

Curvatura media, física, EDPs

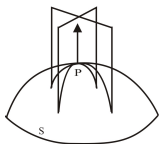
Rafael López

Universidad de Granada, España

(Resumen: En diferentes fenómenos físicos, asociados generalmente a capilaridad, las interfases están modeladas por superficies cuya curvatura media satisface cierta propiedad. El caso más simple es que la curvatura media sea constante (por ejemplo, en entornos de microgravedad). El objetivo de la charla es mostrar diferentes escenarios físicos posibles, revisando las posibles configuraciones geométricas que pueden adoptar dichas superficies. Se discutirá resultados y se introducirá las técnicas que se emplean, especialmente las provenientes de la teoría de EDPs de tipo elíptico. Dirigido especialmente para estudiantes de postgrado.)

Curvatura media: si $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}.$$



Plano



Esfera



Cilindro

$H = \text{cte}$

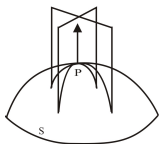
EDPs: la curvatura media H de un grafo $z = f(x, y)$ satisface

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 2H(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}.$$

$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 2H.$$

Curvatura media: si $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}.$$



Plano



Esfera



Cilindro

$H = \text{cte}$

EDPs: la curvatura media H de un grafo $z = f(x, y)$ satisface

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 2H(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}.$$

$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 2H.$$

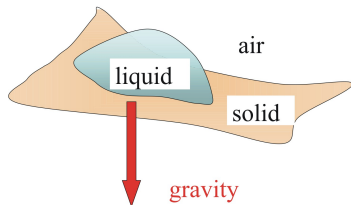
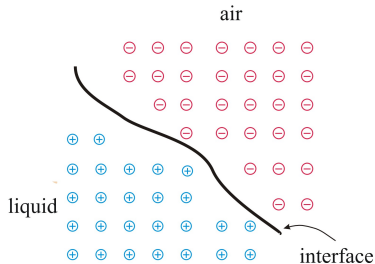
Física: Grupo de Física de Fluidos y Biocoloides:

- Caracterización de superficies sólidas, e interfases sólido-vapor, sólido-líquido, líquido-vapor, líquido-líquido (tensión superficial e interfacial, ángulos de contacto).
- Control de los fenómenos de adhesión y mojado.
- Uso y caracterización de sistemas tensioactivos simples, mixtos y mezclas polímerotensioactivo. Detergencia. Aplicación de sistemas tensioactivos coloidales a la formulación de productos detergentes, farmacéuticos, cosméticos, fitosanitarios.

Superficies

- del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .
- que aparecen en problemas de la Física.
- que son soluciones de un problema variacional.
- cuya curvatura media H satisface cierta condición, por ejemplo:
 - H es constante.
 - $H(x, y, z) = \kappa z + b$.
 - $H(x, y, z) = a(x^2 + y^2) + b$.

Una **interfase** es la frontera de dos medios homogéneos de diferentes propiedades físicas y químicas.



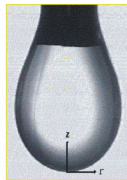
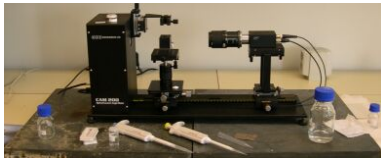
La forma de la gota viene dada por la ecuación Laplace-Young

$$\kappa z + (P_L - P_A) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \gamma = \underline{2H} \gamma.$$

γ : coeficiente de tensión superficial.

R_1 y R_2 son las curvaturas principales de la interfase S_{LA} .

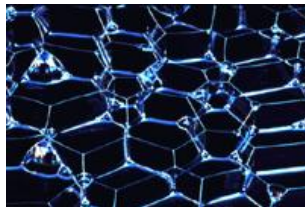
$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$



En condiciones ideales (ingravidez, presiones constantes, etc)

En equilibrio, la interfase es una superficie con curvatura media constante (superficie CMC).

- Una superficie CMC en \mathbb{R}^3 es punto crítico del área bajo deformaciones que preservan el volumen.
- Problema isoperimétrico: entre todas las superficies cerradas de \mathbb{R}^3 con el mismo volumen, cuáles son las que tienen menor área?



Definición

Una variación diferenciable de $\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi_t := \Phi(-, t)$ son inmersiones y $\Phi_0 = \phi$.

$$A(t) = \text{área}(\Phi_t(M)), \quad V(t) = \text{volumen}(\Phi_t(M)).$$

Teorema

$A'(0) = 0$ para cualquier variación que preserve el volumen sii ϕ es una inmersión CMC.

