Índice y estabilidad de hipersuperficies minimales y de CMC en la esfera I

Luis J. Alías
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Programa de Posgrado en Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

15 de abril de 2009

Notación y definiciones básicas

- Consideremos $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable en la esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Notación y definiciones básicas

- Consideremos $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable en la esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
- Denotaremos por A el **operador forma** de Σ con respecto a un campo de vectores unitario normal N globalmente definido sobre Σ.

Notación y definiciones básicas

- Consideremos $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable en la esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
- Denotaremos por A el **operador forma** de Σ con respecto a un campo de vectores unitario normal N globalmente definido sobre Σ.
- Es decir, $A : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)$ es el endomorfismo determinado por

$$AX = -\nabla^{o}{}_X N = -\overline{\nabla}_X N, \quad X \in \mathcal{X}(\Sigma),$$

donde ∇^{o} y $\overline{\nabla}$ denotan, respectivamente, las conexiones de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+2}$ y $\mathbb{S}^{n+1}$.

Notación y definiciones básicas

- Consideremos $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable en la esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
- Denotaremos por A el **operador forma** de Σ con respecto a un campo de vectores unitario normal N globalmente definido sobre Σ.
- Es decir, $A : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)$ es el endomorfismo determinado por

$$AX = -\nabla^{\mathrm{o}}{}_X N = -\overline{\nabla}_X N, \quad X \in \mathcal{X}(\Sigma),$$

  donde ∇^{o} y $\overline{\nabla}$ denotan, respectivamente, las conexiones de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+2}$ y $\mathbb{S}^{n+1}$.
- A define un endomorfismo simétrico en $\mathcal{X}(\Sigma)$ cuyos valores propios $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ son las **curvaturas principales** de la hipersuperficie.

Notación y definiciones básicas

- Consideremos $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie orientable en la esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
- Denotaremos por A el **operador forma** de Σ con respecto a un campo de vectores unitario normal N globalmente definido sobre Σ.
- Es decir, $A : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)$ es el endomorfismo determinado por

$$AX = -\nabla^{o}{}_X N = -\overline{\nabla}_X N, \quad X \in \mathcal{X}(\Sigma),$$

  donde ∇^{o} y $\overline{\nabla}$ denotan, respectivamente, las conexiones de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+2}$ y $\mathbb{S}^{n+1}$.
- A define un endomorfismo simétrico en $\mathcal{X}(\Sigma)$ cuyos valores propios $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ son las **curvaturas principales** de la hipersuperficie.
- La **curvatura media** de Σ se define entonces como

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{n}(\kappa_1 + \cdots + \kappa_n).$$

Hipersuperficies minimales como soluciones a un problema variacional

- A lo largo de este curso, supondremos que Σ es **compacta**.

Hipersuperficies minimales como soluciones a un problema variacional

- A lo largo de este curso, supondremos que Σ es **compacta**.
- Cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ induce una **variación normal** de ψ

$$\psi_t(p) = \mathrm{Exp}_{\psi(p)}(tf(p)N(p)) = \cos(tf(p))\psi(p) + \mathrm{sen}(tf(p))N(p).$$

Hipersuperficies minimales como soluciones a un problema variacional

- A lo largo de este curso, supondremos que Σ es **compacta**.
- Cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ induce una **variación normal** de ψ

$$\psi_t(p) = \mathrm{Exp}_{\psi(p)}(tf(p)N(p)) = \cos(tf(p))\psi(p) + \mathrm{sen}(tf(p))N(p).$$

- Como Σ es compacta y $\psi_0 = \psi$ es una inmersión, existe $\varepsilon > 0$ tal que ψ_t es también una inmersión, para todo $|t| < \varepsilon$.

Hipersuperficies minimales como soluciones a un problema variacional

- A lo largo de este curso, supondremos que Σ es **compacta**.
- Cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ induce una **variación normal** de ψ

$$\psi_t(p) = \mathrm{Exp}_{\psi(p)}(tf(p)N(p)) = \cos(tf(p))\psi(p) + \mathrm{sen}(tf(p))N(p).$$

- Como Σ es compacta y $\psi_0 = \psi$ es una inmersión, existe $\varepsilon > 0$ tal que ψ_t es también una inmersión, para todo $|t| < \varepsilon$.
- Así, podemos considerar la función área, $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(t) = \mathrm{Area}(\Sigma_t) = \mathrm{Area}(\Sigma, \psi_t^*(\langle , \rangle)) = \int_\Sigma d\Sigma_t,$$

Hipersuperficies minimales como soluciones a un problema variacional

- A lo largo de este curso, supondremos que Σ es **compacta**.
- Cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ induce una **variación normal** de ψ

$$\psi_t(p) = \mathrm{Exp}_{\psi(p)}(tf(p)N(p)) = \cos(tf(p))\psi(p) + \mathrm{sen}(tf(p))N(p).$$

- Como Σ es compacta y $\psi_0 = \psi$ es una inmersión, existe $\varepsilon > 0$ tal que ψ_t es también una inmersión, para todo $|t| < \varepsilon$.
- Así, podemos considerar la función área, $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(t) = \mathrm{Area}(\Sigma_t) = \mathrm{Area}(\Sigma, \psi_t^*(\langle , \rangle)) = \int_\Sigma d\Sigma_t,$$

Lema 1 (Primera fórmula de variación del área)

$$\delta_f \mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_\Sigma fH$$

Hipersuperficies minimales como soluciones a un problema variacional

- A lo largo de este curso, supondremos que Σ es **compacta**.
- Cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ induce una **variación normal** de ψ

$$\psi_t(p) = \mathrm{Exp}_{\psi(p)}(tf(p)N(p)) = \cos(tf(p))\psi(p) + \mathrm{sen}(tf(p))N(p).$$

- Como Σ es compacta y $\psi_0 = \psi$ es una inmersión, existe $\varepsilon > 0$ tal que ψ_t es también una inmersión, para todo $|t| < \varepsilon$.
- Así, podemos considerar la función área, $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(t) = \mathrm{Area}(\Sigma_t) = \mathrm{Area}(\Sigma, \psi_t^*(\langle , \rangle)) = \int_\Sigma d\Sigma_t,$$

Lema 1 (Primera fórmula de variación del área)

$$\delta_f \mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_\Sigma fH$$

Corolario 1

Σ es una hipersuperficie minimal (es decir, $H = 0$ en Σ) si y sólo si $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$.

Estabilidad e índice de hipersuperficies minimales

- La estabilidad de este problema variacional viene dada por la **segunda fórmula de variación** del área,

$$\delta_f^2 \mathcal{A} = \frac{d^2 \mathcal{A}}{dt^2}(0) = -\int_\Sigma (f \Delta f + (|A|^2 + n) f^2) = -\int_\Sigma f J f.$$

Estabilidad e índice de hipersuperficies minimales

- La estabilidad de este problema variacional viene dada por la **segunda fórmula de variación** del área,

$$\delta_f^2 \mathcal{A} = \frac{d^2 \mathcal{A}}{dt^2}(0) = -\int_\Sigma (f\Delta f + (|A|^2 + n)f^2) = -\int_\Sigma fJf.$$

- Aquí $J = \Delta + |A|^2 + n$, donde Δ denota el operador **laplaciano** de Σ y $|A|^2 = \mathrm{tr}(A^2)$ es el cuadrado de la norma del operador forma.

Estabilidad e índice de hipersuperficies minimales

- La estabilidad de este problema variacional viene dada por la **segunda fórmula de variación** del área,

$$\delta_f^2\mathcal{A} = \frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}(0) = -\int_\Sigma (f\Delta f + (|A|^2+n)f^2) = -\int_\Sigma fJf.$$

- Aquí $J = \Delta + |A|^2 + n$, donde Δ denota el operador **laplaciano** de Σ y $|A|^2 = \mathrm{tr}(A^2)$ es el cuadrado de la norma del operador forma.
- El operador $J : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ se llama el operador de **Jacobi** (o de estabilidad) de Σ.

Estabilidad e índice de hipersuperficies minimales

- La estabilidad de este problema variacional viene dada por la **segunda fórmula de variación** del área,

$$\delta_f^2\mathcal{A} = \frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}(0) = -\int_\Sigma (f\Delta f + (|A|^2 + n)f^2) = -\int_\Sigma fJf.$$

- Aquí $J = \Delta + |A|^2 + n$, donde Δ denota el operador **laplaciano** de Σ y $|A|^2 = \mathrm{tr}(A^2)$ es el cuadrado de la norma del operador forma.
- El operador $J : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ se llama el operador de **Jacobi** (o de estabilidad) de Σ.
- Un número real λ es un **valor propio** de J si y sólo si $Jf + \lambda f = 0$ para alguna función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, $f \neq 0$.

