. Si tomamos entonces una componente conexa V de A, acabamos de razonar que todos los puntos de V son umbilicales. En particular H es constante en V, por lo que también es constante sobre su adherencia \overline{V} . Al ser V componente conexa, esto indica que $V = \overline{V}$, y resulta por conexión en Σ que $V = \Sigma$. Esto es, la superficie es totalmente umbilical.

Si ψ es totalmente umbilical, (10) indica que $(\psi + \eta)_z = (1 - H)\psi_z$, por lo que la orientación inducida sobre Σ por $\psi + \eta$ es positiva. Esto indica que $G = [\psi + \eta]$ invierte la orientación.

Por contra, si H=1, de nuevo (10) muestra que $(\psi+\eta)_z=(-2q/\lambda)\psi_{\bar{z}}$. Esto garantiza que $\psi+\eta$ invierte la orientación en sus puntos regulares, y por tanto G la conserva. Así concluye la prueba.

Del lema que acabamos de demostrar se obtiene directamente que cuando vemos a G como una aplicación de Σ en \mathbb{C}_{∞} mediante (9), G es meromorfa si y sólo si H = 1.

Para el caso H=-1, invirtiendo la orientación en el Lema 1, vemos que si definimos $G^-=[\psi-\eta]:\Sigma\to\mathbb{S}^2_\infty$ entonces G^- es conforme si y sólo si ψ es una superficie de curvatura media -1, o totalmente umbilical. Pero esta vez en el primer caso G^- invierte la orientación, por lo que al ver a G^- como aplicación de Σ en \mathbb{C}_∞ resulta que es antiholomorfa.

Definicion 2 Una superficie de Bryant es una superficie inmersa en \mathbb{H}^3 con curvatura media constante de valor uno.

Observemos antes de nada que toda superficie de Bryant es orientable. Este hecho se desprende de que el campo curvatura media de la superficie de Bryant en \mathbb{H}^3 es normal a ella, y no se anula en ningún punto.

Entre las superficies de Bryant existen ciertos ejemplos que se comportan de manera análoga a los planos en \mathbb{R}^3 . Dichas superficies se denominan *horosferas*, y vienen caracterizadas por ser las únicas superficies de Bryant totalmente umbilicales. En consecuencia, tienen diferencial de Hopf idénticamente nula y métrica llana. Además, como consecuencia del Lema 1, también admiten la caracterización de ser las únicas superficies en \mathbb{H}^3 con aplicación de Gauss hiperbólica constante.

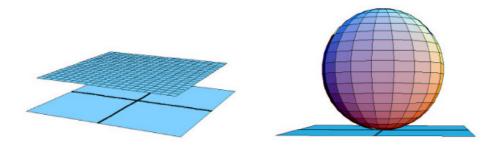


Figura 2: Horosferas en el modelo del semiespacio superior

Geométricamente, una horosfera es la intersección de $\mathbb{H}^3\subset\mathbb{L}^4$ con un hiperplano degenerado (afín) de \mathbb{L}^4 . En el modelo del semiespacio superior, las horosferas son planos horizontales, o esferas tangentes al borde $\partial\mathbb{H}^3_+$, mientras que en el modelo de Poincaré representan esferas euclídeas que son tangentes a la frontera $\partial\mathbb{B}^3$ en un solo punto.

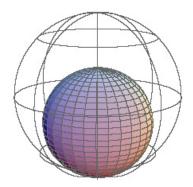


Figura 3: Una horosfera en el modelo de Poincaré

3.2. Teorema de representación

Llegados a este punto, vamos a dar una representación holomorfa de las superficies de Bryant. Hasta ahora conocemos dos datos geométricos de dichas superficies que han de ser holomorfos, a saber, la diferencial de Hopf Q y la aplicación de Gauss hiperbólica G. El tercer dato holomorfo esencial viene dado por una cierta función geométrica ϕ definida sobre Σ que verifica la ecuación de Liouville elíptica

$$\Delta \log \phi = -2\phi. \tag{11}$$

La propiedad fundamental de dicha ecuación es que admite una resolución holomorfa, tal y como le ocurre a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. Más concretamente, si ϕ satisface

(14) en un abierto simplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ existe una función meromorfa g sobre Ω tal que

$$\phi = \frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2}. (12)$$

La interpretación de la ecuación de Liouville elíptica en nuestro contexto geométrico es bien sencilla: si $d\sigma^2$ es una pseudo-métrica de curvatura constante 1 en una superficie simplemente conexa no compacta M^2 , y tomamos un parámetro complejo global z en M^2 tal que $d\sigma^2 = \rho |dz|^2$ para una función diferenciable y no negativa ρ , entonces ρ satisface la ecuación de Liouville elíptica (14). Recíprocamente, toda solución de (14) determina una pseudo-métrica de curvatura 1.

Vamos a comprobar que los tres datos que acabamos de comentar son suficientes para recuperar la inmersión.

Teorema 3 (Representación de Bryant) Sea $\mathcal{B}: \Sigma \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ una inmersión holomorfa de una superficie de Riemannn Σ en $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ con $\det(d\mathcal{B}) = 0$. Entonces la aplicación $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ dada por $\psi = \mathcal{BB}^*$ tiene curvatura media uno.

Recíprocamente, toda superficie simplemente conexa con curvatura media uno en \mathbb{H}^3 se construye esta forma.