Definición

ϕ es estable si $A''(0) \geq 0$, para cualquier variación que preserve el volumen

(para grafos) $\phi(x, y) = (x, y, u(x, y))$

$$A(\phi) = \int_U \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dx dy, \quad V(\phi) = \int_U u \, dx dy.$$

Tomamos variaciones $\phi_t(x, y) = (x, y, u(x, y) + tv(x, y))$ con $\partial\phi = \partial\phi_t: v = 0$ en ∂U .

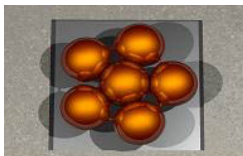
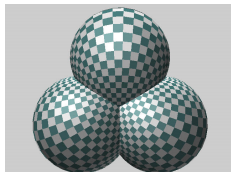
Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \{A(t) + \lambda V(t)\} \\ &= \int_U \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left\{ \sqrt{1 + |Du|^2 + 2t \langle Du, Dv \rangle + t^2 |Dv|^2} + \lambda(u + tv) \right\} \\ &= \int_U \left\{ \frac{\langle \nabla u, \nabla v \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + \lambda v \right\} dx dy \\ &= \int_U \left\{ -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \lambda \right\} v \, dx dy \end{aligned}$$

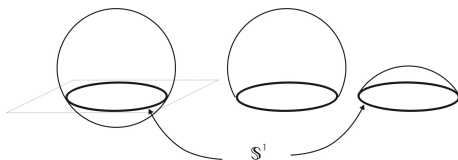
El caso más simple es la esfera: $H = 1/R$. Algunas caracterizaciones en la familia de superficies CMC *cerradas*:

- 1 La única de género cero $g = 0$ (Hopf, 1951).
- 2 La única que está embebida (Alexandrov, 1958).
- 3 La única que es estable (Barbosa-do Carmo, 1984).

Wente (1984); más tarde, ejemplos de mayor género.



En Física, las interfase son usualmente superficies *compactas con frontera*. $\partial M = \mathbb{S}^1$: **casquetes esféricos**.



Q1. ¿La superficie hereda las simetrías de su frontera?

Q2. ¿Cómo influye la geometría del borde en la geometría de la superficie?

Los casquetes esféricos son las únicas que son...

discos topológicos?

embebidos?

estables?



Si $z = f(x, y)$, la curvatura media H es

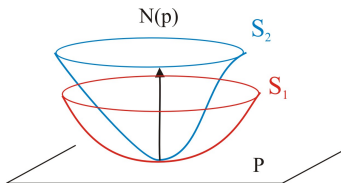
$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 2H(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 2H.$$

La función diferencia $u = u_1 - u_2$ satisface una ecuación EDP elíptica y (*lineal*):

$$Lu = 0.$$

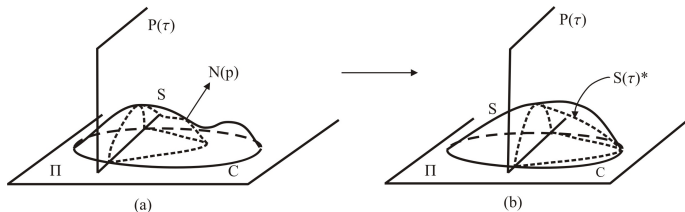
El principio del máximo:



$$\begin{aligned} H_1 &= H_2 \\ S_2 &\geq S_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad S_2 = S_1$$

Teorema

Supongamos S embebida. Si $S \subset \Pi^+$, con $\partial S = \mathbb{S}^1$, entonces S es un casquete esférico.



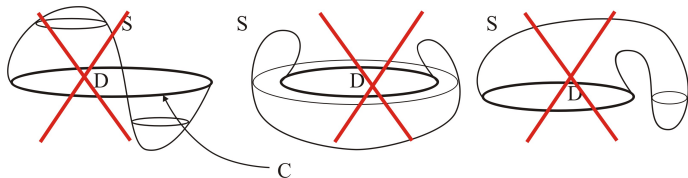
Teorema

Sea S una superficie CMC embebida. En cualquiera de los siguientes casos

- 1 $S \cap (\Pi - \bar{D}) = \emptyset$.
- 2 C es convexa + S transversal a Π a lo largo de C .