Estabilidad e índice de hipersuperficies minimales

- La estabilidad de este problema variacional viene dada por la **segunda fórmula de variación** del área,

$$\delta_f^2\mathcal{A} = \frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}(0) = -\int_\Sigma (f\Delta f + (|A|^2+n)f^2) = -\int_\Sigma fJf.$$

- Aquí $J = \Delta + |A|^2 + n$, donde Δ denota el operador **laplaciano** de Σ y $|A|^2 = \mathrm{tr}(A^2)$ es el cuadrado de la norma del operador forma.
- El operador $J : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ se llama el operador de **Jacobi** (o de estabilidad) de Σ.
- Un número real λ es un **valor propio** de J si y sólo si $Jf + \lambda f = 0$ para alguna función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, $f \neq 0$.
- Como es bien sabido, el **espectro** de J

$$\mathrm{Spec}(J) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots\}$$

está formado por una sucesión creciente de valores propios λ_k con multiplicidad finita m_k y tal que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty.$$

- Además, el primer valor propio es **simple** ($m_1 = 1$) y verifica la siguiente caracterización

$$\lambda_1 = \text{mín}\left\{ \frac{-\int_\Sigma fJf}{\int_\Sigma f^2} : \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma), f \neq 0 \right\}.$$

- Además, el primer valor propio es **simple** ($m_1 = 1$) y verifica la siguiente caracterización

$$\lambda_1 = \text{mín}\left\{ \frac{-\int_\Sigma fJf}{\int_\Sigma f^2} : \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma), f \neq 0 \right\}.$$

- El operador J induce la forma cuadrática $Q : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(f) = -\int_\Sigma fJf.$$

- Además, el primer valor propio es **simple** ($m_1 = 1$) y verifica la siguiente caracterización

$$\lambda_1 = \text{mín}\left\{ \frac{-\int_\Sigma fJf}{\int_\Sigma f^2} : \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma), f \neq 0 \right\}.$$

- El operador J induce la forma cuadrática $Q : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(f) = -\int_\Sigma fJf.$$

- El **índice** de una hipersuperficie minimal Σ, que denotamos por $\text{Ind}(\Sigma)$, se define como

$$\text{Ind}(\Sigma) = \text{máx}\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\}.$$

- Además, el primer valor propio es **simple** ($m_1 = 1$) y verifica la siguiente caracterización

$$\lambda_1 = \text{mín}\left\{ \frac{-\int_\Sigma fJf}{\int_\Sigma f^2} : \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma), f \neq 0 \right\}.$$

- El operador J induce la forma cuadrática $Q : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(f) = -\int_\Sigma fJf.$$

- El **índice** de una hipersuperficie minimal Σ, que denotamos por $\text{Ind}(\Sigma)$, se define como

$$\text{Ind}(\Sigma) = \text{máx}\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\}.$$

- Equivalentemente, $\text{Ind}(\Sigma)$ es el número de valores propios negativos de J (contados con multiplicidad), que es necesariamente finito y está dado por

$$\text{Ind}(\Sigma) = \sum_{\lambda_k < 0} m_k < \infty.$$

- Además, el primer valor propio es **simple** ($m_1 = 1$) y verifica la siguiente caracterización

$$\lambda_1 = \text{mín}\left\{\frac{-\int_\Sigma fJf}{\int_\Sigma f^2} : \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma), f \neq 0\right\}.$$

- El operador J induce la forma cuadrática $Q : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(f) = -\int_\Sigma fJf.$$

- El **índice** de una hipersuperficie minimal Σ, que denotamos por $\mathrm{Ind}(\Sigma)$, se define como

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = \text{máx}\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\}.$$

- Equivalentemente, $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ es el número de valores propios negativos de J (contados con multiplicidad), que es necesariamente finito y está dado por

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = \sum_{\lambda_k < 0} m_k < \infty.$$

- Una hipersuperficie minimal sería **estable** si $Q(f) \geqslant 0$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. Equivalentemente, $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 0$.

- Intuitivamente, $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ mide el número de direcciones independientes en las cuales la hipersuperficie **deja de minimizar área**.

- Intuitivamente, $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ mide el número de direcciones independientes en las cuales la hipersuperficie **deja de minimizar área**.
- De hecho, si $Q(f) < 0$ para alguna $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, entonces $\delta_f^2\mathcal{A} < 0$ y por lo tanto
$$\mathrm{Area}(\Sigma) > \mathrm{Area}(\Sigma_t),$$
para valores pequeños de $t \neq 0$, en la variación normal de Σ inducida por f.

- Intuitivamente, $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ mide el número de direcciones independientes en las cuales la hipersuperficie **deja de minimizar área**.
- De hecho, si $Q(f) < 0$ para alguna $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, entonces $\delta_f^2 \mathcal{A} < 0$ y por lo tanto
$$\mathrm{Area}(\Sigma) > \mathrm{Area}(\Sigma_t),$$
para valores pequeños de $t \neq 0$, en la variación normal de Σ inducida por f.
- Esto significa que la hipersuperficie minimal Σ, si bien es un punto crítico del área, **no es un mínimo local**.

- Intuitivamente, $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ mide el número de direcciones independientes en las cuales la hipersuperficie **deja de minimizar área**.
- De hecho, si $Q(f) < 0$ para alguna $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, entonces $\delta_f^2 \mathcal{A} < 0$ y por lo tanto
$$\mathrm{Area}(\Sigma) > \mathrm{Area}(\Sigma_t),$$
para valores pequeños de $t \neq 0$, en la variación normal de Σ inducida por f.
- Esto significa que la hipersuperficie minimal Σ, si bien es un punto crítico del área, **no es un mínimo local**.
- Para hipersuperficies minimales en $\mathbb{S}^{n+1}$ esto ocurre **siempre**, ya que tomando la función constante $f = 1$ se tiene
$$\begin{aligned} Q(1) &= -\int_\Sigma (|A|^2 + n) = -n\,\mathrm{Area}(\Sigma) - \int_\Sigma |A|^2 \\ &\leqslant -n\,\mathrm{Area}(\Sigma) < 0. \end{aligned}$$

- Intuitivamente, $\text{Ind}(\Sigma)$ mide el número de direcciones independientes en las cuales la hipersuperficie **deja de minimizar área**.
- De hecho, si $Q(f) < 0$ para alguna $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, entonces $\delta_f^2 \mathcal{A} < 0$ y por lo tanto
$$\text{Area}(\Sigma) > \text{Area}(\Sigma_t),$$
para valores pequeños de $t \neq 0$, en la variación normal de Σ inducida por f.
- Esto significa que la hipersuperficie minimal Σ, si bien es un punto crítico del área, **no es un mínimo local**.
- Para hipersuperficies minimales en $\mathbb{S}^{n+1}$ esto ocurre **siempre**, ya que tomando la función constante $f = 1$ se tiene
$$\begin{aligned} Q(1) &= -\int_\Sigma (|A|^2 + n) = -n \,\text{Area}(\Sigma) - \int_\Sigma |A|^2 \\ &\leqslant -n \,\text{Area}(\Sigma) < 0. \end{aligned}$$

Corolario 2

No existe ninguna hipersuperficie minimal compacta estable en la esfera. Equivalentemente, $\text{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie minimal compacta en $\mathbb{S}^{n+1}$.

Ejemplo 1

Los ecuadores son hipersuperficies minimales con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.

Hipersuperficies minimales con índice bajo

Ejemplo 1

Los ecuadores son hipersuperficies minimales con $\operatorname{Ind}(\Sigma) = 1$.

- Para un ecuador (totalmente geodésico), $|A|^2 = 0$ y el operador de Jacobi es $J = \Delta + n$, donde Δ es el laplaciano en la esfera $\mathbb{S}^n$.

Ejemplo 1

Los ecuadores son hipersuperficies minimales con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.

- Para un ecuador (totalmente geodésico), $|A|^2 = 0$ y el operador de Jacobi es $J = \Delta + n$, donde Δ es el laplaciano en la esfera $\mathbb{S}^n$.
- Así, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio de Δ en $\mathbb{S}^n$, con la misma multiplicidad.

