Índice y estabilidad de hipersuperficies minimales y de CMC en la esfera II

Luis J. Alías
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Programa de Posgrado en Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

16 de abril de 2009

Hipersuperficies de CMC como soluciones a un problema variacional

- Sea $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie compacta y orientable.

Hipersuperficies de CMC como soluciones a un problema variacional

- Sea $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie compacta y orientable.

Lema 1 (Primera fórmula de variación del área)

$$\delta_f \mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_\Sigma fH d\Sigma$$

Hipersuperficies de CMC como soluciones a un problema variacional

- Sea $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie compacta y orientable.

Lema 1 (Primera fórmula de variación del área)

$$\delta_f \mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_\Sigma fH d\Sigma$$

Corolario 4

Σ tiene curvatura media constante H (no necesariamente $H = 0$) si y sólo si $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ que satisface la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.

Hipersuperficies de CMC como soluciones a un problema variacional

- Sea $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ una hipersuperficie compacta y orientable.

Lema 1 (Primera fórmula de variación del área)

$$\delta_f \mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_\Sigma fH d\Sigma$$

Corolario 4

Σ tiene curvatura media constante H (no necesariamente $H = 0$) si y sólo si $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ que satisface la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.

- Si H es constante, está claro que

$$\delta_f \mathcal{A} = -n \int_\Sigma fH d\Sigma = -nH \int_\Sigma f d\Sigma = 0 \quad \text{para toda } f \in \mathcal{C}^\infty_T(\Sigma),$$

donde

$$\mathcal{C}^\infty_T(\Sigma) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) : \textstyle\int_\Sigma f d\Sigma = 0\}.$$

- Recíprocamente, supongamos que $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty_T(\Sigma)$, y escribamos $H = H_0 + (H - H_0)$, donde

$$H_0 = \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma H d\Sigma.$$

- Recíprocamente, supongamos que $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}_T^\infty(\Sigma)$, y escribamos $H = H_0 + (H - H_0)$, donde

$$H_0 = \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma H d\Sigma.$$

- Como $\int_\Sigma (H - H_0) d\Sigma = 0$, entonces

$$\delta_{H-H_0} \mathcal{A} = -n \int_\Sigma (H - H_0) H d\Sigma = -n \int_\Sigma (H - H_0)^2 d\Sigma = 0.$$

- Recíprocamente, supongamos que $\delta_f\mathcal{A}=0$ para toda $f\in\mathcal{C}^\infty_T(\Sigma)$, y escribamos $H=H_0+(H-H_0)$, donde

$$H_0=\frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)}\int_\Sigma Hd\Sigma.$$

- Como $\int_\Sigma(H-H_0)d\Sigma=0$, entonces

$$\delta_{H-H_0}\mathcal{A}=-n\int_\Sigma(H-H_0)Hd\Sigma=-n\int_\Sigma(H-H_0)^2d\Sigma=0.$$

- Pero esto implica que $H=H_0$ es constante sobre Σ.

- Recíprocamente, supongamos que $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}_T^\infty(\Sigma)$, y escribamos $H = H_0 + (H - H_0)$, donde

$$H_0 = \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma H d\Sigma.$$

- Como $\int_\Sigma (H - H_0) d\Sigma = 0$, entonces

$$\delta_{H-H_0} \mathcal{A} = -n \int_\Sigma (H - H_0) H d\Sigma = -n \int_\Sigma (H - H_0)^2 d\Sigma = 0.$$

- Pero esto implica que $H = H_0$ es constante sobre Σ.
- Esto termina la prueba.

- Recíprocamente, supongamos que $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty_T(\Sigma)$, y escribamos $H = H_0 + (H - H_0)$, donde

$$H_0 = \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma H d\Sigma.$$

- Como $\int_\Sigma (H - H_0) d\Sigma = 0$, entonces

$$\delta_{H-H_0} \mathcal{A} = -n \int_\Sigma (H - H_0) H d\Sigma = -n \int_\Sigma (H - H_0)^2 d\Sigma = 0.$$

- Pero esto implica que $H = H_0$ es constante sobre Σ.
- Esto termina la prueba.
- **Geométricamente**, la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$ significa que las variaciones que se están considerando conservan el volumen encerrado.

- Recíprocamente, supongamos que $\delta_f \mathcal{A} = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty_T(\Sigma)$, y escribamos $H = H_0 + (H - H_0)$, donde

$$H_0 = \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma H d\Sigma.$$

- Como $\int_\Sigma (H - H_0) d\Sigma = 0$, entonces

$$\delta_{H-H_0}\mathcal{A} = -n \int_\Sigma (H - H_0) H d\Sigma = -n \int_\Sigma (H - H_0)^2 d\Sigma = 0.$$

- Pero esto implica que $H = H_0$ es constante sobre Σ.
- Esto termina la prueba.
- **Geométricamente**, la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$ significa que las variaciones que se están considerando conservan el volumen encerrado.
- Dicho de otro modo, las hipersuperficies de CMC se caracterizan como puntos críticos del funcional área restringido a variaciones que conservan el volumen.

Estabilidad e índice de hipersuperficies de CMC

- Como en el caso de las hipersuperficies minimales, el operador de estabilidad de este problema variacional está dado por la misma segunda fórmula de variación.

Estabilidad e índice de hipersuperficies de CMC

- Como en el caso de las hipersuperficies minimales, el operador de estabilidad de este problema variacional está dado por la misma segunda fórmula de variación.
- Del mismo modo, la forma cuadrática correspondiente está dada también por
$$Q(f) = -\int_\Sigma fJf d\Sigma,$$
con operador de Jacobi $J = \Delta + |A|^2 + n$.

Estabilidad e índice de hipersuperficies de CMC

- Como en el caso de las hipersuperficies minimales, el operador de estabilidad de este problema variacional está dado por la misma segunda fórmula de variación.
- Del mismo modo, la forma cuadrática correspondiente está dada también por

$$Q(f) = -\int_\Sigma fJfd\Sigma,$$

con operador de Jacobi $J = \Delta + |A|^2 + n$.
- Sin embargo, **a diferencia del caso minimal**, en le caso de CMC se pueden considerar **dos** problemas diferentes de valores propios:

Estabilidad e índice de hipersuperficies de CMC

- Como en el caso de las hipersuperficies minimales, el operador de estabilidad de este problema variacional está dado por la misma segunda fórmula de variación.
- Del mismo modo, la forma cuadrática correspondiente está dada también por

$$Q(f) = -\int_\Sigma fJfd\Sigma,$$

con operador de Jacobi $J = \Delta + |A|^2 + n$.

- Sin embargo, **a diferencia del caso minimal**, en le caso de CMC se pueden considerar **dos** problemas diferentes de valores propios:

(i) el problema de Dirichlet **usual**, asociado a la forma cuadrática Q actuando sobre todo el espacio de $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ funciones diferenciables sobre Σ, y

Estabilidad e índice de hipersuperficies de CMC

- Como en el caso de las hipersuperficies minimales, el operador de estabilidad de este problema variacional está dado por la misma segunda fórmula de variación.
- Del mismo modo, la forma cuadrática correspondiente está dada también por
$$Q(f) = -\int_\Sigma fJf d\Sigma,$$
con operador de Jacobi $J = \Delta + |A|^2 + n$.
- Sin embargo, **a diferencia del caso minimal**, en le caso de CMC se pueden considerar **dos** problemas diferentes de valores propios:

(i) el problema de Dirichlet **usual**, asociado a la forma cuadrática Q actuando sobre todo el espacio de $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ funciones diferenciables sobre Σ, y

(ii) el llamado problema de Dirichlet **twisted**, asociado a la misma forma cuadrática Q, pero **restringida** al subespacio $\mathcal{C}^\infty_T(\Sigma)$ de funciones diferenciables sobre Σ que satisfacen la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.

- Del mismo modo, hay **dos** nociones diferentes de estabilidad y de índice:

- Del mismo modo, hay **dos** nociones diferentes de estabilidad y de índice:

(i) la estabilidad **fuerte** y el índice **fuerte**, que denotamos por $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet usual, y

- Del mismo modo, hay **dos** nociones diferentes de estabilidad y de índice:

(i) la estabilidad **fuerte** y el índice **fuerte**, que denotamos por $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet usual, y

(ii) la estabilidad **débil** y el índice **débil**, que denotamos por $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet twisted.

- Del mismo modo, hay **dos** nociones diferentes de estabilidad y de índice:

(i) la estabilidad **fuerte** y el índice **fuerte**, que denotamos por $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet usual, y

(ii) la estabilidad **débil** y el índice **débil**, que denotamos por $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet twisted.

- Así, el índice fuerte es simplemente

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = \text{máx}\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\},$$

y se dice que Σ es **fuertemente estable** si y sólo si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 0$.