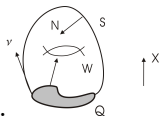
se tiene

$$S \subset \Pi^+$$



Fórmula de flujo: X un campo de Killing del espacio, S y Q dos superficies con $\partial S = \partial Q$ y $W \subset \mathbb{R}^3$ con $\partial W = S \cup Q$.

$$\operatorname{Div} X = 0 \Rightarrow \int_S \langle N, X \rangle + \int_Q \langle N_Q, X \rangle = 0.$$



$$\Delta x = 2HN \Rightarrow - \int_{\partial S} \langle \nu, X \rangle = 2H \int_S \langle N, X \rangle.$$

Teorema

$$\int_{\partial S} \langle \nu, X \rangle = 2H \int_Q \langle N_Q, X \rangle$$

Corolario

Si $\partial S = \partial D = \Gamma$ plana ($Q = D$, $X = E_3$),

$$|H| \leq \frac{L(\Gamma)}{2A(D)}.$$

Si $\Gamma = \mathbb{S}^1$ entonces $|H| \leq 1$.

Caso $H = 0$, $S = D$.

Teorema

Si $\partial S = \mathbb{S}^1$ y $|H| = 1$, S es una semiesfera.

$$\langle \nu, E_3 \rangle \equiv \pm 1 \Rightarrow \langle N(s), E_3 \rangle = 0$$

$$\langle N'(s), E_3 \rangle = -\sigma(\alpha', \nu) \langle \nu, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = 0.$$

$$1 = \langle N(s), \alpha(s) \rangle^2 + \langle \nu(s), \alpha(s) \rangle^2.$$

$$\sigma(\alpha', \alpha') = -\langle N', \alpha' \rangle = \langle N, \alpha'' \rangle = -\langle N, \alpha \rangle = -1 \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} = -1$$

$\partial S = \Gamma$ es un conjunto de puntos umbilicales.

Si $\Gamma = \mathbb{S}^1$ entonces $|H| \leq 1$.

Caso $H = 0$, $S = D$.

Teorema

Si $\partial S = \mathbb{S}^1$ y $|H| = 1$, S es una semiesfera.

$$\langle \nu, E_3 \rangle \equiv \pm 1 \Rightarrow \langle N(s), E_3 \rangle = 0$$

$$\langle N'(s), E_3 \rangle = -\sigma(\alpha', \nu) \langle \nu, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = 0.$$

$$1 = \langle N(s), \alpha(s) \rangle^2 + \langle \nu(s), \alpha(s) \rangle^2.$$

$$\sigma(\alpha', \alpha') = -\langle N', \alpha' \rangle = \langle N, \alpha'' \rangle = -\langle N, \alpha \rangle = -1 \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} = -1$$

$\partial S = \Gamma$ es un conjunto de puntos umbilicales.

Sean coordenadas isotermas $z = (u, v) = u + iv$, $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

$$I = E(du^2 + dv^2), \quad II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

Ecuaciones de Codazzi:

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_u + f_v = EH_u, \quad \left(\frac{e-g}{2}\right)_v - f_u = -EH_v.$$

$$\phi(z) = \phi(u, v) = \frac{e-g}{2} - if.$$

$$\phi \equiv 0 \Leftrightarrow x \text{ es umbilical}$$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad y \quad \phi \text{ holomorfa sii } \partial_{\bar{z}}\phi = 0.$$

Teorema

ϕ es holomorfa $\Leftrightarrow H$ es constante.

Si $w = f(z)$ es un cambio de coordenadas,

$$\phi(z) = \phi(z(w))f'(z)^2$$

$\phi(z)(dz)^2$: 2-forma de Hopf

Teorema (Hopf)

La única superficie cerrada de género cero con CMC es la esfera euclídea.

Tomamos $x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y \mathbb{S}^2 con la (única) estructura conforme: $\mathbb{S}^2 = \overline{\mathbb{C}}$ con cartas z y w , $z(0) = 0$, $w(\infty) = 0$, $w = 1/z$.

$$\phi(w) = \phi(w(z))\frac{1}{w^4} = \phi(z)z^4.$$

Entonces $\phi(\infty) = 0$. Por tanto ϕ es holomorfa y acotada
 $\Rightarrow \phi$ constante $\Rightarrow \phi \equiv 0$ y x umbilical.

Si $w = f(z)$ es un cambio de coordenadas,

$$\phi(z) = \phi(z(w))f'(z)^2$$

$$\phi(z)(dz)^2 : \text{ 2-forma de Hopf}$$

Teorema (Hopf)

La única superficie cerrada de género cero con CMC es la esfera euclídea.

Tomamos $x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y \mathbb{S}^2 con la (única) estructura conforme: $\mathbb{S}^2 = \bar{\mathbb{C}}$ con cartas z y w , $z(0) = 0$, $w(\infty) = 0$, $w = 1/z$.

$$\phi(w) = \phi(w(z))\frac{1}{w^4} = \phi(z)z^4.$$

Entonces $\phi(\infty) = 0$. Por tanto ϕ es holomorfa y acotada
 $\Rightarrow \phi$ constante $\Rightarrow \phi \equiv 0$ y x umbilical.