Ejemplo 1

Los ecuadores son hipersuperficies minimales con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.

- Para un ecuador (totalmente geodésico), $|A|^2 = 0$ y el operador de Jacobi es $J = \Delta + n$, donde Δ es el laplaciano en la esfera $\mathbb{S}^n$.
- Así, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio de Δ en $\mathbb{S}^n$, con la misma multiplicidad.
- En particular, $\lambda_1 = -n < 0$ con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ind}(\Sigma) = m_1 = 1$.

Hipersuperficies minimales con índice bajo

Ejemplo 1

Los ecuadores son hipersuperficies minimales con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.

- Para un ecuador (totalmente geodésico), $|A|^2 = 0$ y el operador de Jacobi es $J = \Delta + n$, donde Δ es el laplaciano en la esfera $\mathbb{S}^n$.
- Así, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio de Δ en $\mathbb{S}^n$, con la misma multiplicidad.
- En particular, $\lambda_1 = -n < 0$ con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ind}(\Sigma) = m_1 = 1$.

Ejemplo 2

Los toros de Clifford son hipersuperficies minimales con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = n + 3$.

Hipersuperficies minimales con índice bajo

Ejemplo 1

Los ecuadores son hipersuperficies minimales con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.

- Para un ecuador (totalmente geodésico), $|A|^2 = 0$ y el operador de Jacobi es $J = \Delta + n$, donde Δ es el laplaciano en la esfera $\mathbb{S}^n$.
- Así, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio de Δ en $\mathbb{S}^n$, con la misma multiplicidad.
- En particular, $\lambda_1 = -n < 0$ con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ind}(\Sigma) = m_1 = 1$.

Ejemplo 2

Los toros de Clifford son hipersuperficies minimales con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = n + 3$.

- Se obtienen considerando la inmersiones estándar
$$\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1},$$
para un entero dado $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, y tomando la inmersión producto
$$\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}.$$

- En un punto $(x, y) \in \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, el campo de vectores
$$N(x, y) = \left(\sqrt{\frac{n-k}{k}} x, -\sqrt{\frac{k}{n-k}} y \right)$$
define un vector unitario normal en el punto (x, y).

- En un punto $(x, y) \in \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, el campo de vectores
$$N(x, y) = \left(\sqrt{\frac{n-k}{k}} x, -\sqrt{\frac{k}{n-k}} y \right)$$
define un vector unitario normal en el punto (x, y).
- Con respecto a esta orientación, sus curvaturas principales están dadas por
$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = -\sqrt{\frac{n-k}{k}}, \quad \kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_n = \sqrt{\frac{k}{n-k}}.$$

- En un punto $(x, y) \in \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, el campo de vectores
$$N(x, y) = \left(\sqrt{\frac{n-k}{k}} x, -\sqrt{\frac{k}{n-k}} y \right)$$
define un vector unitario normal en el punto (x, y).
- Con respecto a esta orientación, sus curvaturas principales están dadas por
$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = -\sqrt{\frac{n-k}{k}}, \quad \kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_n = \sqrt{\frac{k}{n-k}}.$$
- Todo toro de Clifford minimal tiene $|A|^2 = n$, y su operador de Jacobi se reduce a
$$J = \Delta + 2n,$$
donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$.

- En un punto $(x,y) \in \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, el campo de vectores
$$N(x,y) = \left(\sqrt{\frac{n-k}{k}} x, -\sqrt{\frac{k}{n-k}} y \right)$$
define un vector unitario normal en el punto (x,y).
- Con respecto a esta orientación, sus curvaturas principales están dadas por
$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = -\sqrt{\frac{n-k}{k}}, \quad \kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_n = \sqrt{\frac{k}{n-k}}.$$
- Todo toro de Clifford minimal tiene $|A|^2 = n$, y su operador de Jacobi se reduce a
$$J = \Delta + 2n,$$
donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$.
- Los valores propios de J están dados por
$$\lambda_i = \mu_i - 2n,$$
donde μ_i es el i-ésimo valor propio de Δ en la variedad producto $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, con la misma multiplicidad.

- El índice de Σ se reduce al número de valores propios de Δ (contados con multiplicidad) que son **estrictamente menores** que $2n$.

- El índice de Σ se reduce al número de valores propios de Δ (contados con multiplicidad) que son **estrictamente menores** que $2n$.
- Para calcularlo, recuérdese que si α es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n})$ con multiplicidad m_α y β es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad m_β, entonces $\mu = \alpha + \beta$ es un valor propio del laplaciano en la variedad producto $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad

$$m_\mu = \sum_{\alpha+\beta=\mu} m_\alpha m_\beta.$$

- El índice de Σ se reduce al número de valores propios de Δ (contados con multiplicidad) que son **estrictamente menores** que $2n$.
- Para calcularlo, recuérdese que si α es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n})$ con multiplicidad m_α y β es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad m_β, entonces $\mu = \alpha + \beta$ es un valor propio del laplaciano en la variedad producto $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad

$$m_\mu = \sum_{\alpha+\beta=\mu} m_\alpha m_\beta.$$

- Se sigue fácilmente de aquí que
  (i) $\mu_1 = 0$ y $\lambda_1 = -2n$, con multiplicidad $m_1 = 1$,

- El índice de Σ se reduce al número de valores propios de Δ (contados con multiplicidad) que son **estrictamente menores** que $2n$.
- Para calcularlo, recuérdese que si α es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n})$ con multiplicidad m_α y β es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad m_β, entonces $\mu = \alpha + \beta$ es un valor propio del laplaciano en la variedad producto $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad

$$m_\mu = \sum_{\alpha+\beta=\mu} m_\alpha m_\beta.$$

- Se sigue fácilmente de aquí que
  - (i) $\mu_1 = 0$ y $\lambda_1 = -2n$, con multiplicidad $m_1 = 1$,
  - (ii) $\mu_2 = \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = n$ y $\lambda_2 = -n$, con multiplicidad $m_2 = n + 2$, y

- El índice de Σ se reduce al número de valores propios de Δ (contados con multiplicidad) que son **estrictamente menores** que $2n$.
- Para calcularlo, recuérdese que si α es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n})$ con multiplicidad m_α y β es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad m_β, entonces $\mu = \alpha + \beta$ es un valor propio del laplaciano en la variedad producto $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad

$$m_\mu = \sum_{\alpha+\beta=\mu} m_\alpha m_\beta.$$

- Se sigue fácilmente de aquí que
  (i) $\mu_1 = 0$ y $\lambda_1 = -2n$, con multiplicidad $m_1 = 1$,
  (ii) $\mu_2 = \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = n$ y $\lambda_2 = -n$, con multiplicidad $m_2 = n + 2$, y
  (iii) $\mu_3 = \alpha_2 + \beta_2 = 2n$ y $\lambda_3 = 0$.

- El índice de Σ se reduce al número de valores propios de Δ (contados con multiplicidad) que son **estrictamente menores** que $2n$.
- Para calcularlo, recuérdese que si α es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n})$ con multiplicidad m_α y β es un valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad m_β, entonces $\mu = \alpha + \beta$ es un valor propio del laplaciano en la variedad producto $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ con multiplicidad

$$m_\mu = \sum_{\alpha+\beta=\mu} m_\alpha m_\beta.$$

- Se sigue fácilmente de aquí que
  (i) $\mu_1 = 0$ y $\lambda_1 = -2n$, con multiplicidad $m_1 = 1$,
  (ii) $\mu_2 = \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = n$ y $\lambda_2 = -n$, con multiplicidad $m_2 = n + 2$, y
  (iii) $\mu_3 = \alpha_2 + \beta_2 = 2n$ y $\lambda_3 = 0$.
- Por lo tanto, todos los toros de Clifford minimales en $\mathbb{S}^{n+1}$ tienen

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = m_1 + m_2 = 1 + n + 2 = n + 3.$$

- Simons (1968) caracterizó los ecuadores como las **únicas** hipersuperficies minimales compactas en $\mathbb{S}^{n+1}$ con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.