Demostración: Sea $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ una superficie de Bryant simplemente conexa, y tomemos un parámetro complejo global z en Σ tal que $\langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda |dz|^2$. La diferencial de Hopf de la superficie viene dada por $Q = q(z)dz^2$ donde $q(z) = \langle \psi_{zz}, \eta \rangle$ y $\eta: \Sigma \to \mathbb{S}^3_1$ es el normal unitario de ψ . Como ψ tiene curvatura media uno, Q es una 2-forma holomorfa en Σ , esto es, $q: \Sigma \to \mathbb{C}$ es holomorfa. Si q=0, la superficie es una horoesfera. A partir de aquí supondremos que $q \not\equiv 0$, y por lo tanto q se anula sólo en puntos aislados.

Por otro lado, la ecuación de Gauss de ψ nos dice que

$$(\log \lambda)_{z\bar{z}} = 2|q|^2/\lambda. \tag{13}$$

Como q es holomorfa, de (??) tenemos que $\phi=4|q|^2/\lambda$ verifica la ecuación de Liouville

$$\Delta \log \phi = -2\phi. \tag{14}$$

esta ecuación se puede resolver explícitamente en término de datos meromorfos ([Lio] or [Bry]). Por lo tanto, existe una función meromorfa $g: \Sigma \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que

$$\phi = \frac{4|q|^2}{\lambda} = \frac{4|g_z|^2}{(1+|g|^2)^2}.$$
 (15)

Además, de las ecuaciones de estructura de ψ y la condición H=1, se verifica

$$(\psi + \eta)_z = -\frac{2q}{\lambda}\psi_{\bar{z}}.\tag{16}$$

Como la aplicación de Gauss hiperbólica $G = [\psi + \eta]$ de la superficie de Bryant es meromorfa, existen $A, B : \Sigma \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas con G = [(A, B)], y una función diferenciable positiva $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\psi + \eta = \mu \begin{pmatrix} A\bar{A} & A\bar{B} \\ \bar{A}B & B\bar{B} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Luego,

$$\langle (\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_{\bar{z}} \rangle = \frac{\mu^2}{2} |AB_z - BA_z|^2. \tag{18}$$

Ahora, de (15), (16) y (18) tenemos

$$\mu^2 |AdB - BdA|^2 = \frac{4|dg|^2}{(1+|g|^2)^2}.$$
 (19)

De esta relación, y como Σ es simplemente conexa, existe una función meromorfa $S: \Sigma \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ cumpliendo $S^2 = dg/(AdB - BdA)$. Consideremos ahora C = AS, D = BS. Entonces G = [(C, D)], y repitiendo el cálculo anterior para C, D en vez de para A, B vemos que CdD - DdC = dg, y que (17) se vuelve en

$$\psi + \eta = \varrho \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}$$
 (20)

para

$$\varrho = \frac{2}{1 + |q|^2}.\tag{21}$$

Considerando la siguiente curva meromorfa $F: \Sigma \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dada por

$$F = \left(\begin{array}{cc} C & dC/dg \\ D & dD/dg \end{array} \right).$$

Entonces (20) la podemos escribir en términos de F como

$$\psi + \eta = F \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^*. \tag{22}$$

Como existe una función meromorfa θ en Σ tal que

$$F^{-1}F_z = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ g_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

usando (21), (23) y (22) tenemos

$$(\psi + \eta)_z = F \left[\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varrho_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] F^* = F \begin{pmatrix} \frac{-2\bar{g}g_z}{(1+|g|^2)^2} & 0 \\ \frac{2g_z}{1+|g|^2} & 0 \end{pmatrix} F^*.$$

Ahora, por (16) y (15), si denotamos $h = q/g_z$, obtenemos

$$\psi_z = F \begin{pmatrix} gh & -h(1+|g|^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^*. \tag{24}$$

Por otro lado, como $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ actúa isométricamente sobre \mathbb{H}^3 , existe una curva $\Omega: \Sigma \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ tal que $\psi = F\Omega F^*$. Si escribimos

$$\Omega = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ \overline{b} & c \end{array} \right),$$

siendo $a, b: \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $b: \Sigma \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, entonces por (24) obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} a_z + \bar{b}\theta & b_z + c\theta \\ \bar{b}_z + ag_z & c_z + bg_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gh & -h(1+|g|^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (25)

este sistema diferencial es fácilmente resoluble usando la condición $\det(\Omega) = 1$, para obtener

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{g} \\ -g & 1 + |g|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -ig \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & i\bar{g} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Luego $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ se puede recuperar como $\psi = \mathcal{BB}^*$, siendo $\mathcal{B}: \Sigma \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ la curva meromorfa

$$\mathcal{B} = F \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -ig \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Además, por $\psi = \mathcal{BB}^*$ vemos que $\mathcal{B} : \Sigma \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ es holomorfa, y un cálculo directo nos muestra que \mathcal{B} es una inmersión y $\det(d\mathcal{B}) = 0$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{B}: \Sigma \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ una inmersión holomorfa con $\det(d\mathcal{B}) = 0$. Entonces $\mathcal{B}^{-1}d\mathcal{B}$ tiene determinante y traza cero (ya que toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$). Esto implica la existencia de una función meromorfa g y una 1-forma holomorfa ω tal que

$$\mathcal{B}^{-1}d\mathcal{B} = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega. \tag{28}$$

Definiendo finalmente $\psi = \mathcal{BB}^* : \Sigma \to \mathbb{H}^3$, la cuál es inmersión al serlo \mathcal{B} , y sea $N : \Sigma \to \mathbb{N}^3$ dada por

$$N = \frac{2}{1 + |g|^2} F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^*,$$

donde F está dada por (27). Entonces $\langle N, N \rangle = 0$, $\langle N, \psi \rangle = -1$, y por (24), $\langle \psi_z, N \rangle = 0$. Para terminar, si η es el normal de ψ , se verifica $N = \psi + \eta$. Como N es conforme y F es holomorfa, ψ tiene curvatura media uno por el Lema 1.