- Del mismo modo, hay **dos** nociones diferentes de estabilidad y de índice:

(i) la estabilidad **fuerte** y el índice **fuerte**, que denotamos por $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet usual, y

(ii) la estabilidad **débil** y el índice **débil**, que denotamos por $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet twisted.

- Así, el índice fuerte es simplemente

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = \max\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\},$$

y se dice que Σ es **fuertemente estable** si y sólo si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 0$.

- Por otra parte, el índice débil es

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = \max\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}_T^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\},$$

y se dice que Σ es **débilmente estable** si y sólo si $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$.

- Del mismo modo, hay **dos** nociones diferentes de estabilidad y de índice:

(i) la estabilidad **fuerte** y el índice **fuerte**, que denotamos por $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet usual, y

(ii) la estabilidad **débil** y el índice **débil**, que denotamos por $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet twisted.

- Así, el índice fuerte es simplemente

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = \max\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\},$$

y se dice que Σ es **fuertemente estable** si y sólo si $\mathrm{Ind}(\Sigma) = 0$.

- Por otra parte, el índice débil es

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = \max\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}_T^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\},$$

y se dice que Σ es **débilmente estable** si y sólo si $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$.

- Desde el punto de vista geométrico, el índice débil es más natural que el índice fuerte.

- Del mismo modo, hay **dos** nociones diferentes de estabilidad y de índice:

(i) la estabilidad **fuerte** y el índice **fuerte**, que denotamos por $\operatorname{Ind}(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet usual, y

(ii) la estabilidad **débil** y el índice **débil**, que denotamos por $\operatorname{Ind}_T(\Sigma)$ y asociado al problema de Dirichlet twisted.

- Así, el índice fuerte es simplemente

$$\operatorname{Ind}(\Sigma) = \text{máx}\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\},$$

y se dice que Σ es **fuertemente estable** si y sólo si $\operatorname{Ind}(\Sigma) = 0$.

- Por otra parte, el índice débil es

$$\operatorname{Ind}_T(\Sigma) = \text{máx}\{\dim V : V \leqslant \mathcal{C}^\infty_T(\Sigma), \quad Q(f) < 0 \quad \text{para toda } f \in V\},$$

y se dice que Σ es **débilmente estable** si y sólo si $\operatorname{Ind}_T(\Sigma) = 0$.

- Desde el punto de vista geométrico, el índice débil es más natural que el índice fuerte.
- Sin embargo, desde el punto de vista analítico, el índice fuerte es más natural y más fácil de usar.

- Barbosa y Bérard (2000) han estudiado en profundidad el problema de Dirichlet twisted, comparando los valores propios de este problem con los del problema de Dirichlet usual.

- Barbosa y Bérard (2000) han estudiado en profundidad el problema de Dirichlet twisted, comparando los valores propios de este problem con los del problema de Dirichlet usual.
- Por ejemplo, se sigue fácilmente del principio de min-max que ambos espectros están entrelazados de la forma

$$\lambda_1 < \lambda_1^T \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_2^T \leqslant \cdots ,$$

  donde

$$\mathrm{Spec}(J) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots\}$$

  es el espectro usual de J y

$$\mathrm{Spec}_T(J) = \{\lambda_1^T < \lambda_2^T < \lambda_3^T < \cdots\}$$

  es su espectro twisted.

- Barbosa y Bérard (2000) han estudiado en profundidad el problema de Dirichlet twisted, comparando los valores propios de este problem con los del problema de Dirichlet usual.
- Por ejemplo, se sigue fácilmente del principio de min-max que ambos espectros están entrelazados de la forma

$$\lambda_1 < \lambda_1^T \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_2^T \leqslant \cdots ,$$

donde

$$\mathrm{Spec}(J) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots\}$$

es el espectro usual de J y

$$\mathrm{Spec}_T(J) = \{\lambda_1^T < \lambda_2^T < \lambda_3^T < \cdots\}$$

es su espectro twisted.
- Al considerar hipersuperficies de CMC, en lugar de la segunda forma fundamental A, resulta más útil trabajar la llamada **segunda forma fundamental sin traza**, que está dada por

$$\phi = A - HI, \qquad \text{donde } I \text{ denota la identidad.}$$

- Obsérvese que

$$\mathrm{tr}(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad |\phi|^2 = |A|^2 - nH^2 \geqslant 0,$$

con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.

- Obsérvese que

$$\operatorname{tr}(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad |\phi|^2 = |A|^2 - nH^2 \geqslant 0,$$

con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.

- Por esa razón ϕ se llama también el tensor de **umbilicidad total**.

- Obsérvese que

$$\mathrm{tr}(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad |\phi|^2 = |A|^2 - nH^2 \geqslant 0,$$

con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.

- Por esa razón ϕ se llama también el tensor de **umbilicidad total**.
- En términos de ϕ, el operador de Jacobi está dado por

$$J = \Delta + |\phi|^2 + n(1 + H^2).$$

- Obsérvese que

$$\mathrm{tr}(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad |\phi|^2 = |A|^2 - nH^2 \geqslant 0,$$

con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.

- Por esa razón ϕ se llama también el tensor de **umbilicidad total**.
- En términos de ϕ, el operador de Jacobi está dado por

$$J = \Delta + |\phi|^2 + n(1 + H^2).$$

- Utilizando de nuevo la función constante $f = 1$ como función test para estimar $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ se tiene

$$\begin{aligned} Q(1) &= -\int_\Sigma (|\phi|^2 + n(1 + H^2)) d\Sigma \\ &= -n(1 + H^2)\mathrm{Area}(\Sigma) - \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \\ &\leqslant -n(1 + H^2)\mathrm{Area}(\Sigma) < 0. \end{aligned}$$

- Obsérvese que

$$\operatorname{tr}(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad |\phi|^2 = |A|^2 - nH^2 \geqslant 0,$$

con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.

- Por esa razón ϕ se llama también el tensor de **umbilicidad total**.
- En términos de ϕ, el operador de Jacobi está dado por

$$J = \Delta + |\phi|^2 + n(1 + H^2).$$

- Utilizando de nuevo la función constante $f = 1$ como función test para estimar $\operatorname{Ind}(\Sigma)$ se tiene

$$\begin{aligned} Q(1) &= -\int_\Sigma (|\phi|^2 + n(1 + H^2)) d\Sigma \\ &= -n(1 + H^2)\operatorname{Area}(\Sigma) - \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \\ &\leqslant -n(1 + H^2)\operatorname{Area}(\Sigma) < 0. \end{aligned}$$

Corolario 5

No existe ninguna hipersuperficie compacta de CMC fuertemente estable en la esfera. Equivalentemente, $\operatorname{Ind}(\Sigma) \geqslant 1$ para toda hipersuperficie compacta de CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$.

- Se sigue también de aquí que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \leqslant -n(1+H^2) - \frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant -n(1+H^2).$$

- Se sigue también de aquí que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \leqslant -n(1+H^2) - \frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant -n(1+H^2).$$

- Es decir,

$$\lambda_1 \leqslant -n(1+H^2),$$

con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.

- Se sigue también de aquí que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\text{Area}(\Sigma)} \leqslant -n(1+H^2) - \frac{1}{\text{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant -n(1+H^2).$$

- Es decir,

$$\lambda_1 \leqslant -n(1+H^2),$$

  con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.

- Obsérvese que, en general, $\lambda_1 < 0$ contribuye al $\text{Ind}(\Sigma)$ pero no al $\text{Ind}_T(\Sigma)$ porque su subespacio propio está generado por una función positiva ϱ, que no satisface la condición adicional $\int_\Sigma \varrho d\Sigma = 0$.

- Se sigue también de aquí que

$$\lambda_1 \leqslant \frac{Q(1)}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \leqslant -n(1+H^2) - \frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant -n(1+H^2).$$

- Es decir,

$$\lambda_1 \leqslant -n(1+H^2),$$

con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.

- Obsérvese que, en general, $\lambda_1 < 0$ contribuye al $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ pero no al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$ porque su subespacio propio está generado por una función positiva ϱ, que no satisface la condición adicional $\int_\Sigma \varrho d\Sigma = 0$.
- Acabamos de probar que no existe ninguna hipersuperficie compacta de CMC fuertemente estable en $\mathbb{S}^{n+1}$. En contraste, tenemos el siguiente resultado para la estabilidad débil.

Teorema 4 (Barbosa, do Carmo y Eschenburg)

Las únicas hipersuperficies compactas de CMC débilmente estables en $\mathbb{S}^{n+1}$ son las esferas totalmente umbilicales $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.