- Simons (1968) caracterizó los ecuadores como las **únicas** hipersuperficies minimales compactas en $\mathbb{S}^{n+1}$ con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.
- Más tarde, Urbano (1990), cuando $n = 2$, y El Soufi (1993), en dimensión general n, probaron que si Σ **no** es un ecuador, entonces no sólo debe ser $\mathrm{Ind}(\Sigma) > 1$ sino que de hecho debe ser
$$\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3.$$

- Simons (1968) caracterizó los ecuadores como las **únicas** hipersuperficies minimales compactas en $\mathbb{S}^{n+1}$ con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.
- Más tarde, Urbano (1990), cuando $n = 2$, y El Soufi (1993), en dimensión general n, probaron que si Σ **no** es un ecuador, entonces no sólo debe ser $\mathrm{Ind}(\Sigma) > 1$ sino que de hecho debe ser

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3.$$

Teorema 1 (Simons; Urbano; El Soufi)

Sea Σ^n una hipersuperficie minimal compacta y orientable inmersa en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$ (y Σ es un ecuador $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3$.

- Simons (1968) caracterizó los ecuadores como las **únicas** hipersuperficies minimales compactas en $\mathbb{S}^{n+1}$ con $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$.
- Más tarde, Urbano (1990), cuando $n = 2$, y El Soufi (1993), en dimensión general n, probaron que si Σ **no** es un ecuador, entonces no sólo debe ser $\mathrm{Ind}(\Sigma) > 1$ sino que de hecho debe ser

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3.$$

Teorema 1 (Simons; Urbano; El Soufi)

Sea Σ^n una hipersuperficie minimal compacta y orientable inmersa en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$ (y Σ es un ecuador $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3$.

Conjetura

Sea Σ^n una hipersuperficie minimal compacta y orientable inmersa en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$ (y Σ es un ecuador $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3$, con igualdad si y sólo si Σ es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.

Demostración del Teorema 1

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie minimal en $\mathbb{S}^{n+1}$, y que $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$ para los ecuadores.

Demostración del Teorema 1

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie minimal en $\mathbb{S}^{n+1}$, y que $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$ para los ecuadores.
- Queda por ver que $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n+3$ cuando Σ **no** es totalmente geodésica.

Demostración del Teorema 1

- Sabemos ya que $\operatorname{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie minimal en $\mathbb{S}^{n+1}$, y que $\operatorname{Ind}(\Sigma) = 1$ para los ecuadores.
- Queda por ver que $\operatorname{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3$ cuando Σ **no** es totalmente geodésica.
- Utilizando la función constante $f = 1$ como función test en la estimación de λ_1, tenemos que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\operatorname{Area}(\Sigma)} \leqslant -n - \frac{1}{\operatorname{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n.$$

Demostración del Teorema 1

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie minimal en $\mathbb{S}^{n+1}$, y que $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$ para los ecuadores.
- Queda por ver que $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n+3$ cuando Σ **no** es totalmente geodésica.
- Utilizando la función constante $f = 1$ como función test en la estimación de λ_1, tenemos que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \leqslant -n - \frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n.$$

- Además, se da la igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica ($|A|^2 = 0$).

Demostración del Teorema 1

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie minimal en $\mathbb{S}^{n+1}$, y que $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 1$ para los ecuadores.
- Queda por ver que $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant n + 3$ cuando Σ **no** es totalmente geodésica.
- Utilizando la función constante $f = 1$ como función test en la estimación de λ_1, tenemos que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \leqslant -n - \frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n.$$

- Además, se da la igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica ($|A|^2 = 0$).
- Por lo tanto, cuando Σ no es totalmente geodésica tenemos que

$$\lambda_1 < -n \quad \text{con multiplicidad } m_1 = 1.$$

Demostración del Teorema 1

- Sabemos ya que $\operatorname{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie minimal en $\mathbb{S}^{n+1}$, y que $\operatorname{Ind}(\Sigma) = 1$ para los ecuadores.
- Queda por ver que $\operatorname{Ind}(\Sigma) \geqslant n+3$ cuando Σ **no** es totalmente geodésica.
- Utilizando la función constante $f = 1$ como función test en la estimación de λ_1, tenemos que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\operatorname{Area}(\Sigma)} \leqslant -n - \frac{1}{\operatorname{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n.$$

- Además, se da la igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica ($|A|^2 = 0$).
- Por lo tanto, cuando Σ no es totalmente geodésica tenemos que

$$\lambda_1 < -n \quad \text{con multiplicidad } m_1 = 1.$$

- Por tanto, veremos que $\operatorname{Ind}(\Sigma) \geqslant n+3$ probando que $-n$ es **otro** valor propio negativo de J con multiplicidad **al menos** $n+2$.

- Para ello, dado un vector fijo $v \in \mathbb{R}^{n+2}$, consideraremos las siguientes funciones sobre Σ

$$\ell_v = \langle \psi, v \rangle \quad \text{y} \quad f_v = \langle N, v \rangle.$$

- Para ello, dado un vector fijo $v \in \mathbb{R}^{n+2}$, consideraremos las siguientes funciones sobre Σ

$$\ell_v = \langle \psi, v \rangle \quad \text{y} \quad f_v = \langle N, v \rangle.$$

- No es difícil ver que

$$\begin{aligned} \nabla \ell_v &= v^\top, \\ \nabla_X \nabla \ell_v &= \nabla_X v^\top = -\ell_v X + f_v AX, \ \text{y} \\ \nabla^2 \ell_v(X, Y) &= -\ell_v \langle X, Y \rangle + f_v \langle AX, Y \rangle, \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, donde $v^\top \in \mathcal{X}(\Sigma)$ denota la parte tangente de v, es decir,

$$v = v^\top + f_v N + \ell_v \psi.$$

- Para ello, dado un vector fijo $v \in \mathbb{R}^{n+2}$, consideraremos las siguientes funciones sobre Σ

$$\ell_v = \langle \psi, v \rangle \quad \text{y} \quad f_v = \langle N, v \rangle.$$

- No es difícil ver que

$$\begin{aligned} \nabla \ell_v &= v^\top, \\ \nabla_X \nabla \ell_v &= \nabla_X v^\top = -\ell_v X + f_v AX, \text{ y} \\ \nabla^2 \ell_v(X, Y) &= -\ell_v \langle X, Y \rangle + f_v \langle AX, Y \rangle, \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, donde $v^\top \in \mathcal{X}(\Sigma)$ denota la parte tangente de v, es decir,

$$v = v^\top + f_v N + \ell_v \psi.$$

- Así, el laplaciano de ℓ_v está dado por

$$\Delta \ell_v = \mathrm{tr}(\nabla^2 \ell_v) = -n\ell_v + nHf_v,$$

para toda hipersuperficie en $\mathbb{S}^{n+1}$.

- De modo análogo, se tiene

$$\begin{aligned} \nabla f_v &= -A(v^\top), \\ \nabla_X \nabla f_v &= -(\nabla_X A)(v^\top) - A(\nabla_X v^\top) \\ &= -\nabla A(v^\top, X) + \ell_v AX - f_v A^2 X, \text{ y} \\ \nabla^2 f_v(X,Y) &= -\langle (\nabla_X A)(v^\top), Y\rangle + \ell_v \langle AX, Y\rangle - f_v \langle AX, AY\rangle, \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

- De modo análogo, se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla f_v &= -A(v^\top), \\
\nabla_X \nabla f_v &= -(\nabla_X A)(v^\top) - A(\nabla_X v^\top) \\
&= -\nabla A(v^\top, X) + \ell_v AX - f_v A^2 X, \text{ y} \\
\nabla^2 f_v(X,Y) &= -\langle (\nabla_X A)(v^\top), Y\rangle + \ell_v \langle AX, Y\rangle - f_v \langle AX, AY\rangle,
\end{aligned}$$

  para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

- Utilizando ahora la ecuación de Codazzi, se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta f_v &= \mathrm{tr}(\nabla^2 f_v) = -\mathrm{tr}(\nabla_{v^\top} A) + nH\ell_v - |A|^2 f_v \\
&= -n\langle v^\top, \nabla H\rangle + nH\ell_v - |A|^2 f_v.
\end{aligned}$$

- De modo análogo, se tiene

$$
\begin{aligned}
\nabla f_v &= -A(v^\top), \\
\nabla_X \nabla f_v &= -(\nabla_X A)(v^\top) - A(\nabla_X v^\top) \\
&= -\nabla A(v^\top, X) + \ell_v AX - f_v A^2 X, \text{ y} \\
\nabla^2 f_v(X, Y) &= -\langle (\nabla_X A)(v^\top), Y\rangle + \ell_v \langle AX, Y\rangle - f_v \langle AX, AY\rangle,
\end{aligned}
$$

  para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

- Utilizando ahora la ecuación de Codazzi, se tiene

$$
\begin{aligned}
\Delta f_v &= \mathrm{tr}(\nabla^2 f_v) = -\mathrm{tr}(\nabla_{v^\top} A) + nH\ell_v - |A|^2 f_v \\
&= -n\langle v^\top, \nabla H\rangle + nH\ell_v - |A|^2 f_v.
\end{aligned}
$$

- Aquí se utiliza el hecho de que la traza conmuta con la derivada covariante, lo que implica que

$$
\mathrm{tr}(\nabla_{v^\top} A) = \nabla_{v^\top}(\mathrm{tr} A) = n\langle v^\top, \nabla H\rangle.
$$

- Como $H=0$, tenemos $\Delta f_v = -|A|^2 f_v$ y así

$$Jf_v - nf_v = 0 \qquad \text{para todo vector fijo } v \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Por tanto, cuando $f_v \neq 0$, las funciones f_v son funciones propias de J con valor propio negativo $-n$.