Observemos que si en los razonamientos realizados escogemos desde el principio $A=1,\,B=G,$ la matriz $\mathcal B$ queda como

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} dC/dg & C - g \, dC/dg \\ dD/dg & D - g \, dD/dg \end{pmatrix}, \qquad C = i\sqrt{dg/dG}, \quad D = iG \sqrt{dg/dG}.$$
 (29)

Esto es, la matriz de Bryant se recupera explícitamente en términos de G, g. Esta fórmula es esencialmente la dada por Small en [Sma]. Aquí hemos seguido una observación en [GMM2].

4. Aplicaciones

A pesar de que el estudio de las superficies de Bryant comienza en 1987, ha recibido desde entonces un enorme número de aportaciones de gran importancia. Debido a la juventud y al grado de complejidad de la teoría hemos creído conveniente dedicar esta sección a explicar a grandes rasgos algunos resultados y problemas fundamentales sobre superficies de Bryant.

4.1. La correspondencia de Lawson

Un resultado básico en la teoría de superficies de curvatura media constante es la correspondencia de Lawson [Law], que identifica entre sí a superficies de curvatura media constante en las tres formas espaciales riemannianas 3-dimensionales \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}^3 . En particular dicha correspondencia conecta las superficies minimales de \mathbb{R}^3 con las superficies de curvatura media uno en \mathbb{H}^3 , esto es, las superficies de Bryant, de modo que para una superficie minimal simplemente conexa con métrica ds^2 y segunda forma fundamental σ en \mathbb{R}^3 , la superficie en \mathbb{H}^3 con métrica ds^2 y segunda forma fundamental $ds^2 + \sigma$ es una superficie de Bryant. En particular, toda superficie de Bryant simplemente conexa es localmente isométrica a una superficie minimal.

Este hecho fue el que motivó el artículo pionero de Robert L. Bryant [Bry], e indica que un gran número de propiedades locales de las superficies minimales en \mathbb{R}^3 se trasladan de modo directo a las superficies de Bryant. No obstante, la geometría global en ambas teorías es radicalmente diferente. Como ejemplo básico, digamos que una superficie de Bryant de revolución en \mathbb{H}^3 no es en general embebida, mientras que los catenoides en \mathbb{R}^3 siempre lo son. Vamos a comentar con más detalle otras diferencias globales fundamentales.

4.2. El problema de periodos

Tanto la representación de Weierstrass en \mathbb{R}^3 como la representación de Bryant en \mathbb{H}^3 involucran una integración para recuperar la inmersión a partir de sus datos holomorfos. Este proceso funciona sin problemas para dominios simplemente conexos, pero al considerar los datos definidos sobre una superficie de Riemann de topología no trivial la inmersión podría ser multivaluada sobre dicho dominio. Esto es, aparecen problemas de periodos en ambas teorías. Sabemos que para superficies minimales en \mathbb{R}^3 el problema de periodos se reduce a garantizar que la 1-forma de Weierstrass no tenga periodos reales. Para superficies de Bryant, la situación es muy distinta, como vamos a ver.

La mayor parte de las diferencias esenciales entre ambas teorías parecen provenir del siguiente hecho. Para una superficie minimal $\psi: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ con métrica ds^2 y curvatura K, la cantidad $d\sigma^2 = -Kds^2$ es una pseudo-métrica de curvatura uno sobre la superficie, lo cual indica la existencia de una función meromorfa g sobre su recubridor universal $\widetilde{\Sigma}$ tal que

$$d\sigma^2 = \frac{4|dg|^2}{(1+|g|^2)^2}. (30)$$

Esta función meromorfa tiene un significado geométrico: si $N: \Sigma \to \mathbb{S}^2$ es el normal unitario a la superficie y $\pi: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}_{\infty}$ es la proyección estereográfica, entonces $g = \pi \circ N$. Llamamos a g la aplicación de Gauss de la superficie minimal. La naturaleza geométrica de g indica que está bien definida sobre Σ , y no sólo sobre $\widetilde{\Sigma}$.

Si tomamos una superficie de Bryant $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$, al ser localmente isométrica a una superficie minimal vemos que $d\sigma^2 = -Kds^2$ vuelve a ser pseudo-métrica de curvatura uno en Σ , y que existe una función meromorfa g en $\widetilde{\Sigma}$ que verifica (30). Llamaremos a g la aplicación de Gauss secundaria de ψ . La diferencia fundamental radica en que g no es geométrica, y por tanto no está definida en general sobre Σ , sino sobre $\widetilde{\Sigma}$. En otras

palabras, g es multivaluada en Σ , a pesar de que ψ pueda estar bien definida sobre Σ . Más aún, la matriz de Bryant \mathcal{B} tal que $\psi = \mathcal{B}\mathcal{B}^*$ también es en general multivaluada sobre Σ . Estos fenómenos aparecen por ejemplo al considerar las superficies de Bryant de revolución (véase el Ejemplo 3).

El hecho que acabamos de comentar dificulta enormemente el tratamiento del problema de periodos para superficies de Bryant, e indica que una condición de resolución tan sencilla como la que ocurre en el caso minimal no parece factible. No obstante, también es fundamental resaltar que los otros dos datos holomorfos básicos de las superficies de Bryant, a saber, la aplicación de Gauss hiperbólica G y la diferencial de Hopf Q, son geométricos y por tanto están bien definidos (esto es, son univaluados) sobre Σ .