Demostración del Teorema 4

- Si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r)$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ con radio $0 < r < 1$, entonces $1/r^2 = 1 + H^2$ y el operador de Jacobi se reduce a $J = \Delta + n/r^2$.

Demostración del Teorema 4

- Si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r)$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ con radio $0 < r < 1$, entonces $1/r^2 = 1 + H^2$ y el operador de Jacobi se reduce a $J = \Delta + n/r^2$.
- Por lo tanto, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n/r^2$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^n(r)$, son la misma multiplicidad.

Demostración del Teorema 4

- Si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r)$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ con radio $0 < r < 1$, entonces $1/r^2 = 1 + H^2$ y el operador de Jacobi se reduce a $J = \Delta + n/r^2$.
- Por lo tanto, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n/r^2$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^n(r)$, son la misma multiplicidad.
- Como $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = -n/r^2 < 0$ con multiplicidad y sus funciones propias asociadas son las constantes.

Demostración del Teorema 4

- Si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r)$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ con radio $0 < r < 1$, entonces $1/r^2 = 1 + H^2$ y el operador de Jacobi se reduce a $J = \Delta + n/r^2$.
- Por lo tanto, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n/r^2$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^n(r)$, son la misma multiplicidad.
- Como $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = -n/r^2 < 0$ con multiplicidad y sus funciones propias asociadas son las constantes.
- De este modo, puesto que **todas las otras** funciones propias de J (para el problema de Dirichlet usual) son ortogonales a las constantes, todas ellas **satisfacen** la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.

Demostración del Teorema 4

- Si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r)$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ con radio $0 < r < 1$, entonces $1/r^2 = 1 + H^2$ y el operador de Jacobi se reduce a $J = \Delta + n/r^2$.
- Por lo tanto, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n/r^2$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^n(r)$, son la misma multiplicidad.
- Como $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = -n/r^2 < 0$ con multiplicidad y sus funciones propias asociadas son las constantes.
- De este modo, puesto que **todas las otras** funciones propias de J (para el problema de Dirichlet usual) son ortogonales a las constantes, todas ellas **satisfacen** la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.
- Así, en este caso tenemos

$$\lambda_i^T = \lambda_{i+1} = \mu_{i+1} - n/r^2$$

para todo $i \geqslant 1$.

Demostración del Teorema 4

- Si Σ es una esfera totalmente umbilical $\mathbb{S}^n(r)$ en $\mathbb{S}^{n+1}$ con radio $0 < r < 1$, entonces $1/r^2 = 1 + H^2$ y el operador de Jacobi se reduce a $J = \Delta + n/r^2$.
- Por lo tanto, los valores propios de J están dados por $\lambda_i = \mu_i - n/r^2$, donde μ_i es el i-ésimo valor propio del laplaciano en $\mathbb{S}^n(r)$, son la misma multiplicidad.
- Como $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = -n/r^2 < 0$ con multiplicidad y sus funciones propias asociadas son las constantes.
- De este modo, puesto que **todas las otras** funciones propias de J (para el problema de Dirichlet usual) son ortogonales a las constantes, todas ellas **satisfacen** la condición adicional $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.
- Así, en este caso tenemos

$$\lambda_i^T = \lambda_{i+1} = \mu_{i+1} - n/r^2$$

para todo $i \geqslant 1$.

- Teniendo en cuenta que $\mu_2 = n/r^2$, se sigue de aquí que $\lambda_1^T = 0$ y $\Sigma = \mathbb{S}^n(r)$ es débilmente estable.

- Recíprocamente, supongamos que Σ es una hipersuperficie compacta de CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$ que es débilmente estable.

- Recíprocamente, supongamos que Σ es una hipersuperficie compacta de CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$ que es débilmente estable.
- Es decir, con
$$Q(f) \geqslant 0$$
para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ con $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.

- Recíprocamente, supongamos que Σ es una hipersuperficie compacta de CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$ que es débilmente estable.
- Es decir, con

$$Q(f) \geqslant 0$$

  para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ con $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.
- Como en la prueba del Teorema 1, trabajaremos con las funciones ℓ_v y f_v.

- Recíprocamente, supongamos que Σ es una hipersuperficie compacta de CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$ que es débilmente estable.
- Es decir, con
$$Q(f) \geqslant 0$$
para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ con $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.
- Como en la prueba del Teorema 1, trabajaremos con las funciones ℓ_v y f_v.
- Como H es constante, escribiendo $|A|^2 = nH^2 + |\phi|^2$ el laplaciano de f_v es
$$\Delta f_v = nH\ell_v - |A|^2 f_v = -nH(Hf_v - \ell_v) - |\phi|^2 f_v.$$

- Recíprocamente, supongamos que Σ es una hipersuperficie compacta de CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$ que es débilmente estable.
- Es decir, con
$$Q(f) \geqslant 0$$
para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ con $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.
- Como en la prueba del Teorema 1, trabajaremos con las funciones ℓ_v y f_v.
- Como H es constante, escribiendo $|A|^2 = nH^2 + |\phi|^2$ el laplaciano de f_v es
$$\Delta f_v = nH\ell_v - |A|^2 f_v = -nH(Hf_v - \ell_v) - |\phi|^2 f_v.$$
- Consideremos la función $g_v = Hf_v - \ell_v$ y observemos que $ng_v = \Delta \ell_v$, por lo que g_v satisface trivialmente la condición $\int_\Sigma g_v d\Sigma = 0$.

- Recíprocamente, supongamos que Σ es una hipersuperficie compacta de CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$ que es débilmente estable.
- Es decir, con
$$Q(f) \geqslant 0$$
para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ con $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.
- Como en la prueba del Teorema 1, trabajaremos con las funciones ℓ_v y f_v.
- Como H es constante, escribiendo $|A|^2 = nH^2 + |\phi|^2$ el laplaciano de f_v es
$$\Delta f_v = nH\ell_v - |A|^2 f_v = -nH(Hf_v - \ell_v) - |\phi|^2 f_v.$$
- Consideremos la función $g_v = Hf_v - \ell_v$ y observemos que $ng_v = \Delta \ell_v$, por lo que g_v satisface trivialmente la condición $\int_\Sigma g_v d\Sigma = 0$.
- Podemos calcular
$$\Delta g_v = H\Delta f_v - \Delta \ell_v = -n(1 + H^2)g_v - H|\phi|^2 f_v,$$
de modo que
$$Jg_v = -|\phi|^2 \ell_v.$$

- Por lo tanto, tenemos que

$$Q(g_v) = -\int_\Sigma g_v J g_v d\Sigma = H \int_\Sigma |\phi|^2 f_v \ell_v d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \ell_v^2 d\Sigma \geqslant 0$$

para todo vector fijo arbitrario $v \in \mathbb{R}^{n+2}$.

- Por lo tanto, tenemos que

$$Q(g_v) = -\int_\Sigma g_v J g_v d\Sigma = H \int_\Sigma |\phi|^2 f_v \ell_v d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \ell_v^2 d\Sigma \geqslant 0$$

para todo vector fijo arbitrario $v \in \mathbb{R}^{n+2}$.

- Elijamos $v = e_i$ un vector de la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^{n+2}$, $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0 \ldots, 0)$.

- Por lo tanto, tenemos que

$$Q(g_v) = -\int_\Sigma g_v J g_v d\Sigma = H\int_\Sigma |\phi|^2 f_v \ell_v d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \ell_v^2 d\Sigma \geqslant 0$$

para todo vector fijo arbitrario $v \in \mathbb{R}^{n+2}$.

- Elijamos $v = e_i$ un vector de la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^{n+2}$, $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0 \ldots, 0)$.
- Entonces

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n+2} Q(g_{e_i}) \quad = \quad H\int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} f_{e_i}\ell_{e_i} d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} \ell_{e_i}^2 d\Sigma$$

- Por lo tanto, tenemos que

$$Q(g_v) = -\int_\Sigma g_v J g_v \, d\Sigma = H\int_\Sigma |\phi|^2 f_v \ell_v \, d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \ell_v^2 \, d\Sigma \geqslant 0$$

para todo vector fijo arbitrario $v \in \mathbb{R}^{n+2}$.

- Elijamos $v = e_i$ un vector de la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^{n+2}$, $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0 \ldots, 0)$.
- Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n+2} Q(g_{e_i}) &= H\int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} f_{e_i}\ell_{e_i} \, d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} \ell_{e_i}^2 \, d\Sigma \\ &= H\int_\Sigma |\phi|^2 \langle N, \psi\rangle \, d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \langle \psi, \psi\rangle \, d\Sigma \end{aligned}$$

- Por lo tanto, tenemos que

$$Q(g_v) = -\int_\Sigma g_v J g_v d\Sigma = H\int_\Sigma |\phi|^2 f_v \ell_v d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \ell_v^2 d\Sigma \geqslant 0$$

para todo vector fijo arbitrario $v \in \mathbb{R}^{n+2}$.