Definición

La inmersión $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es estable si

$$-\int_M u(\Delta u + |\sigma|^2 u) dM \geq 0 \quad \int_M u dM = 0.$$

Teorema (Barbosa-Do Carmo)

La única superficie cerrada con CMC y estable es la esfera euclídea.

$$h = \langle N, x \rangle \text{ y } \Delta h = -2H - |\sigma|^2 h$$

$$\Delta |x|^2 = 4(1 + Hh) \Rightarrow \int_M (1 + Hh) = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq - \int_M (1 + Hh) \left(\Delta(1 + Hh) + |\sigma|^2(1 + Hh) \right) \\ &= - \int_M (1 + Hh) \left(-2H^2 - Hh|\sigma|^2 + |\sigma|^2(1 + Hh) \right) \\ &= - \int_M (1 + Hh)|\sigma|^2 \leq - \int_M 2H^2 - H \int_M |\sigma|^2 h = 0 \end{aligned}$$

Teorema

Las únicas superficies con CMC, borde circular, disco topológico y estable son los casquetes esféricos.

Si x es la inmersión, x_t rotaciones respecto del eje z ,
 $f = \langle x \wedge N, E_3 \rangle$ es la componente normal de la variación.

- $\Delta f + |\sigma|^2 f = 0$.
- $\partial S = \mathbb{S}^1 \Rightarrow f = 0$ a lo largo de ∂S .
- $f \equiv 0 \Leftrightarrow$ la superficie es de revolución.
- teorema de la divergencia al campo $X = x \wedge E_3$ implica $\int_S f = 0$.

El problema $(L + \lambda)u = 0$, $u|_{\partial S} = 0$, $L = \Delta + |\sigma|^2$.

Si $f \in V_\lambda$, $S - f^{-1}(\{0\})$ tiene a lo más j componentes.

Si $f \neq 0$, $\lambda = 0$ es un valor propio.

f cambia de signo $\Rightarrow \lambda_1 < 0$.

Teorema

Las únicas superficies con CMC, borde circular, disco topológico y estable son los casquetes esféricos.

Si x es la inmersión, x_t rotaciones respecto del eje z ,
 $f = \langle x \wedge N, E_3 \rangle$ es la componente normal de la variación.

- $\Delta f + |\sigma|^2 f = 0$.
- $\partial S = \mathbb{S}^1 \Rightarrow f = 0$ a lo largo de ∂S .
- $f \equiv 0 \Leftrightarrow$ la superficie es de revolución.
- teorema de la divergencia al campo $X = x \wedge E_3$ implica $\int_S f = 0$.

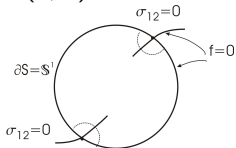
El problema $(L + \lambda)u = 0$, $u|_{\partial S} = 0$, $L = \Delta + |\sigma|^2$.

Si $f \in V_\lambda$, $S - f^{-1}(\{0\})$ tiene a lo más j componentes.

Si $f \neq 0$, $\lambda = 0$ es un valor propio.

f cambia de signo $\Rightarrow \lambda_1 < 0$.

- $\sigma(t, \nu) = 0 \Leftrightarrow \nabla f = 0 \Leftrightarrow$ se cruzan dos líneas nodales.



- $\sigma(t, \nu)$ se anula en al menos tres puntos.
- disco $\Rightarrow S - f^{-1}(0)$ tiene al menos tres componentes.
- Estabilidad $\Rightarrow S - f^{-1}(0)$ tiene como mucho dos conjuntos.

El problema de Dirichlet

Buscar ejemplos de superficies CMC hallando *grafos*.

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 2H \quad \text{en } D \subset \mathbb{R}^2$$
$$u = \varphi \quad \text{en } \partial D$$

La curva frontera es $\partial S = \text{grafo}(\varphi)$.

- $\kappa(\partial D) \geq 2H > 0 \Leftrightarrow$ existencia para arbitraria φ (Serrin, 1969)

Si hay estimaciones *a priori* C^0 y $C^1 \Rightarrow$ existencia.

Sea $S = \text{grafo}(u)$, $u|_{\partial D} = 0$. Si $\vec{a} = (0, 0, 1)$, tomamos la aplicación de Gauss tal que $\langle N, \vec{a} \rangle > 0$ y $H > 0$.