- Como $H = 0$, tenemos $\Delta f_v = -|A|^2 f_v$ y así

$$Jf_v - nf_v = 0 \quad \text{para todo vector fijo } v \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

  Por tanto, cuando $f_v \neq 0$, las funciones f_v son funciones propias de J con valor propio negativo $-n$.

- Afirmamos que si Σ no es totalmente geodésica, entonces la dimensión del subespacio lineal $V = \{f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ es $n+2$.

- Como $H=0$, tenemos $\Delta f_v = -|A|^2 f_v$ y así

$$Jf_v - nf_v = 0 \quad \text{para todo vector fijo } v \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Por tanto, cuando $f_v \neq 0$, las funciones f_v son funciones propias de J con valor propio negativo $-n$.

- Afirmamos que si Σ no es totalmente geodésica, entonces la dimensión del subespacio lineal $V = \{f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ es $n+2$.
- Si esta afirmación es cierta, entonces la multiplicidad de $-n$ como valor propio de J será al menos $n+2$ y habremos terminado.

- Como $H=0$, tenemos $\Delta f_v = -|A|^2 f_v$ y así

$$Jf_v - nf_v = 0 \quad \text{para todo vector fijo } v \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Por tanto, cuando $f_v \neq 0$, las funciones f_v son funciones propias de J con valor propio negativo $-n$.

- Afirmamos que si Σ no es totalmente geodésica, entonces la dimensión del subespacio lineal $V = \{f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ es $n+2$.
- Si esta afirmación es cierta, entonces la multiplicidad de $-n$ como valor propio de J será al menos $n+2$ y habremos terminado.
- Obviamente, $\dim V \leqslant n+2$. Si $\dim V < n+2$, entonces existe una dirección $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f_v = 0$ sobre Σ.

- Como $H=0$, tenemos $\Delta f_v = -|A|^2 f_v$ y así
$$Jf_v - nf_v = 0 \quad \text{para todo vector fijo } v \in \mathbb{R}^{n+2}.$$
Por tanto, cuando $f_v \neq 0$, las funciones f_v son funciones propias de J con valor propio negativo $-n$.
- Afirmamos que si Σ no es totalmente geodésica, entonces la dimensión del subespacio lineal $V = \{f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ es $n+2$.
- Si esta afirmación es cierta, entonces la multiplicidad de $-n$ como valor propio de J será al menos $n+2$ y habremos terminado.
- Obviamente, $\dim V \leqslant n+2$. Si $\dim V < n+2$, entonces existe una dirección $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f_v = 0$ sobre Σ.
- Como $f_v = 0$, utilizando que
$$|v|^2 = 1 = |v^\top|^2 + f_v^2 + \ell_v^2 = |\nabla \ell_v|^2 + \ell_v^2$$
observamos que ℓ_v es una función no constante sobre Σ tal que $\nabla^2 \ell_v = -\ell_v \langle , \rangle$ y, por un resultado clásico de Obata (1962), Σ es isométrica a una esfera $\mathbb{S}^n$.

- Como $H=0$, tenemos $\Delta f_v = -|A|^2 f_v$ y así
$$Jf_v - nf_v = 0 \quad \text{para todo vector fijo } v \in \mathbb{R}^{n+2}.$$
Por tanto, cuando $f_v \neq 0$, las funciones f_v son funciones propias de J con valor propio negativo $-n$.
- Afirmamos que si Σ no es totalmente geodésica, entonces la dimensión del subespacio lineal $V = \{f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ es $n+2$.
- Si esta afirmación es cierta, entonces la multiplicidad de $-n$ como valor propio de J será al menos $n+2$ y habremos terminado.
- Obviamente, $\dim V \leqslant n+2$. Si $\dim V < n+2$, entonces existe una dirección $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f_v = 0$ sobre Σ.
- Como $f_v = 0$, utilizando que
$$|v|^2 = 1 = |v^\top|^2 + f_v^2 + \ell_v^2 = |\nabla \ell_v|^2 + \ell_v^2$$
observamos que ℓ_v es una función no constante sobre Σ tal que $\nabla^2 \ell_v = -\ell_v \langle , \rangle$ y, por un resultado clásico de Obata (1962), Σ es isométrica a una esfera $\mathbb{S}^n$.
- Pero de la ecuación de Gauss se sigue fácilmente que las únicas hipersuperficies minimales en $\mathbb{S}^{n+1}$ que son isométricas a una esfera $\mathbb{S}^n$ son los ecuadores.

Algunas respuestas parciales a la conjetura

- Urbano (1990) obtuvo la siguiente caracterización variacional del toro de Clifford minimal en $\mathbb{S}^3$, **resolviendo la conjetura** cuando $n = 2$.

Algunas respuestas parciales a la conjetura

- Urbano (1990) obtuvo la siguiente caracterización variacional del toro de Clifford minimal en $\mathbb{S}^3$, **resolviendo la conjetura** cuando $n = 2$.

Teorema 2 (Urbano)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta y orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, que no es un ecuador (totalmente geodésico). Entonces $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant 5$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \subset \mathbb{S}^3$.

Algunas respuestas parciales a la conjetura

- Urbano (1990) obtuvo la siguiente caracterización variacional del toro de Clifford minimal en $\mathbb{S}^3$, **resolviendo la conjetura** cuando $n = 2$.

Teorema 2 (Urbano)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta y orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, que no es un ecuador (totalmente geodésico). Entonces $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant 5$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \subset \mathbb{S}^3$.

- Más tarde, Guadalupe, Brasil Jr. y Delgado (1999) demostraron que la conjetura es cierta para toda dimensión n, bajo la hipótesis adicional de que Σ tenga **curvatura escalar constante**.

Algunas respuestas parciales a la conjetura

- Urbano (1990) obtuvo la siguiente caracterización variacional del toro de Clifford minimal en $\mathbb{S}^3$, **resolviendo la conjetura** cuando $n = 2$.

Teorema 2 (Urbano)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta y orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, que no es un ecuador (totalmente geodésico). Entonces $\mathrm{Ind}(\Sigma) \geqslant 5$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \subset \mathbb{S}^3$.

- Más tarde, Guadalupe, Brasil Jr. y Delgado (1999) demostraron que la conjetura es cierta para toda dimensión n, bajo la hipótesis adicional de que Σ tenga **curvatura escalar constante**.
- Más recientemente, Perdomo (2001) ha demostrado que la conjetura también es cierta para toda dimensión n con una hipotésis adicional sobre las simetrías de Σ. En particular, es cierta para hipersuperficies minimales con **simetría antipodal**.

Demostración del Teorema 2

- Sólo queda por probar que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$, entonces Σ debe ser un toro de Clifford minimal.

Demostración del Teorema 2

- Sólo queda por probar que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$, entonces Σ debe ser un toro de Clifford minimal.
- Sabemos por la demostración del Teorema 1 que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$ entonces $\lambda_1 < -2$ con $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ con $m_2 = 4$ son los únicos valores propios negativos de J.