Los tres datos g,G,Q satisfacen una importante relación. Definamos para ello la derivada schwarziana de una función meromorfa f con respecto del parámetro z como

$$\{f,z\} = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \qquad \left(' = \frac{d}{dz}\right).$$

Esta cantidad asociada a f es un invariante conforme de gran importancia en el análisis de variable compleja.

Si $f:\Sigma\to\mathbb{C}_\infty$ es una función meromorfa sobre una superficie de Riemann Σ , podemos definir globalmente la 2-forma meromorfa

$$\mathcal{S}(f) = \{f, z\}dz^2.$$

Con esto, si $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ es una superficie de Bryant, sus datos g, G, Q cumplen sobre Σ (y no sólo sobre $\widetilde{\Sigma}$) la relación ([UY])

$$S(g) - S(G) = -2Q. \tag{31}$$

4.3. Curvatura total finita

Al tener las superficies de Bryant curvatura no positiva, un teorema de R. Osserman [Oss, pag. 81] garantiza que toda superficie de Bryant completa de curvatura total finita está parametrizada sobre una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos. Este mismo resultado es cierto para superficies minimales completas de curvatura total finita en \mathbb{R}^3 , y en ambos casos el valor de la curvatura total es el área negativa de la imagen esférica de la aplicación de Gauss q, contada según multiplicidades.

El que g tenga una descripción geométrica para superficies minimales en \mathbb{R}^3 garantiza que en tal caso g debe extenderse de modo meromorfo sobre los finales (de otro modo se contradiría la hipótesis de curvatura total finita), por lo que el valor de la curvatura total de una superficie minimal completa es de la forma $-4\pi m$, $m \in \mathbb{N}$.

No obstante, sobre una superficie de Bryant $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ la aplicación de Gauss secundaria g no es univaluada sobre Σ , así que la cuantización anterior no es cierta en este ambiente. Por ejemplo, existen superficies de Bryant completas de revolución en \mathbb{H}^3 cuya curvatura total admite cualquier valor negativo (Ejemplo 3). Esto hace que la clasificación de las superficies de Bryant completas de curvatura total finita sea más complicada que la correspondiente clasificación para superficies minimales en \mathbb{R}^3 .

Además la aplicación de Gauss hiperbólica G de $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$, que sí que está bien definida sobre Σ , no se extiende en general de modo meromorfo a los finales. Esto

produce dos tipos distintos de finales, con geometrías opuestas. Un final es regular si G se extiende de modo meromorfo sobre él, e irregular en caso contrario. Finalmente, notamos que lo que sí se extiende de modo meromorfo a los finales en ambas teorías es la diferencial de Hopf.

4.4. Dualidad sobre superficies de Bryant

Los hechos anteriores relativos a la curvatura total de una superficie de Bryant motivaron la introducción por parte de Umehara y Yamada [UY3] (ver también [Yu]) de una dualidad en la teoría de superficies de Bryant. Dada una superficie de Bryant $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ representada como $\psi = \mathcal{B}\mathcal{B}^*$ para la curva holomorfa nula $\mathcal{B}: \widetilde{\Sigma} \to \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, la curva $\mathcal{B}^{\sharp} = \mathcal{B}^{-1}: \widetilde{\Sigma} \to \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ vuelve a ser nula, y por tanto genera por el Teorema 3 una nueva superficie de Bryant $\psi^{\sharp}: \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{H}^3$. Llamamos a ψ^{\sharp} la superficie dual de la superficie de Bryant ψ , la cual está definida en general sólo sobre el recubridor universal $\widetilde{\Sigma}$ y no sobre Σ . Los datos holomorfos de ψ^{\sharp} se relacionan con los de ψ mediante

$$G^{\sharp} = g^{-1}, \quad g^{\sharp} = G^{-1}, \quad Q^{\sharp} = -Q,$$

y por tanto la métrica dual de ψ , definida como la métrica de ψ^{\sharp} , es

$$ds^{2\sharp} = \left(1 + |G|^2\right)^2 \left| \frac{Q}{dG} \right|^2.$$

La importancia de $ds^{2\sharp}$ reside en que está bien definida sobre Σ . Más aún, se tiene

Lema 4 [Yu] La métrica dual $ds^{2^{\sharp}}$ es completa (resp. regular) si y sólo si la métrica ds^2 de la superficie de Bryant original es completa (resp. regular).

Asociada a $ds^{2\sharp}$ tenemos la curvatura total dual de ψ ,

$$\mathcal{C}^{\sharp}(\Sigma) = \int_{\Sigma} K^{\sharp} dA^{\sharp},$$

siendo K^{\sharp} y dA^{\sharp} la curvatura y el elemento de área de $ds^{2\sharp}$. Así, el valor de $\mathcal{C}^{\sharp}(\Sigma)$ es menos el área esférica de la imagen de G, contada según multiplicidades.

De este modo, sobre una superficie de Bryant completa $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ tenemos dos métricas completas $ds^2, ds^{2\sharp}$, y dos curvaturas totales, $\mathcal{C}(\Sigma), \mathcal{C}^{\sharp}(\Sigma)$. Si alguna de ambas curvaturas totales es finita, entonces Σ es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos. Más aún, si $\mathcal{C}^{\sharp}(\Sigma)$ es finita, la aplicación de Gauss hiperbólica G de ψ se extiende de modo meromorfo sobre los finales, y el valor de $\mathcal{C}^{\sharp}(\Sigma)$ admite la cuantización $-4\pi m$, con $m \in \mathbb{N}$.