Estimaciones C^0 : si $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el grafo:

$$\Delta \langle x, \vec{a} \rangle = 2H \langle N, \vec{a} \rangle \quad \Delta \langle x, \vec{a} \rangle \geq 0 \Rightarrow u \leq 0.$$

$$\Delta \langle N, \vec{a} \rangle + |\sigma|^2 \langle N, \vec{a} \rangle = 0$$

$$\Delta (H \langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle) = (2H^2 - |\sigma|^2) \langle N, \vec{a} \rangle \leq 0$$

Principio del máximo $\Rightarrow H \langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle \geq \min_{\partial D}(\dots) > 0$.

$Hu \geq -\langle N, \vec{a} \rangle \geq -1$, es decir,

$$u \geq \frac{-1}{H}$$

Estimaciones C^1 : sobre $|\nabla u|$.

$$\Delta \langle N, \vec{a} \rangle = -|\sigma|^2 \langle N, \vec{a} \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle N, \vec{a} \rangle \geq \min_{\partial D} \langle N, \vec{a} \rangle.$$

$$\langle N, \vec{a} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \Rightarrow |\nabla u| \leq \max_{\partial D} |\nabla u|$$

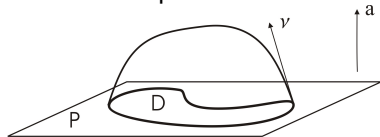
Cota a priori sobre $|\nabla u| \Leftrightarrow \langle N, \vec{a} \rangle \leq 1 - \epsilon$ en ∂D .

Equivalentemente

$$\langle \nu, \vec{a} \rangle \leq \delta < 1 \quad \text{en } \partial D$$

y δ depende *sólo* de las condiciones iniciales

- Usar superficies rotacionales como barreras



Si $q \in \partial D$ es donde se alcanza el mínimo de $H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle$,

$$H\langle \nu_q, \vec{a} \rangle + \langle dN_q \nu_q, \vec{a} \rangle \geq 0 \Rightarrow H\langle \nu, \vec{a} \rangle - \sigma(\nu, \nu)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0.$$

$$((\sigma(t, t) - H)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0 \Rightarrow (\kappa\langle N, n \rangle - H)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0$$

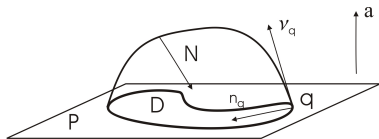
$$\Rightarrow \kappa\langle N, n \rangle \leq H \Rightarrow \underline{-\kappa\langle \nu, \vec{a} \rangle \leq H}$$

$$H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle \geq \langle N(q), \vec{a} \rangle$$

$$\langle N, \vec{a} \rangle \geq -H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N(q), \vec{a} \rangle \geq \langle N(q), \vec{a} \rangle.$$

Hipótesis: $\kappa > H$. Sea $\eta > 0$ con $\kappa \geq \eta > H$.

$$\langle \nu, \vec{a} \rangle \leq \frac{H}{\kappa} \leq \frac{H}{\eta} := \delta < 1$$



Si $q \in \partial D$ es donde se alcanza el mínimo de $H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle$,

$$H\langle \nu_q, \vec{a} \rangle + \langle dN_q \nu_q, \vec{a} \rangle \geq 0 \Rightarrow H\langle \nu, \vec{a} \rangle - \sigma(\nu, \nu)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0.$$

$$((\sigma(t, t) - H)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0 \Rightarrow (\kappa\langle N, n \rangle - H)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0$$

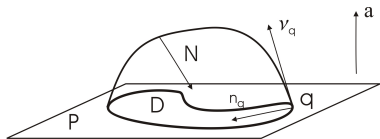
$$\Rightarrow \kappa\langle N, n \rangle \leq H \Rightarrow \underline{-\kappa\langle \nu, \vec{a} \rangle \leq H}$$

$$H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle \geq \langle N(q), \vec{a} \rangle$$

$$\langle N, \vec{a} \rangle \geq -H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N(q), \vec{a} \rangle \geq \langle N(q), \vec{a} \rangle.$$

Hipótesis: $\kappa > H$. Sea $\eta > 0$ con $\kappa \geq \eta > H$.

$$\langle \nu, \vec{a} \rangle \leq \frac{H}{\kappa} \leq \frac{H}{\eta} := \delta < 1$$



Si $q \in \partial D$ es donde se alcanza el mínimo de $H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle$,

$$H\langle \nu_q, \vec{a} \rangle + \langle dN_q \nu_q, \vec{a} \rangle \geq 0 \Rightarrow H\langle \nu, \vec{a} \rangle - \sigma(\nu, \nu)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0.$$

$$((\sigma(t, t) - H)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0 \Rightarrow (\kappa\langle N, n \rangle - H)\langle \nu, \vec{a} \rangle \geq 0$$