Demostración del Teorema 2

- Sólo queda por probar que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$, entonces Σ debe ser un toro de Clifford minimal.
- Sabemos por la demostración del Teorema 1 que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$ entonces $\lambda_1 < -2$ con $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ con $m_2 = 4$ son los únicos valores propios negativos de J.
- Además, el subespacio propio asociado a λ_1 está generado por una función positiva ϱ y el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = -2$ está generado por las funciones f_v.

Demostración del Teorema 2

- Sólo queda por probar que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$, entonces Σ debe ser un toro de Clifford minimal.
- Sabemos por la demostración del Teorema 1 que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$ entonces $\lambda_1 < -2$ con $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ con $m_2 = 4$ son los únicos valores propios negativos de J.
- Además, el subespacio propio asociado a λ_1 está generado por una función positiva ϱ y el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = -2$ está generado por las funciones f_v.
- Por un resultado clásico de Li y Yau (1982), dada la función positiva ϱ, existe una transformación conforme de la esfera $\Phi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ tal que

$$\int_\Sigma \varrho(\Phi \circ \psi)_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Demostración del Teorema 2

- Sólo queda por probar que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$, entonces Σ debe ser un toro de Clifford minimal.
- Sabemos por la demostración del Teorema 1 que si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 5$ entonces $\lambda_1 < -2$ con $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ con $m_2 = 4$ son los únicos valores propios negativos de J.
- Además, el subespacio propio asociado a λ_1 está generado por una función positiva ϱ y el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = -2$ está generado por las funciones f_v.
- Por un resultado clásico de Li y Yau (1982), dada la función positiva ϱ, existe una transformación conforme de la esfera $\Phi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ tal que
$$\int_\Sigma \varrho(\Phi \circ \psi)_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$
- Entonces, por la caracterización min-max de λ_2 tenemos que
$$\lambda_2 = -2 \leqslant \frac{Q(\Phi \circ \psi)_i}{\int_\Sigma (\Phi \circ \psi)_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$
y se da la igualdad si y sólo si $(\Phi \circ \psi)_i$ es una función propia de λ_2.

- Equivalentemente,

$$\int_\Sigma |A|^2(\Phi\circ\psi)_i^2 \leqslant \int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)_i|^2, \quad i=1,2,3,4,$$

y sumando en i se tiene que

$$\int_\Sigma |A|^2 \leqslant \int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)|^2.$$

- Equivalentemente,

$$\int_\Sigma |A|^2(\Phi\circ\psi)_i^2 \leqslant \int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)_i|^2, \quad i=1,2,3,4,$$

y sumando en i se tiene que

$$\int_\Sigma |A|^2 \leqslant \int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)|^2.$$

- Además, teniendo en cuenta que $\Phi:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ es de la forma

$$\Phi(p)=\Phi_g(p)=\frac{p+(\mu\langle p,g\rangle+\lambda)g}{\lambda(1+\langle p,g\rangle)}$$

para algún $g\in\mathbb{R}^4$ con $|g|^2<1$, con $\lambda=(1-|g|^2)^{-1/2}$ y $\mu=(\lambda-1)|g|^{-2}$, no es difícil ver que

$$\int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)|^2 = 2\,\mathrm{Area}(\Sigma)-2\int_\Sigma \frac{f_g^2}{(1+\ell_g)^2} \leqslant 2\,\mathrm{Area}(\Sigma).$$

- Equivalentemente,

$$\int_\Sigma |A|^2(\Phi\circ\psi)_i^2 \leqslant \int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)_i|^2, \quad i=1,2,3,4,$$

y sumando en i se tiene que

$$\int_\Sigma |A|^2 \leqslant \int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)|^2.$$

- Además, teniendo en cuenta que $\Phi:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ es de la forma

$$\Phi(p)=\Phi_g(p)=\frac{p+(\mu\langle p,g\rangle+\lambda)g}{\lambda(1+\langle p,g\rangle)}$$

para algún $g\in\mathbb{R}^4$ con $|g|^2<1$, con $\lambda=(1-|g|^2)^{-1/2}$ y $\mu=(\lambda-1)|g|^{-2}$, no es difícil ver que

$$\int_\Sigma |\nabla(\Phi\circ\psi)|^2 = 2\ \mathrm{Area}(\Sigma) - 2\int_\Sigma \frac{f_g^2}{(1+\ell_g)^2} \leqslant 2\ \mathrm{Area}(\Sigma).$$

- En resumen,

$$\int_\Sigma |A|^2 \leqslant 2\ \mathrm{Area}(\Sigma).$$

- Por otra parte, como $|A|^2 = 2(1-K)$, por el teorema de Gauss-Bonnet se tiene

$$\int_\Sigma |A|^2 = 2\ \mathrm{Area}(\Sigma) - 2\int_\Sigma K = 2\ \mathrm{Area}(\Sigma) + 8\pi(g-1),$$

donde $g = 0, 1, 2, \dots$ es el género de Σ.

- Por otra parte, como $|A|^2 = 2(1-K)$, por el teorema de Gauss-Bonnet se tiene

$$\int_\Sigma |A|^2 = 2 \text{ Area}(\Sigma) - 2\int_\Sigma K = 2 \text{ Area}(\Sigma) + 8\pi(g-1),$$

  donde $g = 0, 1, 2, \ldots$ es el género de Σ.

- Como Σ no es totalmente geodésica, $g \geqslant 1$ (teorema de Almgren) y tenemos la desigualdad contraria

$$\int_\Sigma |A|^2 \geqslant 2 \text{ Area}(\Sigma).$$

- Por otra parte, como $|A|^2 = 2(1-K)$, por el teorema de Gauss-Bonnet se tiene

$$\int_\Sigma |A|^2 = 2\ \text{Area}(\Sigma) - 2\int_\Sigma K = 2\ \text{Area}(\Sigma) + 8\pi(g-1),$$

donde $g = 0, 1, 2, \ldots$ es el género de Σ.

- Como Σ no es totalmente geodésica, $g \geqslant 1$ (teorema de Almgren) y tenemos la desigualdad contraria

$$\int_\Sigma |A|^2 \geqslant 2\ \text{Area}(\Sigma).$$

- En definitiva, se tiene la igualdad

$$\int_\Sigma |A|^2 = 2\ \text{Area}(\Sigma).$$

y todas las desigualdades anteriores deben ser igualdades.

- Por otra parte, como $|A|^2 = 2(1-K)$, por el teorema de Gauss-Bonnet se tiene

$$\int_\Sigma |A|^2 = 2 \text{ Area}(\Sigma) - 2\int_\Sigma K = 2 \text{ Area}(\Sigma) + 8\pi(g-1),$$

  donde $g = 0, 1, 2, \ldots$ es el género de Σ.
- Como Σ no es totalmente geodésica, $g \geqslant 1$ (teorema de Almgren) y tenemos la desigualdad contraria

$$\int_\Sigma |A|^2 \geqslant 2 \text{ Area}(\Sigma).$$

- En definitiva, se tiene la igualdad

$$\int_\Sigma |A|^2 = 2 \text{ Area}(\Sigma).$$

  y todas las desigualdades anteriores deben ser igualdades.
- En particular, $f_g = 0$, lo que significa que $g = 0$ y $\Phi = \text{Id}$.

- Además, las funciones coordenadas $\psi_i = (\Phi \circ \psi)_i$ son funciones propias de $\lambda_2 = -2$, lo que implica

$$\Delta\psi_i = -|A|^2\psi_i.$$

- Además, las funciones coordenadas $\psi_i = (\Phi \circ \psi)_i$ son funciones propias de $\lambda_2 = -2$, lo que implica

$$\Delta \psi_i = -|A|^2 \psi_i.$$

- Pero también sabemos que

$$\Delta \psi_i = -2\psi_i.$$

- Además, las funciones coordenadas $\psi_i = (\Phi \circ \psi)_i$ son funciones propias de $\lambda_2 = -2$, lo que implica

$$\Delta \psi_i = -|A|^2 \psi_i.$$

- Pero también sabemos que

$$\Delta \psi_i = -2\psi_i.$$

- De todo ello se sigue que $|A|^2 = 2$ y $K = 0$, por lo que concluimos que Σ debe ser un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$.

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Sabemos ya que λ_1 es simple ($m_1 = 1$), y que

$$\lambda_1 \leqslant -n - \frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n,$$

con igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica.