- Elijamos $v = e_i$ un vector de la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^{n+2}$, $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0 \ldots, 0)$.
- Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n+2} Q(g_{e_i}) &= H\int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} f_{e_i}\ell_{e_i} d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} \ell_{e_i}^2 d\Sigma \\ &= H\int_\Sigma |\phi|^2 \langle N, \psi\rangle d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \langle \psi, \psi\rangle d\Sigma \\ &= -\int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant 0, \end{aligned}$$

ya que

$$\sum_{i=1}^{n+2} f_{e_i}\ell_{e_i} = \langle N, \psi\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+2} \ell_{e_i}^2 = \langle \psi, \psi\rangle = 1.$$

- Por lo tanto, tenemos que
$$Q(g_v) = -\int_\Sigma g_v J g_v d\Sigma = H\int_\Sigma |\phi|^2 f_v \ell_v d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \ell_v^2 d\Sigma \geqslant 0$$
para todo vector fijo arbitrario $v \in \mathbb{R}^{n+2}$.
- Elijamos $v = e_i$ un vector de la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^{n+2}$, $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0 \ldots, 0)$.
- Entonces
$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n+2} Q(g_{e_i}) &= H\int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} f_{e_i}\ell_{e_i} d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} \ell_{e_i}^2 d\Sigma \\ &= H\int_\Sigma |\phi|^2 \langle N, \psi\rangle d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \langle \psi, \psi\rangle d\Sigma \\ &= -\int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant 0, \end{aligned}$$
ya que
$$\sum_{i=1}^{n+2} f_{e_i}\ell_{e_i} = \langle N, \psi\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+2} \ell_{e_i}^2 = \langle \psi, \psi\rangle = 1.$$
- Pero esto significa que $|\phi|^2 = 0$ y Σ es totalmente umbilical.

Hipersuperficies de CMC con índice bajo

Ejemplo 3: Algunos toros de Clifford de CMC tienen índice débil bajo

(i) Los toros de Clifford de CMC $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ tienen todos $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

Ejemplo 3: Algunos toros de Clifford de CMC tienen índice débil bajo

(i) Los toros de Clifford de CMC $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ tienen todos $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

(ii) $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ exactamente cuando

$$\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$$

(en particular si $r = \sqrt{k/n}$, toro de Clifford minimal).

Hipersuperficies de CMC con índice bajo

Ejemplo 3: Algunos toros de Clifford de CMC tienen índice débil bajo

(i) Los toros de Clifford de CMC $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ tienen todos $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

(ii) $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ exactamente cuando

$$\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$$

(en particular si $r = \sqrt{k/n}$, toro de Clifford minimal).

(iii) El valor del índice débil de los toros de Clifford de CMC converge hacia $+\infty$ cuando r converge hacia 0 o hacia 1.

Hipersuperficies de CMC con índice bajo

Ejemplo 3: Algunos toros de Clifford de CMC tienen índice débil bajo

(i) Los toros de Clifford de CMC $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ tienen todos $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

(ii) $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ exactamente cuando

$$\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$$

(en particular si $r = \sqrt{k/n}$, toro de Clifford minimal).

(iii) El valor del índice débil de los toros de Clifford de CMC converge hacia $+\infty$ cuando r converge hacia 0 o hacia 1.

- Se obtienen considerando la inmersiones estándar

$$\mathbb{S}^k(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1}$$

para un radio $0 < r < 1$ y un entero dados $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, y tomando la inmersión producto

$$\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}.$$

- Sus curvaturas principales están dadas por

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

y su CMC $H = H(r)$ está dada por $nH(r) = (nr^2 - k)/r\sqrt{1-r^2}$.

- Sus curvaturas principales están dadas por

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

  y su CMC $H = H(r)$ está dada por $nH(r) = (nr^2 - k)/r\sqrt{1-r^2}$.
- En particular, $H(r) = 0$ precisamente cuando $r = \sqrt{k/n}$, que corresponde al toro de Clifford minimal.

- Sus curvaturas principales están dadas por

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

  y su CMC $H = H(r)$ está dada por $nH(r) = (nr^2 - k)/r\sqrt{1-r^2}$.
- En particular, $H(r) = 0$ precisamente cuando $r = \sqrt{k/n}$, que corresponde al toro de Clifford minimal.
- Todo toro de Clifford de CMC tiene

$$|A|^2 + n = k/r^2 + (n-k)/(1-r^2),$$

  y su operador de Jacobi se reduce a

$$J = \Delta + \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} \right),$$

  donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$.

- Sus curvaturas principales están dadas por

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

y su CMC $H = H(r)$ está dada por $nH(r) = (nr^2 - k)/r\sqrt{1-r^2}$.
- En particular, $H(r) = 0$ precisamente cuando $r = \sqrt{k/n}$, que corresponde al toro de Clifford minimal.
- Todo toro de Clifford de CMC tiene

$$|A|^2 + n = k/r^2 + (n-k)/(1-r^2),$$

y su operador de Jacobi se reduce a

$$J = \Delta + \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right),$$

donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$.
- Los valores propios de J están dados por

$$\lambda_i = \mu_i - \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right),$$

donde μ_i es el i-ésimo valor propio de Δ, con la misma multiplicidad.

- Como consecuencia, teniendo en cuenta que $\mu_1 = 0$ y sus funciones propias son las constantes, se tiene que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$ con multiplicidad 1 y sus funciones propias son las constantes.

- Como consecuencia, teniendo en cuenta que $\mu_1 = 0$ y sus funciones propias son las constantes, se tiene que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$ con multiplicidad 1 y sus funciones propias son las constantes.
- Obsérvese que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) < 0$ contribuye al $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ pero no al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$, por sus funciones propias no cumplen la restricción $\int_\Sigma f = 0$.

- Como consecuencia, teniendo en cuenta que $\mu_1 = 0$ y sus funciones propias son las constantes, se tiene que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$ con multiplicidad 1 y sus funciones propias son las constantes.
- Obsérvese que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) < 0$ contribuye al $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ pero no al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$, por sus funciones propias no cumplen la restricción $\int_\Sigma f = 0$.
- Además, como el resto de funciones propias de J son ortogonales a las constantes, sí satisfacen la restricción $\int_\Sigma f = 0$ y contribuyen al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$.

- Como consecuencia, teniendo en cuenta que $\mu_1 = 0$ y sus funciones propias son las constantes, se tiene que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$ con multiplicidad 1 y sus funciones propias son las constantes.
- Obsérvese que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) < 0$ contribuye al $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ pero no al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$, por sus funciones propias no cumplen la restricción $\int_\Sigma f = 0$.
- Además, como el resto de funciones propias de J son ortogonales a las constantes, sí satisfacen la restricción $\int_\Sigma f = 0$ y contribuyen al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$.
- Por lo tanto, en este caso se tiene

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = \mathrm{Ind}_T(\Sigma) + 1,$$

y $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$ se reduce la número de valores propios positivos del laplaciano (con multiplicidad) que son estrictamente menores que $\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$.

- Como consecuencia, teniendo en cuenta que $\mu_1 = 0$ y sus funciones propias son las constantes, se tiene que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$ con multiplicidad 1 y sus funciones propias son las constantes.
- Obsérvese que $\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) < 0$ contribuye al $\mathrm{Ind}(\Sigma)$ pero no al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$, por sus funciones propias no cumplen la restricción $\int_\Sigma f = 0$.
- Además, como el resto de funciones propias de J son ortogonales a las constantes, sí satisfacen la restricción $\int_\Sigma f = 0$ y contribuyen al $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$.
- Por lo tanto, en este caso se tiene

$$\mathrm{Ind}(\Sigma) = \mathrm{Ind}_T(\Sigma) + 1,$$

  y $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$ se reduce la número de valores propios positivos del laplaciano (con multiplicidad) que son estrictamente menores que $\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$.
- Para estudiar los valores propios del laplaciano en el producto $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$, procedemos como en el caso minimal.