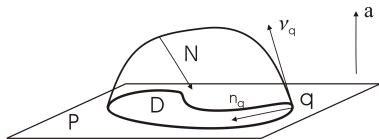
$$\Rightarrow \kappa\langle N, n \rangle \leq H \Rightarrow \underline{-\kappa\langle \nu, \vec{a} \rangle \leq H}$$

$$H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N, \vec{a} \rangle \geq \langle N(q), \vec{a} \rangle$$

$$\langle N, \vec{a} \rangle \geq -H\langle x, \vec{a} \rangle + \langle N(q), \vec{a} \rangle \geq \langle N(q), \vec{a} \rangle.$$

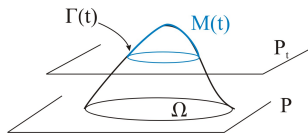
Hipótesis: $\kappa > H$. Sea $\eta > 0$ con $\kappa \geq \eta > H$.

$$\langle \nu, \vec{a} \rangle \leq \frac{H}{\kappa} \leq \frac{H}{\eta} := \delta < 1$$



Teorema

Si D es convexo, $H \in \mathbb{R}$, $\text{área}(D)H^2 < \pi/2$, entonces existe un grafo sobre D con borde ∂D y curvatura media H .



$P_t = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = t\}$ $M(t) = \{x \in M; x_3 \geq t\}$, $\Gamma(t) = M(t) \cap P_t$
 $\Omega(t)$: dominio en P_t acotado por $\Gamma(t)$.

$$\int_{\Gamma(t)} \langle \nu^t, E_3 \rangle ds_t = 2H|\Omega(t)|,$$

$$\begin{aligned}
 4\pi|\Omega(t)| &\leq L(t)^2 = \left(\int_{\Gamma(t)} 1 ds_t \right)^2 \leq \int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\nabla u|} ds_t \int_{\Gamma(t)} |\nabla u| ds_t \\
 &= -A'(t) \int_{\Gamma(t)} \langle \nu^t, E_3 \rangle ds_t \leq -2HA'(t)|\Omega(t)|.
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$2\pi \leq -HA'(t) \Rightarrow \frac{2\pi}{H} \leq -A'(t) \Rightarrow h \leq \frac{AH}{2\pi}.$$

Teorema

D es convexo, $H \in \mathbb{R}$, $\text{área}(D)H^2 < \pi/2 \Rightarrow$ existencia.

$$2HV = \int_S |\nabla \langle x, E_3 \rangle|^2 dS = \int_S (1 - \langle N, E_3 \rangle^2), \quad V = \int_D u \, dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi h}{H} &\leq A \leq 2H \int_D u \, dx dy + \int_S \langle N, E_3 \rangle^2 dS \\ &\leq 2Hha(D) + \int_S |\langle N, E_3 \rangle| dS = (2hH + 1)a(D) \end{aligned}$$

$$h \leq \frac{a(D)H}{2(\pi - a(D)H^2)}.$$

Por tanto

$$2\pi \leq -HA'(t) \Rightarrow \frac{2\pi}{H} \leq -A'(t) \Rightarrow h \leq \frac{AH}{2\pi}.$$

Teorema

D es convexo, $H \in \mathbb{R}$, $\text{área}(D)H^2 < \pi/2 \Rightarrow$ existencia.

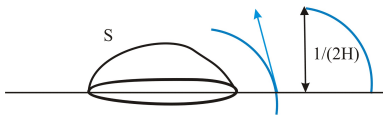
$$2HV = \int_S |\nabla \langle x, E_3 \rangle|^2 dS = \int_S (1 - \langle N, E_3 \rangle^2), \quad V = \int_D u \, dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi h}{H} &\leq A \leq 2H \int_D u \, dx dy + \int_S \langle N, E_3 \rangle^2 dS \\ &\leq 2Hha(D) + \int_S |\langle N, E_3 \rangle| dS = (2hH + 1)a(D) \end{aligned}$$

$$h \leq \frac{a(D)H}{2(\pi - a(D)H^2)}.$$

Hipótesis $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que

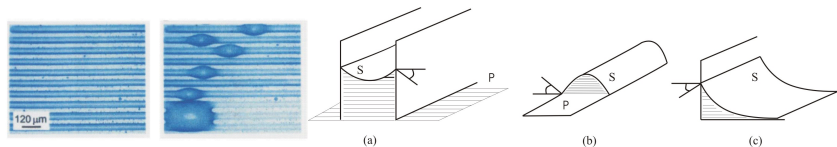
$$h < \frac{1}{2H} - \delta.$$



Funciones curvatura media que son interesantes son aquéllas que tienen un origen físico

- 1 $H = \text{constante}$, incluyendo superficies minimales ($H = 0$).
- 2 $H(x, y, z) = \kappa z + b$: gotas líquidas con gravedad, capilaridad.
- 3 $H(x, y, z) = a(x^2 + y^2) + b$: gotas líquidas que rotan.