Estos hechos motivan el estudio de las superficies de Bryant completas de curvatura total dual finita, e indican que dichas superficies son más manejables que las de curvatura total finita.

4.5. Imposición de propiedades geométricas

Tanto en la teoría de superficies minimales en \mathbb{R}^3 como en la de superficies de Bryant, una vez que tenemos los datos holomorfos (g,Q) es posible describir la métrica y la

segunda forma fundamental de la superficie. Esto indica que a través de g,Q se pueden estudiar superficies en ambas teorías que satisfagan propiedades geométricas predefinidas (como hemos visto para la curvatura total).

No obstante, existe una diferencia fundamental entre los dos contextos. En \mathbb{R}^3 , a partir de los datos g,Q es posible recuperar las coordenadas de la superficie minimal que definen por medio del cálculo de una integral. Sin embargo, en \mathbb{H}^3 es necesario resolver la ecuación diferencial (28) para recuperar la curva holomorfa \mathcal{B} , y de ahí la superficie de Bryant dada por $\psi = \mathcal{BB}^*$. Esta ecuación diferencial no se puede integrar explícitamente, salvo en casos muy particulares (como ocurre con las superficies de Bryant de revolución).

Así, aparece la siguiente dicotomía para superficies de Bryant: por una parte, a partir de la representación de Bryant (Teorema 3) podemos construir una infinidad de superficies de Bryant en coordenadas explícitas, pero en principio dichas superficies no tendrán un interés geométrico definido. Por otra parte, si fijamos alguna propiedad geométrica concreta sobre la superficie de Bryant, en general no podremos recuperar las coordenadas de dicha superficie, porque tendremos que pasar por la integración del sistema (28). La única salvedad que parece existir en este sentido es la fórmula de Small (29) [Sma], que expresa las coordenadas de la superficie en términos de sus aplicaciones de Gauss g, G.

Esta situación que acabamos de describir indica que el estudio de propiedades de las superficies de Bryant expresadas en términos de sus coordenadas es una tarea mucho más difícil que el correspondiente problema para superficies minimales en \mathbb{R}^3 . En particular, todo esto justifica que ciertas transformaciones clásicas de la teoría de superficies minimales en \mathbb{R}^3 no hayan podido ser extendidas al ámbito de las superficies de Bryant.

Por ejemplo, dada una superficie minimal, ϕ , en \mathbb{R}^3 , su familia asociada viene dada por la fórmula

$$\phi_{\theta} = \cos\theta\phi + \sin\theta\phi^*$$

donde ϕ^* es la superficie conjugada de ϕ . Sin embargo, se desconoce si la familia asociada de una superficie de Bryant en \mathbb{H}^3 admite una descripción en coordenadas explícitas.

Otro ejemplo en este sentido lo constituye la transformación de López-Ros [LoRo], que determina una transformación conforme dentro de la clase de las superficies minimales en \mathbb{R}^3 , de modo que una de las coordenadas de las superficies involucradas permanece constante. En \mathbb{H}^3 aún no se ha obtenido una transformación para superficies de Bryant con estas propiedades.

Finalmente, es importante resaltar que no se sabe si existen superficies de Bryant completas y acotadas en \mathbb{H}^3 . En el caso de \mathbb{R}^3 , Nadirashvili [Nad] proporcionó un método para construir superficies minimales completas contenidas en una bola.

4.6. Representación de superficies llanas en \mathbb{H}^3

Las superficies de Bryant no son la única clase de superficies en \mathbb{H}^3 que admiten una representación conforme. Más concretamente, en [GMM] Gálvez, Martínez y Milán demostraron que las superficies llanas de \mathbb{H}^3 pueden ser descritas a través de datos holomorfos, en el espíritu de la representación de Bryant.

La prueba de esta representación holomorfa en [GMM] es razonablemente sencilla, una vez se conocen los rudimentos de la teoría de superficies en \mathbb{H}^3 . Por ello no vamos

a exponer aquí dicha demostración, sino que nos limitaremos simplemente a indicar que existen datos holomorfos suficientes sobre dichas superficies como para que una representación sea plausible.

Sea $\psi: M^2 \to \mathbb{H}^3$ una superficie llana en \mathbb{H}^3 , y asignémosle un campo normal unitario $\eta: M^2 \to \mathbb{S}^3_1$. Entonces su curvatura extrínseca satisface $K_{\text{ext}} = 1$. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal tangente en un punto de M^2 tal que $-d\eta(e_i) = k_i e_i$, i = 1, 2, siendo k_1, k_2 las curvaturas principales asociadas a η en p. Entonces $K_{\text{ext}} = 1$ indica que

$$\sigma(e_1, e_1)\sigma(e_2, e_2) - \sigma(e_1, e_2)^2 = 1,$$

donde $\sigma = \langle d\psi, -d\eta \rangle$ es la segunda forma fundamental de la inmersión. Esto asegura que σ es definida. En consecuencia, toda superficie llana en \mathbb{H}^3 es orientable. Más aún, toda superficie llana en \mathbb{H}^3 admite una única orientación, dada por un campo normal unitario $\eta: M^2 \to \mathbb{S}^3_1$ a ψ en \mathbb{H}^3 , tal que $\langle d\psi, -d\eta \rangle$ es una métrica definida positiva. Denominaremos a dicha orientación la *orientación canónica* de la superficie llana.

En particular, cualquier superficie llana en \mathbb{H}^3 hereda de manera natural a través de la métrica σ una estructura de superficie de Riemann Σ . Este hecho lo denotaremos como venimos haciendo mediante $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$, aunque esta vez hay que tener en cuenta que Σ no proviene de la métrica llana inducida por ψ .