- Los valores propios del laplaciano de $\mathbb{S}^k(r)$ son

$$\alpha_i = \frac{(i-1)(k+i-2)}{r^2}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

con multiplicidades

$$m_{\alpha_1} = 1, \quad m_{\alpha_2} = k+1, \quad m_{\alpha_i} = \binom{k+i-1}{i-1} - \binom{k+i-3}{i-3}, i \geqslant 3.$$

- Los valores propios del laplaciano de $\mathbb{S}^k(r)$ son

$$\alpha_i = \frac{(i-1)(k+i-2)}{r^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

con multiplicidades

$$m_{\alpha_1} = 1, \quad m_{\alpha_2} = k+1, \quad m_{\alpha_i} = \binom{k+i-1}{i-1} - \binom{k+i-3}{i-3}, i \geqslant 3.$$

- Los valores propios del laplaciano de $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ son

$$\beta_j = \frac{(j-1)(n-k+j-2)}{1-r^2}, j = 1, 2, 3,$$

con multiplicidades

$$m_{\beta_1} = 1, \quad m_{\beta_2} = n-k+1, \quad m_{\beta_j} = \binom{n-k+j-1}{j-1} - \binom{n-k+j-3}{j-3}, j$$

- Los valores propios del laplaciano de $\mathbb{S}^k(r)$ son
$$\alpha_i = \frac{(i-1)(k+i-2)}{r^2}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$
con multiplicidades
$$m_{\alpha_1} = 1, \quad m_{\alpha_2} = k+1, \quad m_{\alpha_i} = \binom{k+i-1}{i-1} - \binom{k+i-3}{i-3}, i \geqslant 3.$$

- Los valores propios del laplaciano de $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ son
$$\beta_j = \frac{(j-1)(n-k+j-2)}{1-r^2}, j = 1, 2, 3,$$
con multiplicidades
$$m_{\beta_1} = 1, \quad m_{\beta_2} = n-k+1, \quad m_{\beta_j} = \binom{n-k+j-1}{j-1} - \binom{n-k+j-3}{j-3}, j$$

- El problema se reduce a contar cuando
$$\alpha_i + \beta_j < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} = \alpha_2 + \beta_2.$$

- Obsérvese que siempre se tiene
$$\alpha_1 + \beta_2 = \frac{n-k}{1-r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$
con multiplicidad $n-k+1$ y
$$\alpha_2 + \beta_1 = \frac{k}{r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$
con multiplicidad $k+1$.

- Obsérvese que siempre se tiene

$$\alpha_1 + \beta_2 = \frac{n-k}{1-r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

con multiplicidad $n-k+1$ y

$$\alpha_2 + \beta_1 = \frac{k}{r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

con multiplicidad $k+1$.
- Por lo tanto, siempre es

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n-k+1+k+1 = n+2.$$

- Obsérvese que siempre se tiene

$$\alpha_1 + \beta_2 = \frac{n-k}{1-r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

con multiplicidad $n-k+1$ y

$$\alpha_2 + \beta_1 = \frac{k}{r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

con multiplicidad $k+1$.

- Por lo tanto, siempre es

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n-k+1+k+1 = n+2.$$

- Además, $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ precisamente cuando

$$\alpha_1 + \beta_3 = \beta_3 \geqslant \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} \quad \text{y} \quad \alpha_3 + \beta_1 = \alpha_3 \geqslant \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2},$$

es decir, si y sólo si

$$\frac{k}{n+2} \leqslant r^2 \leqslant \frac{k+2}{n+2}.$$

- Obsérvese que siempre se tiene

$$\alpha_1 + \beta_2 = \frac{n-k}{1-r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

con multiplicidad $n-k+1$ y

$$\alpha_2 + \beta_1 = \frac{k}{r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

con multiplicidad $k+1$.

- Por lo tanto, siempre es

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n-k+1+k+1 = n+2.$$

- Además, $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ precisamente cuando

$$\alpha_1 + \beta_3 = \beta_3 \geqslant \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} \quad \text{y} \quad \alpha_3 + \beta_1 = \alpha_3 \geqslant \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2},$$

es decir, si y sólo si

$$\frac{k}{n+2} \leqslant r^2 \leqslant \frac{k+2}{n+2}.$$

- En particular, esto pasa cuando $r^2 = k/n$, de modo que el toro de Clifford minimal tiene $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ cuando se mira como hipersuperficie de CMC.

- Es interesante señalar que el índice de $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ converge a $+\infty$ cuando r converge hacia 0 o hacia 1.

- Es interesante señalar que el índice de $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ converge a $+\infty$ cuando r converge hacia 0 o hacia 1.
- De hecho, para todos $i, j \geqslant 3$ se tiene que

$$\alpha_1 + \beta_j < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

si y sólo si

$$r^2 < a_j = \frac{k}{n + (j-3)(n-k) + (j-1)(j-2)},$$

y

$$\alpha_i + \beta_1 < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

si y sólo si

$$r^2 > b_i = 1 - \frac{(n-k)}{(n-k) + (i-2)(k+i-1)},$$

donde $\{a_j\} \searrow 0$ y $\{b_i\} \nearrow 1$.

- Es interesante señalar que el índice de $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ converge a $+\infty$ cuando r converge hacia 0 o hacia 1.
- De hecho, para todos $i, j \geqslant 3$ se tiene que

$$\alpha_1 + \beta_j < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

si y sólo si

$$r^2 < a_j = \frac{k}{n + (j-3)(n-k) + (j-1)(j-2)},$$

y

$$\alpha_i + \beta_1 < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

si y sólo si

$$r^2 > b_i = 1 - \frac{(n-k)}{(n-k) + (i-2)(k+i-1)},$$

donde $\{a_j\} \searrow 0$ y $\{b_i\} \nearrow 1$.
- Así, si denotamos por $\mathrm{Ind}_T(r)$ el índice débil del toro, se tiene que

$$\mathrm{Ind}_T(r) = n + 2$$

cuando $a_3 = k/(n+2) \leqslant r^2 \leqslant (k+2)/(n+2) = b_3$.

- Además,

$$\mathrm{Ind}_T(r) = n+2+\sum_{l=3}^{j} m_{\beta_l} = k+\binom{n-k+j-1}{j-1}+\binom{n-k+j-2}{j-2}$$

cuando $a_{j+1} \leqslant r^2 < a_j$, con $j \geqslant 3$, y

$$\mathrm{Ind}_T(r) = n+2+\sum_{l=3}^{i} m_{\alpha_l} = n-k+1+\binom{k+i-1}{i-1}+\binom{k+i-2}{i-2}$$

cuando $b_i < r^2 \leqslant b_{i+1}$, con $i \geqslant 3$.

- Además,

$$\mathrm{Ind}_T(r) = n+2+\sum_{l=3}^{j} m_{\beta_l} = k+\binom{n-k+j-1}{j-1}+\binom{n-k+j-2}{j-2}$$

cuando $a_{j+1} \leqslant r^2 < a_j$, con $j \geqslant 3$, y

$$\mathrm{Ind}_T(r) = n+2+\sum_{l=3}^{i} m_{\alpha_l} = n-k+1+\binom{k+i-1}{i-1}+\binom{k+i-2}{i-2}$$

cuando $b_i < r^2 \leqslant b_{i+1}$, con $i \geqslant 3$.

- En particular,

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{Ind}_T(r) = \lim_{r\to 1} \mathrm{Ind}_T(r) = +\infty.$$

Teorema 5 (—, Brasil and Perdomo 2007)

Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y orientable con CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$. Supongamos que Σ tiene curvatura escalar constante. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$, con igualdad si y sólo si Σ es un toro de Clifford de la forma $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ con radio $\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$.

Teorema 5 (—, Brasil and Perdomo 2007)

Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y orientable con CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$. Supongamos que Σ tiene curvatura escalar constante. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$, con igualdad si y sólo si Σ es un toro de Clifford de la forma $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ con radio $\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$.

Demostración del Teorema 5:

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ para las esferas totalmente umbilicales y que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant 1$ para el resto de hipersuperficies compactas de CMC.

Teorema 5 (—, Brasil and Perdomo 2007)

Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y orientable con CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$. Supongamos que Σ tiene curvatura escalar constante. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$, con igualdad si y sólo si Σ es un toro de Clifford de la forma $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ con radio $\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$.

Demostración del Teorema 5:

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ para las esferas totalmente umbilicales y que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant 1$ para el resto de hipersuperficies compactas de CMC.
- Así, necesitamos probar que, si la curvatura escalar es constante (or equivalentemente, $|A|^2$ es constante), entonces $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$ para toda hipersuperficie de CMC que no sea totalmente umbilical.

Teorema 5 (—, Brasil and Perdomo 2007)

Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y orientable con CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$. Supongamos que Σ tiene curvatura escalar constante. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$, con igualdad si y sólo si Σ es un toro de Clifford de la forma $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ con radio $\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$.

Demostración del Teorema 5:

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ para las esferas totalmente umbilicales y que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant 1$ para el resto de hipersuperficies compactas de CMC.
- Así, necesitamos probar que, si la curvatura escalar es constante (or equivalentemente, $|A|^2$ es constante), entonces $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$ para toda hipersuperficie de CMC que no sea totalmente umbilical.
- Para ello, necesitamos encontrar un subespacio V de $\mathcal{C}^\infty_T(\Sigma)$ con $\dim V \geqslant n+2$ sobre el cual Q sea definida negativa.