Capilaridad sobre bandas infinitas: canales líquidos



Objetivo : estudiar la forma de la gota + obtener cotas a priori del tamaño de la gota.

Parametrizamos como $X(s, t) = \alpha(s) + t\vec{e}_2$. Si

$\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ p.p.a., es equivalente a estudiar

$$x'(s) = \cos \theta(s)$$

$$z'(s) = \sin \theta(s)$$

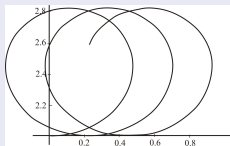
$$\theta'(s) = \kappa z(s) + b$$

con condiciones iniciales

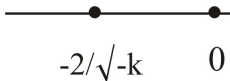
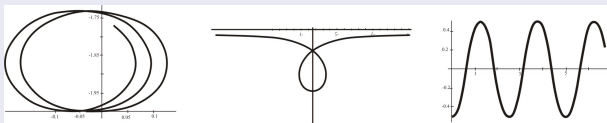
$$\alpha(0) = (0, 0, z_0), \quad \theta(0) = 0$$

Teorema

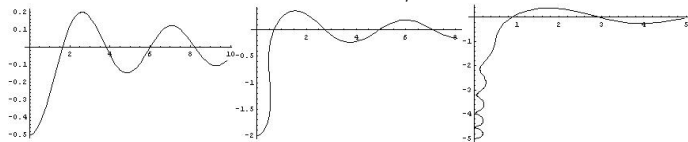
- Si $\kappa > 0$,



- Si $\kappa < 0$, dependiendo de la posición de z_0 respecto de $-2/\sqrt{-\kappa}$, tenemos



Diferencia con el caso rotacional, caso $\kappa < 0$.

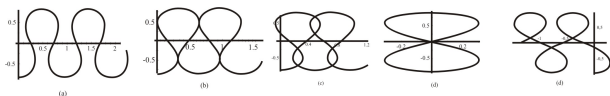


- Si

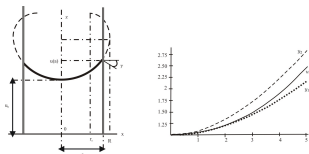
$$-\sqrt{\frac{-2}{\kappa}} < z_0 < 0 \Rightarrow \text{grafo.}$$

- Si

$$-\frac{2}{\sqrt{-\kappa}} < z_0 < -\sqrt{\frac{-2}{\kappa}}$$



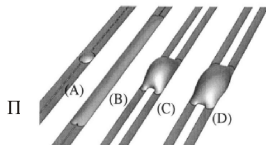
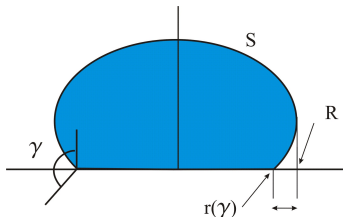
Obtenemos estimaciones ($\kappa > 0$)



Teorema

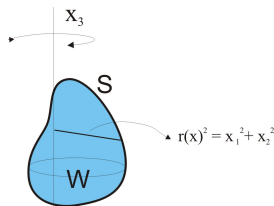
Si $\kappa > 0$ y $\pi/2 < \gamma < \pi$,

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{1 - \sin \gamma}{\sqrt{2(1 - \cos \gamma) + \kappa u_0^2}} < R - r(\gamma) < \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{1 - \sin \gamma}{\sqrt{2 + \kappa u_0^2}}$$



Gotas líquidas que rotan

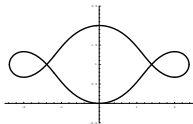
$$E = \tau|S| - \frac{1}{2}\rho\omega^2 \int_W r^2 dx$$



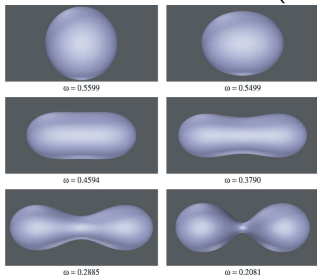
$$2\tau H(x) = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \lambda \quad x \in S.$$
$$H(x_1, x_2, x_3) = ar^2 + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Diferencias con el caso CMC.

- 1 Existen de género cero que no están embebidas (versus teorema de Hopf).



- 2 Existen toro embebidos (versus teorema de Alexandrov).