Va a ser para esta estructura de superficie de Riemann inducida por σ para la que se dé la representación de [GMM]. Para empezar, fijemos la siguiente notación.

Definicion 5 Sea $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ una superficie orientada, con normal unitario $\eta: \Sigma \to \mathbb{H}^3$. Las aplicaciones $G^+: \Sigma \to \mathbb{S}^2_{\infty}$ y $G^-: \Sigma \to \mathbb{S}^2_{\infty}$ dadas por $G^+=[\psi+\eta]$ y $G^-=[\psi-\eta]$ se denominan, respectivamente, la aplicación de Gauss hiperbólica y la aplicación de Gauss hiperbólica negativa de ψ .

Nótese que la definición de aplicación de Gauss hiperbólica coincide con la dada en la Sección ??. El par (G^+, G^-) admite la siguiente descripción geométrica. Tomemos para $p \in \Sigma$ el plano temporal Π de \mathbb{L}^4 generado por $\psi(p) + \eta(p)$ y $\psi(p) - \eta(p)$. La intersección de Π con \mathbb{H}^3 es una geodésica en \mathbb{H}^3 , la cual conecta los puntos de la frontera ideal \mathbb{S}^2_{∞} dados por $G^+(p)$ y $G^-(p)$. Así, si orientamos dicha geodésica en la dirección de $\eta(p)$, resulta que ésta parte de $G^-(p)$ y termina en $G^+(p)$.

El siguiente resultado, análogo al Lema 1, fue demostrado en [GMM].

Lema 6 La aplicación de Gauss hiperbólica G^+ de una superficie en \mathbb{H}^3 con segunda forma fundamental σ definida positiva es conforme con respecto a σ si y sólo si dicha superficie es llana o totalmente umbilical.

Además, si ψ es llana se cumple que $G^+: \Sigma \to \mathbb{C}_{\infty}$ es una función meromorfa, lo cual proporciona el primero de los datos que buscábamos.

Por otra parte, sobre Σ tenemos globalmente definida una 2-forma compleja dada por $Q_I = \langle \psi_z, \psi_z \rangle dz^2$. Esta 2-forma tiene la propiedad básica de detectar los puntos umbilicales de la inmersión, ya que se anula precisamente sobre ellos. La importancia de Q_I para nuestros propósitos radica en lo siguiente:

Si $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ es una superficie llana canónicamente orientada, la 2-forma Q_I es holomorfa sobre Σ .

Este hecho se encuentra implícitamente en [GMM], y ha sido utilizado en [GMM2, KUYpr].

Finalmente, recordemos que para las superficies de Bryant la pseudo-métrica $\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta) \rangle$ tiene curvatura constante uno. En nuestro caso se verifica lo siguiente ([GMM2], Theorem 1).

Lema 7 Si $\psi: \Sigma \to \mathbb{H}^3$ es una superficie llana canónicamente orientada con normal unitario $\eta: \Sigma \to \mathbb{S}^3_1$, entonces $\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta) \rangle$ es una pseudo-métrica llana sobre Σ .

De nuevo, este resultado ya aparecía implícitamente en [GMM]. Nótese que la aparición de la ecuación de Liouville en la descripción de las superficies de Bryant provenía precisamente de la pseudo-métrica de curvatura 1 anterior. Para superficies llanas, en lugar de la ecuación de Liouville aparece la ecuación asociada a métricas llanas,

$$\Delta \log \phi = 0.$$

Además, como $\psi + \eta$ es conforme, el Lema 7 indica la existencia de una 1-forma holomorfa no nula ω sobre Σ tal que $\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta) \rangle = |\omega|^2$.

Estos tres datos son suficientes para recuperar la inmersión. Para ello, diremos que una aplicación holomorfa $F: \Sigma \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ sobre una superficie de Riemann Σ es una curva holomorfa de Legendre si

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
, de modo que $DdA - BdC = 0$.

Para cualquier curva holomorfa de Legendre es directo comprobar que existen un par de 1-formas holomorfas α_1, α_2 sobre Σ para las que F verifica la ecuación diferencial

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Si Σ es simplemente conexa el recíproco de este hecho también se cumple, esto es, la ecuación diferencial (32) es integrable, y su solución es una curva holomorfa de Legendre.

Con todo esto, la representación de Gálvez, Martínez y Milán de las superficies llanas en \mathbb{H}^3 establece lo siguiente [GMM].

Teorema 8 Sea Σ una superficie de Riemann $y F : \Sigma \to \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ una curva holomorfa de Legendre para la cual $|\alpha_1| < |\alpha_2|$. Entonces $\psi = FF^* : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ es una superficie llana con estructura conforme inducida por su segunda forma fundamental y su orientación canónica.

Recíprocamente, toda superficie llana simplemente conexa y canónicamente orientada en \mathbb{H}^3 se recupera de este modo.

Los elementos geométricos holomorfos de las superficies llanas que hemos ido comentando se recuperan en términos de F, α_1 y α_2 como

$$Q_I = \alpha_1 \alpha_2, \quad G^+ = C/A, \quad \langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta) \rangle = |\alpha_1|^2.$$

Además, y contrariamente a lo que ocurre para superficies de Bryant, la aplicación de Gauss hiperbólica negativa G^- también es holomorfa, y viene dada a través de F como $G^- = D/B$. ¹

La superficie degenera en los puntos donde $|\alpha_1| = |\alpha_2|$. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ en $z_0 \in \Sigma$, entonces z_0 es un punto de ramificación, en el que tanto la primera como la segunda forma fundamental se anulan. Ahora bien, si $|\alpha_1| = |\alpha_2| \neq 0$ en z_0 , entonces la métrica es singular en z_0 pero no nula. Estos puntos se denominan singularidades admisibles de la superficie ψ .