Teorema 5 (—, Brasil and Perdomo 2007)

Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y orientable con CMC en $\mathbb{S}^{n+1}$. Supongamos que Σ tiene curvatura escalar constante. Entonces

(i) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$, con igualdad si y sólo si Σ es un toro de Clifford de la forma $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ con radio $\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$.

Demostración del Teorema 5:

- Sabemos ya que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = 0$ para las esferas totalmente umbilicales y que $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant 1$ para el resto de hipersuperficies compactas de CMC.
- Así, necesitamos probar que, si la curvatura escalar es constante (or equivalentemente, $|A|^2$ es constante), entonces $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$ para toda hipersuperficie de CMC que no sea totalmente umbilical.
- Para ello, necesitamos encontrar un subespacio V de $\mathcal{C}_T^\infty(\Sigma)$ con $\dim V \geqslant n+2$ sobre el cual Q sea definida negativa.
- Cuando $H = 0$, basta tomar $V = \{f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$, como en el caso del Teorema 1.

- En lo que sigue, suponemos que H es una constante no nula y tomamos $V = U_- + U_+$ donde

$$U_- = \{\ell_v - \alpha_- f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\} \quad \text{y} \quad U_+ = \{\ell_v - \alpha_+ f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}.$$

- En lo que sigue, suponemos que H es una constante no nula y tomamos $V = U_- + U_+$ donde

$$U_- = \{\ell_v - \alpha_- f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\} \quad \text{y} \quad U_+ = \{\ell_v - \alpha_+ f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}.$$

- Aquí $\alpha_\pm$ son las dos raíces reales distintas de la ecuación

$$nH\alpha^2 + (n - |A|^2)\alpha - nH = 0.,$$

es decir,

$$\alpha_\pm = \frac{|A|^2 - n \pm \sqrt{D}}{2nH}, \quad \text{donde} \quad D = (|A|^2 - n)^2 + 4n^2H^2 > 0.$$

- En lo que sigue, suponemos que H es una constante no nula y tomamos $V = U_- + U_+$ donde

$$U_- = \{\ell_v - \alpha_- f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\} \quad \text{y} \quad U_+ = \{\ell_v - \alpha_+ f_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}.$$

- Aquí $\alpha_\pm$ son las dos raíces reales distintas de la ecuación

$$nH\alpha^2 + (n - |A|^2)\alpha - nH = 0.,$$

es decir,

$$\alpha_\pm = \frac{|A|^2 - n \pm \sqrt{D}}{2nH}, \quad \text{donde} \quad D = (|A|^2 - n)^2 + 4n^2H^2 > 0.$$

- Usando las expresiones del laplaciano de ℓ_v y f_v, vemos que $Jf + \lambda_\pm f = 0$ para toda $f \in U_\pm$, donde

$$\lambda_- = \frac{-(n + |A|^2) - \sqrt{D}}{2} < \lambda_+ = \frac{-(n + |A|^2) + \sqrt{D}}{2} < 0,$$

y que satisfacen la condición $\int_\Sigma f = 0$.

- Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$

- Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$

- Nos queda estimar $\dim U_- + \dim U_+$.

- Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$

- Nos queda estimar $\dim U_- + \dim U_+$.
- Consideremos $\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ las aplicaciones lineales dadas por $\varphi_\pm(v) = \ell_v - \alpha_\pm f_v$.

- Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$

- Nos queda estimar $\dim U_- + \dim U_+$.
- Consideremos $\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ las aplicaciones lineales dadas por $\varphi_\pm(v) = \ell_v - \alpha_\pm f_v$.
- Como $U_\pm = \mathrm{Im}\varphi_\pm$, tenemos

$$\dim U_\pm = n + 2 - \dim \mathrm{Ker}\varphi_\pm.$$

- Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$

- Nos queda estimar $\dim U_- + \dim U_+$.
- Consideremos $\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ las aplicaciones lineales dadas por $\varphi_\pm(v) = \ell_v - \alpha_\pm f_v$.
- Como $U_\pm = \mathrm{Im}\varphi_\pm$, tenemos

$$\dim U_\pm = n + 2 - \dim \mathrm{Ker}\varphi_\pm.$$

- Afirmamos que $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$.

- Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$

- Nos queda estimar $\dim U_- + \dim U_+$.
- Consideremos $\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ las aplicaciones lineales dadas por $\varphi_\pm(v) = \ell_v - \alpha_\pm f_v$.
- Como $U_\pm = \mathrm{Im}\varphi_\pm$, tenemos

$$\dim U_\pm = n + 2 - \dim \mathrm{Ker}\varphi_\pm.$$

- Afirmamos que $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$.
- En efecto, si existe un vector unitario $v \in \mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+$, se tiene

$$\ell_v - \alpha_- f_v = 0 = \ell_v - \alpha_+ f_v$$

lo que implica

$$\alpha_+(\ell_v - \alpha_- f_v) = 0 = \alpha_-(\ell_v - \alpha_+ f_v).$$

- Por lo tanto

$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$

- Nos queda estimar $\dim U_- + \dim U_+$.
- Consideremos $\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ las aplicaciones lineales dadas por $\varphi_\pm(v) = \ell_v - \alpha_\pm f_v$.
- Como $U_\pm = \mathrm{Im}\varphi_\pm$, tenemos

$$\dim U_\pm = n + 2 - \dim \mathrm{Ker}\varphi_\pm.$$

- Afirmamos que $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$.
- En efecto, si existe un vector unitario $v \in \mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+$, se tiene

$$\ell_v - \alpha_- f_v = 0 = \ell_v - \alpha_+ f_v$$

lo que implica

$$\alpha_+(\ell_v - \alpha_- f_v) = 0 = \alpha_-(\ell_v - \alpha_+ f_v).$$

- Es decir, $(\alpha_+ - \alpha_-)\ell_v = 0$ y equivalentemente $\ell_v = 0$, porque $\alpha_+ - \alpha_- > 0$.

- Por lo tanto
$$\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant \dim V = \dim(U_- \oplus U_+) = \dim U_- + \dim U_+.$$
- Nos queda estimar $\dim U_- + \dim U_+$.
- Consideremos $\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ las aplicaciones lineales dadas por $\varphi_\pm(v) = \ell_v - \alpha_\pm f_v$.
- Como $U_\pm = \mathrm{Im}\varphi_\pm$, tenemos
$$\dim U_\pm = n + 2 - \dim \mathrm{Ker}\varphi_\pm.$$
- Afirmamos que $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$.
- En efecto, si existe un vector unitario $v \in \mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+$, se tiene
$$\ell_v - \alpha_- f_v = 0 = \ell_v - \alpha_+ f_v$$
lo que implica
$$\alpha_+(\ell_v - \alpha_- f_v) = 0 = \alpha_-(\ell_v - \alpha_+ f_v).$$
- Es decir, $(\alpha_+ - \alpha_-)\ell_v = 0$ y equivalentemente $\ell_v = 0$, porque $\alpha_+ - \alpha_- > 0$.
- Pero entonces Σ sería un ecuador, lo cual no es posible.

- Así, $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$ y

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+ = \dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) \leqslant n+2.$$

- Así, $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$ y

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+ = \dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) \leqslant n+2.$$

- Esto implica

$$\dim U_- + \dim U_+ = 2(n+2) - (\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+) \geqslant n+2,$$

y por lo tanto $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

- Así, $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$ y

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+ = \dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) \leqslant n+2.$$

- Esto implica

$$\dim U_- + \dim U_+ = 2(n+2) - (\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+) \geqslant n+2,$$

  y por lo tanto $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

- Además, si $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ entonces $\dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) = n+2$ lo que significa que $\mathbb{R}^{n+2} = \mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+$, como suma directa de los dos núcleos.

- Así, $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$ y

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+ = \dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) \leqslant n+2.$$

- Esto implica

$$\dim U_- + \dim U_+ = 2(n+2) - (\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+) \geqslant n+2,$$

  y por lo tanto $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

- Además, si $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ entonces $\dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) = n+2$ lo que significa que $\mathbb{R}^{n+2} = \mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+$, como suma directa de los dos núcleos.

- Entonces, en cada $p \in \Sigma$ el espacio tangente $T_p\Sigma$ también se escribe como suma directa de dos subespacios

$$T_p\Sigma = T_p\Sigma \cap \mathbb{R}^{n+2} = T_p\Sigma^- \oplus T_p\Sigma^+,$$

  donde $T_p\Sigma^- = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_-$ y $T_p\Sigma^+ = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_+$.