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Sabemos ya que λ_1 es simple ($m_1 = 1$), y que
$$\lambda_1 \leqslant -n - \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n,$$
con igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica.
- Simons (1968) demostró que cuando Σ **no** es totalmente geodésica, entonces no sólo debe ser $\lambda_1 < -n$ sino que de hecho debe ser
$$\lambda_1 \leqslant -2n.$$

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Sabemos ya que λ_1 es simple ($m_1 = 1$), y que
$$\lambda_1 \leqslant -n - \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n,$$
con igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica.
- Simons (1968) demostró que cuando Σ **no** es totalmente geodésica, entonces no sólo debe ser $\lambda_1 < -n$ sino que de hecho debe ser
$$\lambda_1 \leqslant -2n.$$
- Recuérdese que todos los toros de Clifford tienen $\lambda_1 = -2n$.

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Sabemos ya que λ_1 es simple ($m_1 = 1$), y que
$$\lambda_1 \leqslant -n - \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n,$$
con igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica.
- Simons (1968) demostró que cuando Σ **no** es totalmente geodésica, entonces no sólo debe ser $\lambda_1 < -n$ sino que de hecho debe ser
$$\lambda_1 \leqslant -2n.$$
- Recuérdese que todos los toros de Clifford tienen $\lambda_1 = -2n$.
- En 1993, Wu caracterizó los toros de Clifford minimales como las únicas hipersuperficies minimales compactas en $\mathbb{S}^{n+1}$ con $\lambda_1 = -2n$.

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Sabemos ya que λ_1 es simple ($m_1 = 1$), y que
$$\lambda_1 \leqslant -n - \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |A|^2 \leqslant -n,$$
con igualdad $\lambda_1 = -n$ si y sólo si Σ es totalmente geodésica.
- Simons (1968) demostró que cuando Σ **no** es totalmente geodésica, entonces no sólo debe ser $\lambda_1 < -n$ sino que de hecho debe ser
$$\lambda_1 \leqslant -2n.$$
- Recuérdese que todos los toros de Clifford tienen $\lambda_1 = -2n$.
- En 1993, Wu caracterizó los toros de Clifford minimales como las únicas hipersuperficies minimales compactas en $\mathbb{S}^{n+1}$ con $\lambda_1 = -2n$.

Teorema 3 (Simons; Wu)

Sea Σ una hipersuperficie minimal compacta y orientable inmersa en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, y sea λ_1 el primer valor propio de su operador de Jacobi. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -n$ (y Σ es un ecuador totalmente geodésico),

(ii) o bien $\lambda_1 \leq -2n$, con igualdad si y sólo si Σ es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$.

Demostración del Teorema 3

- Ya sabemos que $\lambda_1 \leqslant -n$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica (parte (i) del teorema).

Demostración del Teorema 3

- Ya sabemos que $\lambda_1 \leqslant -n$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica (parte (i) del teorema).
- La demostración de la parte (ii) hace uso de una famosa fórmula para el laplaciano de $|A|^2$ on Σ, establecida por Simons en 1968.

Demostración del Teorema 3

- Ya sabemos que $\lambda_1 \leqslant -n$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica (parte (i) del teorema).
- La demostración de la parte (ii) hace uso de una famosa fórmula para el laplaciano de $|A|^2$ on Σ, establecida por Simons en 1968.
- Para el caso concreto de hipersuperficies minimales en $\mathbb{S}^{n+1}$, la **fórmula de Simons** queda así:

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + (n - |A|^2)|A|^2.$$

Demostración del Teorema 3

- Ya sabemos que $\lambda_1 \leqslant -n$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica (parte (i) del teorema).
- La demostración de la parte (ii) hace uso de una famosa fórmula para el laplaciano de $|A|^2$ on Σ, establecida por Simons en 1968.
- Para el caso concreto de hipersuperficies minimales en $\mathbb{S}^{n+1}$, la **fórmula de Simons** queda así:

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + (n - |A|^2)|A|^2.$$

- Entonces, supongamos que Σ no es totalmente geodésica y consideremos, para todo $\varepsilon > 0$, la función $f_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon + |A|^2}$. La idea de la prueba consiste en utilizar f_ε como función test para estimar λ_1.

Demostración del Teorema 3

- Ya sabemos que $\lambda_1 \leqslant -n$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica (parte (i) del teorema).
- La demostración de la parte (ii) hace uso de una famosa fórmula para el laplaciano de $|A|^2$ on Σ, establecida por Simons en 1968.
- Para el caso concreto de hipersuperficies minimales en $\mathbb{S}^{n+1}$, la **fórmula de Simons** queda así:

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + (n - |A|^2)|A|^2.$$

- Entonces, supongamos que Σ no es totalmente geodésica y consideremos, para todo $\varepsilon > 0$, la función $f_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon + |A|^2}$. La idea de la prueba consiste en utilizar f_ε como función test para estimar λ_1.
- Obsérvese que

$$\Delta f_\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon + |A|^2}}\Delta|A|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |A|^2)^{3/2}}|\nabla|A|^2|^2.$$

y, utilizando la fórmula de Simons, tenemos que

$$f_\varepsilon\Delta f_\varepsilon = (n - |A|^2)|A|^2 + |\nabla A|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |A|^2)}|\nabla|A|^2|^2.$$

- El último término lo podemos estimar utilizando que

$$|\nabla|A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2,$$

y concluimos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant (n-|A|^2)|A|^2 + \frac{2}{n+2}|\nabla A|^2.$$

- El último término lo podemos estimar utilizando que

$$|\nabla|A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2,$$

y concluimos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant (n-|A|^2)|A|^2 + \frac{2}{n+2}|\nabla A|^2.$$

- De esta manera, utilizando f_ε como función test tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 &\leqslant -\int_\Sigma f_\varepsilon J f_\varepsilon \\ &\leqslant -2n\int_\Sigma |A|^2 - \frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla A|^2 - \varepsilon\int_\Sigma (n+|A|^2). \end{aligned}$$

- El último término lo podemos estimar utilizando que

$$|\nabla |A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2,$$

  y concluimos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant (n-|A|^2)|A|^2 + \frac{2}{n+2}|\nabla A|^2.$$

- De esta manera, utilizando f_ε como función test tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 &\leqslant -\int_\Sigma f_\varepsilon J f_\varepsilon \\ &\leqslant -2n\int_\Sigma |A|^2 - \frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla A|^2 - \varepsilon \int_\Sigma (n+|A|^2). \end{aligned}$$

- Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$ concluimos que

$$\lambda_1 \leqslant -2n - \frac{2}{n+2}\frac{\int_\Sigma |\nabla A|^2}{\int_\Sigma |A|^2} \leqslant -2n.$$

- El último término lo podemos estimar utilizando que

$$|\nabla |A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2,$$

  y concluimos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant (n-|A|^2)|A|^2 + \frac{2}{n+2}|\nabla A|^2.$$

- De esta manera, utilizando f_ε como función test tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 &\leqslant -\int_\Sigma f_\varepsilon J f_\varepsilon \\ &\leqslant -2n\int_\Sigma |A|^2 - \frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla A|^2 - \varepsilon \int_\Sigma (n+|A|^2). \end{aligned}$$

- Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$ concluimos que

$$\lambda_1 \leqslant -2n - \frac{2}{n+2}\frac{\int_\Sigma |\nabla A|^2}{\int_\Sigma |A|^2} \leqslant -2n.$$

- Esto prueba la desigualdad de la parte (ii) del teorema.

- Además, si se da la igualdad $\lambda_1 = -2n$ entonces $|\nabla A|^2 = 0$, y la desigualdad

$$|\nabla |A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2 = 0$$

implica que $|A|^2$ es una constante positiva.

- Además, si se da la igualdad $\lambda_1 = -2n$ entonces $|\nabla A|^2 = 0$, y la desigualdad

$$|\nabla |A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2 = 0$$

implica que $|A|^2$ es una constante positiva.

- Así, $J = \Delta + |A|^2 + n$, donde $|A|^2 + n$ es constante, y el primer valor propio de J es simplemente la constante

$$-(|A|^2 + n) = \lambda_1 = -2n.$$

- Además, si se da la igualdad $\lambda_1 = -2n$ entonces $|\nabla A|^2 = 0$, y la desigualdad

$$|\nabla |A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2 = 0$$

implica que $|A|^2$ es una constante positiva.