Problema de existencia. Dada una curva cerrada Γ y $a, b \in \mathbb{R}$. ¿existe una gota rotacional M con $\partial M = \Gamma$ y $2H(x) = ar^2 + b$?

Teorema ($\partial M \neq \emptyset$)

$$\int_{\partial M} (ar^2 + 2b) \langle \alpha \wedge \alpha', E_3 \rangle ds = -4 \int_{\partial M} \langle \nu, E_3 \rangle ds. \quad (1)$$

En particular

$$a \int_{\partial M} r^2 \langle \alpha \wedge \alpha', E_3 \rangle ds \leq 4 \left(|\partial M| - b \text{area}(\partial M) \right),$$

Problema de existencia. Dada una curva cerrada Γ y $a, b \in \mathbb{R}$. ¿existe una gota rotacional M con $\partial M = \Gamma$ y $2H(x) = ar^2 + b$?

Teorema ($\partial M \neq \emptyset$)

$$\int_{\partial M} (ar^2 + 2b) \langle \alpha \wedge \alpha', E_3 \rangle ds = -4 \int_{\partial M} \langle \nu, E_3 \rangle ds. \quad (1)$$

En particular

$$a \int_{\partial M} r^2 \langle \alpha \wedge \alpha', E_3 \rangle ds \leq 4 \left(|\partial M| - b \text{area}(\partial M) \right),$$

Corolario

Si $\Gamma = \mathbb{S}^1(R)$ es un círculo horizontal centrado en el eje x_3 , entonces

$$|aR^2 + 2b| \leq \frac{4}{R}.$$

$$a = 0, 2H = b \implies |2b| = |4H| \leq 4/R.$$

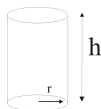
Definición

La superficie es estable si

$$-\int_M u \left(\Delta u + (|\sigma|^2 - 2a(x_1 N_1 + x_2 N_2)) u \right) dM \geq 0$$

$$u|_{\partial M} = 0 \quad \int_M u dM = 0.$$

(Plateau)



$H = 1/(2r)$ estable sii $h < 2\pi r$

Teorema (1)

La altura h de una estable con $a > 0$

$$h \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{a|\Omega|}}, \quad L = |C|, C = \partial\Omega.$$

Teorema (2)

La altura h de una estable con $a \geq 0, b > 0$

$$h \leq 2\pi \sqrt{\frac{L}{4a|\Omega| + Lb^2}}.$$

$$H(x, y, z) = ar^2 + b$$

- 1 Para el cilindro: gota rotacional con $a = 1/r^3$ y $b = 0$. Existe dos nociones de estabilidad:
 - 1 como rotacional, estable $\Rightarrow h \leq \frac{\pi r}{\sqrt{2}}$.
 - 2 como CMC, estable $\Rightarrow h < 2\pi r$.

Existen columnas cilíndricas que no son estables como rotacionales pero estables como CMC.

- 2 Si $a = 0$ y $b = 1/r$: el resultado de Plateau.

- $x(t, s) = \alpha(s) + tE_3$, $t \in [0, h]$ y $s \in [0, L]$
- $l = dt^2 + ds^2$,
- $N(t, s) = E_3 \wedge \alpha'(s)$.
- $2H(t, s) = \langle E_3 \wedge \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = \kappa(s)$.
- $\Delta = \partial_{tt}^2 + \partial_{ss}^2 = \Delta_0$.
- $|\sigma|^2 = \kappa(s)^2$
- $x_1 N_1 + x_2 N_2 = -\langle \alpha(s) \wedge \alpha'(s), E_3 \rangle$.

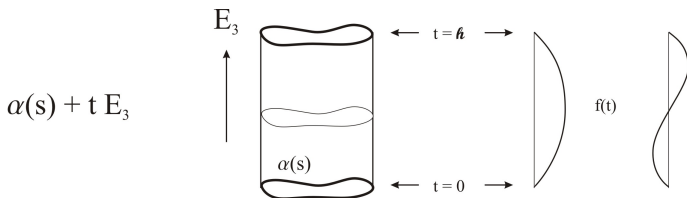
Se toma

$$u = u(t, s) = f(t)g(s).$$

$u(t, s) = f(t)g(s)$ es una función test si

$$f(0) = f(h) = 0, \quad g(0) = g(L) = g'(0) = g'(L)$$

$$\int_0^h f(t) dt = 0 \quad \text{ó} \quad \int_0^L g(s) ds = 0.$$



Th. 1

$$f(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{h}\right); \quad g_i(s) = \langle \alpha'(s), E_i \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Th. 2

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{h}\right); \quad g(s) = 1.$$