- Así, $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$ y
$$\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+ = \dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) \leqslant n+2.$$
- Esto implica
$$\dim U_- + \dim U_+ = 2(n+2) - (\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+) \geqslant n+2,$$
y por lo tanto $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.
- Además, si $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ entonces $\dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) = n+2$ lo que significa que $\mathbb{R}^{n+2} = \mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+$, como suma directa de los dos núcleos.
- Entonces, en cada $p \in \Sigma$ el espacio tangente $T_p\Sigma$ también se escribe como suma directa de dos subespacios
$$T_p\Sigma = T_p\Sigma \cap \mathbb{R}^{n+2} = T_p\Sigma^- \oplus T_p\Sigma^+,$$
donde $T_p\Sigma^- = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_-$ y $T_p\Sigma^+ = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_+$.
- Supongamos que $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ y sea $v \in T_p\Sigma^-$, $v \neq 0$.

- Así, $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$ y

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+ = \dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) \leqslant n+2.$$

- Esto implica

$$\dim U_- + \dim U_+ = 2(n+2) - (\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+) \geqslant n+2,$$

  y por lo tanto $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

- Además, si $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ entonces $\dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) = n+2$ lo que significa que $\mathbb{R}^{n+2} = \mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+$, como suma directa de los dos núcleos.

- Entonces, en cada $p \in \Sigma$ el espacio tangente $T_p\Sigma$ también se escribe como suma directa de dos subespacios

$$T_p\Sigma = T_p\Sigma \cap \mathbb{R}^{n+2} = T_p\Sigma^- \oplus T_p\Sigma^+,$$

  donde $T_p\Sigma^- = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_-$ y $T_p\Sigma^+ = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_+$.

- Supongamos que $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ y sea $v \in T_p\Sigma^-$, $v \neq 0$.

- Entonces $\ell_v - \alpha_- f_v = 0$ en Σ, lo que implica que $\alpha_- \neq 0$.

- Así, $\mathrm{Ker}\varphi_- \cap \mathrm{Ker}\varphi_+ = \{0\}$ y

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+ = \dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) \leqslant n+2.$$

- Esto implica

$$\dim U_- + \dim U_+ = 2(n+2) - (\dim \mathrm{Ker}\varphi_- + \dim \mathrm{Ker}\varphi_+) \geqslant n+2,$$

y por lo tanto $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) \geqslant n+2$.

- Además, si $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$ entonces $\dim(\mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+) = n+2$ lo que significa que $\mathbb{R}^{n+2} = \mathrm{Ker}\varphi_- \oplus \mathrm{Ker}\varphi_+$, como suma directa de los dos núcleos.
- Entonces, en cada $p \in \Sigma$ el espacio tangente $T_p\Sigma$ también se escribe como suma directa de dos subespacios

$$T_p\Sigma = T_p\Sigma \cap \mathbb{R}^{n+2} = T_p\Sigma^- \oplus T_p\Sigma^+,$$

donde $T_p\Sigma^- = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_-$ y $T_p\Sigma^+ = T_p\Sigma \cap \mathrm{Ker}\varphi_+$.

- Supongamos que $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ y sea $v \in T_p\Sigma^-$, $v \neq 0$.
- Entonces $\ell_v - \alpha_- f_v = 0$ en Σ, lo que implica que $\alpha_- \neq 0$.
- En otro caso, $\ell_v = 0$ y Σ sería un ecuador, lo cual es imposible porque estamos suponiendo $\mathrm{Ind}_T(\Sigma) = n+2$.

- Además, también tenemos

$$\nabla(\ell_v - \alpha_- f_v) = v^\top + \alpha_- A(v^\top) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

- Además, también tenemos

$$\nabla(\ell_v - \alpha_- f_v) = v^\top + \alpha_- A(v^\top) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

- En particular, en el punto p tenemos $v^\top(p) = v$ y

$$A_p(v) = -\frac{1}{\alpha_-} v.$$

- Además, también tenemos

$$\nabla(\ell_v - \alpha_- f_v) = v^\top + \alpha_- A(v^\top) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

- En particular, en el punto p tenemos $v^\top(p) = v$ y

$$A_p(v) = -\frac{1}{\alpha_-} v.$$

- En resumen, si $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ entonces $\alpha_- \neq 0$ y $T_p\Sigma^-$ es un subespacio de $T_p\Sigma$ de direcciones principales con curvatura principal constante $-1/\alpha_-$.

- Además, también tenemos

$$\nabla(\ell_v - \alpha_- f_v) = v^\top + \alpha_- A(v^\top) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

- En particular, en el punto p tenemos $v^\top(p) = v$ y

$$A_p(v) = -\frac{1}{\alpha_-} v.$$

- En resumen, si $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ entonces $\alpha_- \neq 0$ y $T_p\Sigma^-$ es un subespacio de $T_p\Sigma$ de direcciones principales con curvatura principal constante $-1/\alpha_-$.
- Del mismo modo, si $T_p\Sigma^+ \neq \{0\}$ entonces $\alpha_+ \neq 0$ y $T_p\Sigma^+$ es un subespacio de $T_p\Sigma$ de direcciones principales con curvatura principal constante $-1/\alpha_+$.

- Además, también tenemos

$$\nabla(\ell_v - \alpha_- f_v) = v^\top + \alpha_- A(v^\top) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

- En particular, en el punto p tenemos $v^\top(p) = v$ y

$$A_p(v) = -\frac{1}{\alpha_-} v.$$

- En resumen, si $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ entonces $\alpha_- \neq 0$ y $T_p\Sigma^-$ es un subespacio de $T_p\Sigma$ de direcciones principales con curvatura principal constante $-1/\alpha_-$.
- Del mismo modo, si $T_p\Sigma^+ \neq \{0\}$ entonces $\alpha_+ \neq 0$ y $T_p\Sigma^+$ es un subespacio de $T_p\Sigma$ de direcciones principales con curvatura principal constante $-1/\alpha_+$.
- Así, Σ es una hipersuperficie compacta isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ con dos curvaturas principales distintas y entonces debe ser un producto estándar $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ con radio $0 < r < 1$.

- Además, también tenemos

$$\nabla(\ell_v - \alpha_- f_v) = v^\top + \alpha_- A(v^\top) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

- En particular, en el punto p tenemos $v^\top(p) = v$ y

$$A_p(v) = -\frac{1}{\alpha_-} v.$$

- En resumen, si $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ entonces $\alpha_- \neq 0$ y $T_p\Sigma^-$ es un subespacio de $T_p\Sigma$ de direcciones principales con curvatura principal constante $-1/\alpha_-$.
- Del mismo modo, si $T_p\Sigma^+ \neq \{0\}$ entonces $\alpha_+ \neq 0$ y $T_p\Sigma^+$ es un subespacio de $T_p\Sigma$ de direcciones principales con curvatura principal constante $-1/\alpha_+$.
- Así, Σ es una hipersuperficie compacta isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ con dos curvaturas principales distintas y entonces debe ser un producto estándar $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ con radio $0 < r < 1$.
- Finalmente, de nuestra discusiones previas sobre los valores de $\mathrm{Ind}_T(\Sigma)$, debe ser $\sqrt{k/(n+2)} \leqslant r \leqslant \sqrt{(k+2)/(n+2)}$.

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Utilizando $f = 1$ como función test para estimar λ_1, hemos visto que $\lambda_1 \leqslant -n(1 + H^2)$, con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical.

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Utilizando $f=1$ como función test para estimar λ_1, hemos visto que $\lambda_1 \leqslant -n(1+H^2)$, con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical.
- En relación con este resultado, El Soufi e Ilias (2000), utilizando funciones test que son ortogonales a la primera función propia (vía el argumento conforme de Li y Yau), han demostrado que

$$\lambda_2 \leqslant -\frac{1}{\text{Area}(\Sigma)}\int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant 0.$$

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Utilizando $f = 1$ como función test para estimar λ_1, hemos visto que $\lambda_1 \leqslant -n(1 + H^2)$, con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical.
- En relación con este resultado, El Soufi e Ilias (2000), utilizando funciones test que son ortogonales a la primera función propia (vía el argumento conforme de Li y Yau), han demostrado que

$$\lambda_2 \leqslant -\frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant 0.$$

- En particular, $\lambda_2 \leq 0$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Utilizando $f = 1$ como función test para estimar λ_1, hemos visto que $\lambda_1 \leqslant -n(1 + H^2)$, con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical.
- En relación con este resultado, El Soufi e Ilias (2000), utilizando funciones test que son ortogonales a la primera función propia (vía el argumento conforme de Li y Yau), han demostrado que
$$\lambda_2 \leqslant -\frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant 0.$$
- En particular, $\lambda_2 \leq 0$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.
- Como aplicación de esto, podemos dar otra prueba del Teorema 4 (caracterización de la esferas totalmente umbilicales como las únicas hipersuperficies compactas de CMC que son débilmente estables).