- Así, $J = \Delta + |A|^2 + n$, donde $|A|^2 + n$ es constante, y el primer valor propio de J es simplemente la constante

$$-(|A|^2 + n) = \lambda_1 = -2n.$$

- Por lo tanto, $|\nabla A|^2 = 0$ y $|A|^2 = n$ y un argumento local implica que Σ tiene exactamente dos curvaturas principales constantes

$$\mp\sqrt{\frac{n-k}{k}} \quad \text{y} \quad \pm\sqrt{\frac{k}{n-k}}$$

con multiplicidades $k \geqslant 1$ y $n-k \geqslant 1$, respectivamente (Lawson 1968).

- Además, si se da la igualdad $\lambda_1 = -2n$ entonces $|\nabla A|^2 = 0$, y la desigualdad

$$|\nabla |A|^2|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2} |A|^2 |\nabla A|^2 = 0$$

implica que $|A|^2$ es una constante positiva.

- Así, $J = \Delta + |A|^2 + n$, donde $|A|^2 + n$ es constante, y el primer valor propio de J es simplemente la constante

$$-(|A|^2 + n) = \lambda_1 = -2n.$$

- Por lo tanto, $|\nabla A|^2 = 0$ y $|A|^2 = n$ y un argumento local implica que Σ tiene exactamente dos curvaturas principales constantes

$$\mp\sqrt{\frac{n-k}{k}} \quad \text{y} \quad \pm\sqrt{\frac{k}{n-k}}$$

con multiplicidades $k \geqslant 1$ y $n-k \geqslant 1$, respectivamente (Lawson 1968).

- Esto garantiza que Σ debe ser un toro de Clifford minimal.

Una demostración alternativa del Teorema 3 cuando $n = 2$

Corolario 3 ($n = 2$)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, y sea λ_1 el primer valor propio de su operador de Jacobi. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -2$ (y Σ es un ecuador totalmente geodésico),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -4$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$.

Una demostración alternativa del Teorema 3 cuando $n = 2$

Corolario 3 ($n = 2$)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, y sea λ_1 el primer valor propio de su operador de Jacobi. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -2$ (y Σ es un ecuador totalmente geodésico),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -4$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$.

- Sabemos ya que $\lambda_1 \leqslant -2$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica. Supongamos entonces que no es totalmente geodésica.

Una demostración alternativa del Teorema 3 cuando $n = 2$

Corolario 3 ($n = 2$)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, y sea λ_1 el primer valor propio de su operador de Jacobi. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -2$ (y Σ es un ecuador totalmente geodésico),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -4$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$.

- Sabemos ya que $\lambda_1 \leqslant -2$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica. Supongamos entonces que no es totalmente geodésica.
- Recuérdese que λ_1 es simple y que su subespacio propio está generado por una función propia positiva ϱ.

Una demostración alternativa del Teorema 3 cuando $n = 2$

Corolario 3 ($n = 2$)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, y sea λ_1 el primer valor propio de su operador de Jacobi. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -2$ (y Σ es un ecuador totalmente geodésico),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -4$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$.

- Sabemos ya que $\lambda_1 \leqslant -2$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica. Supongamos entonces que no es totalmente geodésica.
- Recuérdese que λ_1 es simple y que su subespacio propio está generado por una función propia positiva ϱ.
- Como $m_1 = 1$, ϱ está determinada unívocamente salvo un factor constante positivo.

Una demostración alternativa del Teorema 3 cuando $n = 2$

Corolario 3 ($n = 2$)

Sea Σ^2 una superficie minimal compacta orientable inmersa en $\mathbb{S}^3$, y sea λ_1 el primer valor propio de su operador de Jacobi. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -2$ (y Σ es un ecuador totalmente geodésico),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -4$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$.

- Sabemos ya que $\lambda_1 \leqslant -2$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente geodésica. Supongamos entonces que no es totalmente geodésica.
- Recuérdese que λ_1 es simple y que su subespacio propio está generado por una función propia positiva ϱ.
- Como $m_1 = 1$, ϱ está determinada unívocamente salvo un factor constante positivo.
- Entonces, $J\varrho + \lambda_1\varrho = 0$ o, equivalentemente

$$\Delta\varrho = -(\lambda_1 + 2 + |A|^2)\varrho = -(\lambda_1 + 4 - 2K)\varrho,$$

ya que $|A|^2 = 2(1 - K)$, donde K es la curvatura de Gauss de Σ.

- A partir de aquí, podemos calcular

$$\Delta \log \varrho = \frac{1}{\varrho}\Delta\varrho - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2} = -\lambda_1 - 4 + 2K - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2}.$$

- A partir de aquí, podemos calcular

$$\Delta \log \varrho = \frac{1}{\varrho}\Delta \varrho - \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho^2} = -\lambda_1 - 4 + 2K - \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho^2}.$$

- Integrando y utilizando el teorema de Gauss-Bonnet tenemos que

$$\lambda_1 = -4 + \frac{1}{A(\Sigma)}\left(2\int_\Sigma K - \int_\Sigma \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho^2}\right) = -4 - \frac{1}{A(\Sigma)}\left(8\pi(g-1) + \alpha\right),$$

donde $g = 0, 1, 2, \ldots$ es el género de Σ, y $\alpha = \int_\Sigma |\nabla \varrho|^2/\varrho^2 \geqslant 0$ define un invariante de Σ.

- A partir de aquí, podemos calcular

$$\Delta \log \varrho = \frac{1}{\varrho}\Delta\varrho - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2} = -\lambda_1 - 4 + 2K - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2}.$$

- Integrando y utilizando el teorema de Gauss-Bonnet tenemos que

$$\lambda_1 = -4 + \frac{1}{A(\Sigma)}\left(2\int_\Sigma K - \int_\Sigma \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2}\right) = -4 - \frac{1}{A(\Sigma)}\left(8\pi(g-1) + \alpha\right),$$

donde $g = 0, 1, 2, \ldots$ es el género de Σ, y $\alpha = \int_\Sigma |\nabla\varrho|^2/\varrho^2 \geqslant 0$ define un invariante de Σ.

- Como Σ no es totalmente geodésica, $g \geqslant 1$ (teorema de Almgren) y tenemos $\lambda_1 \leqslant -4$.

- A partir de aquí, podemos calcular

$$\Delta \log \varrho = \frac{1}{\varrho}\Delta\varrho - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2} = -\lambda_1 - 4 + 2K - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2}.$$

- Integrando y utilizando el teorema de Gauss-Bonnet tenemos que

$$\lambda_1 = -4 + \frac{1}{A(\Sigma)}\left(2\int_\Sigma K - \int_\Sigma \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2}\right) = -4 - \frac{1}{A(\Sigma)}\left(8\pi(g-1)+\alpha\right),$$

donde $g = 0, 1, 2, \ldots$ es el género de Σ, y $\alpha = \int_\Sigma |\nabla\varrho|^2/\varrho^2 \geqslant 0$ define un invariante de Σ.

- Como Σ no es totalmente geodésica, $g \geqslant 1$ (teorema de Almgren) y tenemos $\lambda_1 \leqslant -4$.
- Además, si $\lambda_1 = -4$ debe ser $\alpha = 0$ (también $g = 1$), lo que implica que ϱ es una constante positiva.

- A partir de aquí, podemos calcular

$$\Delta \log \varrho = \frac{1}{\varrho}\Delta\varrho - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2} = -\lambda_1 - 4 + 2K - \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2}.$$

- Integrando y utilizando el teorema de Gauss-Bonnet tenemos que

$$\lambda_1 = -4 + \frac{1}{A(\Sigma)}\left(2\int_\Sigma K - \int_\Sigma \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^2}\right) = -4 - \frac{1}{A(\Sigma)}\left(8\pi(g-1) + \alpha\right),$$

  donde $g = 0, 1, 2, \ldots$ es el género de Σ, y $\alpha = \int_\Sigma |\nabla\varrho|^2/\varrho^2 \geqslant 0$ define un invariante de Σ.

- Como Σ no es totalmente geodésica, $g \geqslant 1$ (teorema de Almgren) y tenemos $\lambda_1 \leqslant -4$.
- Además, si $\lambda_1 = -4$ debe ser $\alpha = 0$ (también $g = 1$), lo que implica que ϱ es una constante positiva.
- En tal caso, $0 = \Delta\varrho = -(\lambda_1 + 4 - 2K)\varrho = 2K\varrho$ implica que $K = 0$ es también constante y Σ debe ser un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$.