Es un resultado clásico que toda superficie llana completa en \mathbb{H}^3 es una horosfera o un cilindro hiperbólico (véase [Spi]). Este hecho junto con la representación global expuesta en el Teorema 8 motivan el estudio de las superficies llanas con singularidades. Recientemente, Kokubu, Umehara y Yamada [KUYpr] dieron una interpretación geométrica de las superficies llanas en \mathbb{H}^3 con singularidades admisibles y desarrollaron una teoría para éstas, basada en la representación conforme de [GMM]. En particular, dichos autores introducen una noción de completitud para este tipo de superficies, y clasifican las superficies llanas con singularidades admisibles que son completas y poseen a lo más tres finales regulares, todos ellos embebidos. La clave de este resultado reside en la clasificación de los finales llanos regulares, completos y embebidos dada en [GMM]. Aquí, un final regular es aquel sobre el que la aplicación de Gauss hiperbólica de la superficie llana se extiende de modo meromorfo.

4.7. Ejemplos

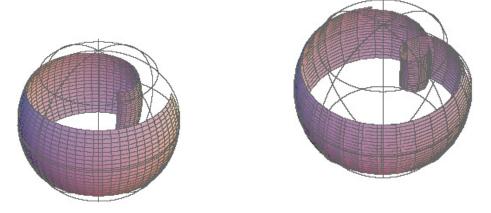


Figura 4: Superficie de Bryant invariante hiperbólica en el modelo de Poincaré

Ejemplo 1 La aplicación de Gauss hiperbólica y la diferencial de Hopf de esta superficie

¹La expresión para G^+ y G^- difiere de la dada en [GMM, GMM2, KUYpr] debido a que nuestra identificación $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \equiv \mathbb{C}_{\infty}$ es $[(A,B)] \equiv B/A$, y no $[(A,B)] \equiv A/B$

de Bryant son

$$Q = -\frac{a}{2}(a+\lambda)dz^2$$
, $G(z) = k_1 e^{-z}$, con $k_1 = \frac{b+c-id}{a+\lambda}$,

con a,b,c,d,λ cumpliendo $a^2-b^2=1,\ a>0,\ -\lambda^2+c^2+d^2=1,\ a\lambda=bc$ Ahora, de $\{g,z\}-\{G,z\}=-2q(z)$ vemos que $\{g,z\}=k_2,$ con $k_2=-1/2+a(a+\lambda),$ valor que nunca puede anularse. Así,

$$g(z) = \exp\left(i\sqrt{2k_2}z\right), \quad Q = -\frac{1}{2}\left(k_2 + \frac{1}{2}\right)dz^2.$$

Al conocer g, G podemos recuperar explícitamente la inmersión mediante (29). La métrica dual es

$$ds^{2\sharp} = \left| \frac{2k_2 + 1}{4k_1} \right|^2 \left(1 + |k_1|^2 e^{-2s} \right)^2 e^{2s} |dz|^2, \quad z = s + it,$$

que es claramente regular y completa $(k_2 = -1/2 \text{ da la horosfera, igual que } k_1 = 0)$. Por tanto, hemos obtenido todas las superficie de Bryant invariantes hiperbólicas, las cuales se parametrizan como $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}^3$, y son regulares, completas y de curvatura total infinita (excepción hecha de las horosferas), al tener g una singularidad esencial en infinito.

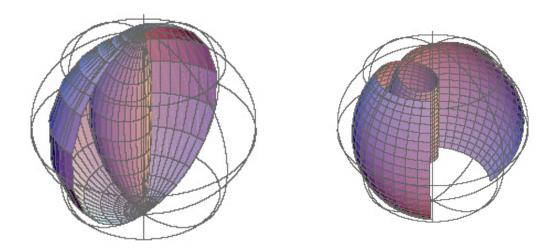


Figura 5: Superficie de Bryant invariante hiperbólica que contiene al eje de la traslación, en el modelo de Poincaré

Ejemplo 2 Como caso particular del ejemplo anterior, construyamos la única superficie de Bryant invariante hiperbólica que contiene al eje de su grupo de traslaciones hiperbólicas. Las cuales se obtienen tomando b=0 en el Ejemplo 1, y componiendo con un movimiento rígido que fije el eje si fuese necesario (esto asegura que el ejemplo es

único). Este ejemplo es simplemente conexo, completo, de curvatura total infinita, y sus datos son

$$G(z) = e^{-z}, \quad g(z) = e^{iz}, \quad Q = -(1/2)dz^2,$$

y se escribe explícitamente en coordenadas como

$$\psi(s+it) = \begin{pmatrix} e^s \cosh t & -ie^{it} \sinh t \\ ie^{-it} \sinh t & e^{-s} \cosh t \end{pmatrix}.$$

Para tratar las superficies de revolución en \mathbb{H}^3 empezamos por recordar que una rotación del espacio hiperbólico es la restricción a \mathbb{H}^3 de una rotación de \mathbb{L}^4 que fija un plano temporal. En el modelo del semiespacio superior, estos movimientos vienen representados por rotaciones horizontales.

Ejemplo 3 (Catenoide cousin) Vamos a calcular las superficies de Bryant que contienen una circunferencia como geodésica plana. Es conveniente observar que dichas superficies serán distintas para circunferencias con radios distintos, lo cual contrasta con la situación para superficies minimales en \mathbb{R}^3 .

Así, la aplicación de Gauss hiperbólica y la diferencial de Hopf de esta superficie son

$$G(z) = \varepsilon e^{-iz}, \quad Q = -\frac{b}{2} \left(b + \varepsilon \sqrt{1 + b^2} \right) dz^2.$$

De ahí vemos que la derivada schwarziana de g es $\{g,z\}=k$, siendo k la constante $k=1/2+b\left(b+\varepsilon\sqrt{1+b^2}\right)$. Por ello,

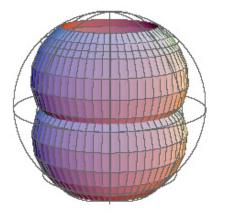
$$g(z) = \exp\left(i\sqrt{2k}z\right), \quad Q = -\frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)dz^2.$$

En particular, las coordenadas de la inmersión se obtienen explícitamente mediante (29). Llamaremos a esta superficie un **catenoide cousin**.

Todo catenoide cousin es una superficie de revolución con la topología de un cilindro, que se parametriza como $\psi: \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{H}^3$. La aplicación de Gauss secundaria g es en general multivaluada sobre $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$. No obstante, es directo ver que la métrica dual $ds^{2\sharp}$ de la superficie es la de un catenoide de \mathbb{R}^3 . Como consecuencia, todo catenoide cousin es una superficie de Bryant completa, sin puntos singulares y con curvatura total dual de valor -4π . La aplicación de Gauss hiperbólica de esta superficie se extiende de modo meromorfo a los finales $\pm \infty$ de $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$, esto es, ambos finales son regulares. Además el valor de su curvatura total es $-4\pi\sqrt{2k}$, que puede tomar cualquier valor negativo. Dependiendo del radio de la circunferencia, el catenoide es embebido o no [Bry, UY].

Referencias

[AA] R. Aiyama, K. Akutagawa, Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $H^3(-c^2)$ and $S_1^3(c^2)$, Ann. Global Anal. Geom. 17 (1999), 49–75.



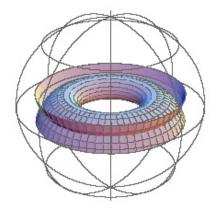


Figura 6: Un catenoide cousin no embebido, en el modelo de Poincaré

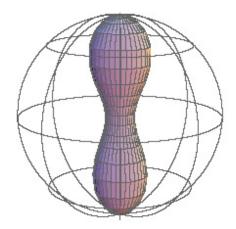


Figura 7: Un catenoide cousin embebido, en el modelo de Poincaré

- [AA2] R. Aiyama, K. Akutagawa, Kenmotsu-Bryant type representation formula for constant mean curvature spacelike surfaces in $H_1^3(-c^2)$, Differential Geom. Appl. 9 (1998), 251–272.
- [Bi] L. Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale, Astérisque, **154-155** (1987), 321–347.
- [Bry] R.L. Bryant, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, terza Edizione, Bologna (1927).
- [CHR] P. Collin, L. Hauswirth, H. Rosenberg, The geometry of finite topology Bryant surfaces, Ann. of Math. 153 (2001), 623–659.
- [GMM] J.A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán, Flat surfaces in the hiperbolic 3-space, *Math. Ann.*, **316** (2000), 419–435.

- [GMM2] J.A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán, Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A Plateau problem at infinity, Trans. Amer. Math. Soc., 356 (2004), 3405–3428.
- [GaMi] J.A. Gálvez, P. Mira, The Cauchy problem for the Liouville equation and Bryant surfaces, Adv. in Math., to appear.
- [HRR] L. Hauswirth, P. Roitman, H. Rosenberg, The geometry of finite topology Bryant surfaces quasi-embedded in a hyperbolic manifold, J. Differential Geom. 60 (2002), 55–101.
- [KTUY] M. Kokubu, M. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada, An analogue of minimal surface theory in $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 1299–1325.
- [KUYpr] M. Kokubu, M. Umehara, K. Yamada, Minimal surfaces that attain equality in the Chern-Osserman inequality, *Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000)*, Comtemporary Math. **308**, Amer. Math. Soc., Providence (2002), 223–228.
- [Law] H.B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3 , Ann. of Math. **92** (1970), 335-374.
- [Lio] J. Liouville, Sur l'equation aux differences partielles $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$, J. Math. Pures Appl. **36** (1853), 71–72.
- [LoRo] F.J. López y A. Ros, On embedded complete minimal surfaces of genus zero, J. Differential Geometry 33 (1991), 293–300.
- [Nad] N. Nadirashvili, Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces, *Invent. Math.* 126 (1996), 457–465.
- [Oss] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Enlarged republication of the 1969 original. Dover Publications, New York, 1986.
- [Sma] A. Small, Surfaces of constant mean curvature 1 in \mathbb{H}^3 and algebraic curves on a quadric, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), 1211–1220.
- [Spi] M. Spivac, A comprehensive introduction to differential geometry Vol. IV, Publish or Perish, Berkley, California, 1975.
- [UY] M. Umehara, K. Yamada, Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space, Ann. of Math. 137 (1993), 611–638.
- [UY2] M. Umehara, K. Yamada, A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 into the hyperbolic 3-space, J. Reine Angew. Math. 432 (1992), 93–116.
- [UY3] M. Umehara, K. Yamada, Surfaces of constant mean curvature-c in $H^3(-c^2)$ with prescribed hyperbolic Gauss map, Math. Ann. **304** (1996), 203–224.

[Yu] Z. Yu, The value distribution of hyperbolic Gauss maps, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1996), 203–224.