Estimaciones del primer valor propio de estabilidad

- Utilizando $f = 1$ como función test para estimar λ_1, hemos visto que $\lambda_1 \leqslant -n(1+H^2)$, con igualdad si y sólo si Σ es una esfera totalmente umbilical.
- En relación con este resultado, El Soufi e Ilias (2000), utilizando funciones test que son ortogonales a la primera función propia (vía el argumento conforme de Li y Yau), han demostrado que

$$\lambda_2 \leqslant -\frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant 0.$$

- En particular, $\lambda_2 \leq 0$ con igualdad si y sólo si Σ es totalmente umbilical.
- Como aplicación de esto, podemos dar otra prueba del Teorema 4 (caracterización de la esferas totalmente umbilicales como las únicas hipersuperficies compactas de CMC que son débilmente estables).
- De hecho, si Σ es débilmente estable, entonces

$$0 \leqslant \lambda_1^T \leqslant \lambda_2 \leqslant -\frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leqslant 0,$$

lo que implica que $|\phi|^2 = 0$ y Σ debe ser totalmente umbilical.

Teorema 5 (—, Barros y Brasil 2005)

Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y orientable con curvatura media constante H en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -n(1+H^2)$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H| \max_\Sigma |\phi|$, con igualdad si y sólo si

(a) $H=0$ y Σ es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, con $k = 1, \dots, n-1$;

(b) $H \neq 0$, $n=2$, y Σ^2 es un toro de Clifford de CMC, $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0<r<1$, $r \neq \sqrt{1/2}$;

(c) $H \neq 0$, $n \geqslant 3$, y Σ^n es un toro de Clifford de CMC, $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0 < r < \sqrt{(n-1)/n}$.

Teorema 5 (—, Barros y Brasil 2005)

Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y orientable con curvatura media constante H en la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -n(1+H^2)$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H| \max_\Sigma |\phi|$, con igualdad si y sólo si

   (a) $H=0$ y Σ es un toro de Clifford minimal $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, con $k=1,\dots,n-1$;

   (b) $H \neq 0$, $n=2$, y Σ^2 es un toro de Clifford de CMC, $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0<r<1$, $r \neq \sqrt{1/2}$;

   (c) $H \neq 0$, $n \geqslant 3$, y Σ^n es un toro de Clifford de CMC, $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0<r<\sqrt{(n-1)/n}$.

Corolario 6 ($n=2$)

Sea Σ^2 una superficie compacta y orientable con curvatura media constante H en la esfera $\mathbb{S}^3$. Entonces

(i) o bien $\lambda_1 = -2(1+H^2)$ (y Σ es una esfera totalmente umbilical),

(ii) o bien $\lambda_1 \leqslant -4(1+H^2)$, con igualdad si y sólo si Σ^2 es un toro de Clifford de CMC, $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0<r<1$.

- La demostración está basada en la caracterización minimax de λ_1, utilizando ahora como función test la función $f_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon + |\phi|^2}$.

- La demostración está basada en la caracterización minimax de λ_1, utilizando ahora como función test la función $f_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon + |\phi|^2}$.
- Por la fórmula de Simons (con H constante) tenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla\phi|^2 + (n(1+H^2) - |\phi|^2)|\phi|^2 + nH\mathrm{tr}(\phi^3),$$

ya que $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2$ y $\nabla\phi = \nabla A$.

- La demostración está basada en la caracterización minimax de λ_1, utilizando ahora como función test la función $f_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon + |\phi|^2}$.
- Por la fórmula de Simons (con H constante) tenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla\phi|^2 + (n(1+H^2) - |\phi|^2)|\phi|^2 + nH\mathrm{tr}(\phi^3),$$

ya que $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2$ y $\nabla\phi = \nabla A$.

- De esta manera,

$$\begin{aligned} f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon &= \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}|\nabla|\phi|^2|^2 \\ &= |\nabla\phi|^2 + (n(1+H^2) - |\phi|^2)|\phi|^2 + nH\mathrm{tr}(\phi^3) - \frac{|\nabla|\phi|^2|^2}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}. \end{aligned}$$

- La demostración está basada en la caracterización minimax de λ_1, utilizando ahora como función test la función $f_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon + |\phi|^2}$.
- Por la fórmula de Simons (con H constante) tenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla\phi|^2 + (n(1+H^2) - |\phi|^2)|\phi|^2 + nH\mathrm{tr}(\phi^3),$$

ya que $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2$ y $\nabla\phi = \nabla A$.

- De esta manera,

$$\begin{aligned} f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon &= \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}|\nabla|\phi|^2|^2 \\ &= |\nabla\phi|^2 + (n(1+H^2) - |\phi|^2)|\phi|^2 + nH\mathrm{tr}(\phi^3) - \frac{|\nabla|\phi|^2|^2}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}. \end{aligned}$$

Lema (Okumura 1974)

Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales tales que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Entonces

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{3/2} \leqslant \sum_{i=1}^n a_i^3 \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{3/2}.$$

Además, se da la igualdad en el lado de la derecha (respectivamente, izquierda) si y sólo si $(n-1)$ de los a_i son iguales y no positivos

- Como $\mathrm{tr}(\phi) = 0$, utilizamos este Lema para estimar $\mathrm{tr}(\phi^3)$,

$$nH\mathrm{tr}(\phi^3) \geqslant -n|H||\mathrm{tr}(\phi^3)| \geqslant -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|^3,$$

y así tenemos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant |\nabla\phi|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}|\nabla|\phi|^2|^2 - |\phi|^2 P_H(|\phi|),$$

donde P_H es el polinomio dado por

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|x - n(1+H^2).$$

- Como $\mathrm{tr}(\phi) = 0$, utilizamos este Lema para estimar $\mathrm{tr}(\phi^3)$,

$$nH\mathrm{tr}(\phi^3) \geqslant -n|H||\mathrm{tr}(\phi^3)| \geqslant -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|^3,$$

y así tenemos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant |\nabla\phi|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}|\nabla|\phi|^2|^2 - |\phi|^2 P_H(|\phi|),$$

donde P_H es el polinomio dado por

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|x - n(1+H^2).$$

- Por otra parte, como $\mathrm{tr}(\phi) = 0$, también tenemos que

$$|\nabla|\phi|^2|^2 \leq \frac{4n}{n+2}|\phi|^2|\nabla\phi|^2$$

y

$$|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}|\nabla|\phi|^2|^2 \geqslant \frac{2}{n+2}|\nabla\phi|^2.$$

- Como $\mathrm{tr}(\phi) = 0$, utilizamos este Lema para estimar $\mathrm{tr}(\phi^3)$,

$$nH\mathrm{tr}(\phi^3) \geqslant -n|H||\mathrm{tr}(\phi^3)| \geqslant -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|^3,$$

y así tenemos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}|\nabla|\phi|^2|^2 - |\phi|^2 P_H(|\phi|),$$

donde P_H es el polinomio dado por

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|x - n(1+H^2).$$

- Por otra parte, como $\mathrm{tr}(\phi) = 0$, también tenemos que

$$|\nabla|\phi|^2|^2 \leq \frac{4n}{n+2}|\phi|^2|\nabla\phi|^2$$

y

$$|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{4(\varepsilon + |\phi|^2)}|\nabla|\phi|^2|^2 \geqslant \frac{2}{n+2}|\nabla\phi|^2.$$

- De todo esto, concluimos que

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geqslant \frac{2}{n+2}|\nabla\phi|^2 - |\phi|^2 P_H(|\phi|).$$

- De esta manera, utilizando el principio minimax

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 \quad \leq \quad & -\int_\Sigma f_\varepsilon J(f_\varepsilon) \leq \int_\Sigma |\phi|^2 P_H(|\phi|) \\ & -\frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla\phi|^2 - \int_\Sigma (\varepsilon + |\phi|^2)(|\phi|^2 + n(1+H^2)).\end{aligned}$$

- De esta manera, utilizando el principio minimax

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 \quad &\leq \quad -\int_\Sigma f_\varepsilon J(f_\varepsilon) \leq \int_\Sigma |\phi|^2 P_H(|\phi|) \\ &\quad -\frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla\phi|^2 - \int_\Sigma (\varepsilon + |\phi|^2)(|\phi|^2 + n(1+H^2)).\end{aligned}$$

- Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$ concluimos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \quad &\leqslant \quad -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\frac{\int_\Sigma |\phi|^3}{\int_\Sigma |\phi|^2} - \frac{2}{n+2}\frac{\int_\Sigma |\nabla\phi|^2}{\int_\Sigma |\phi|^2} \\ &\leqslant \quad -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H| \max_\Sigma |\phi|.\end{aligned}$$

- De esta manera, utilizando el principio minimax

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 \quad &\leq \quad -\int_\Sigma f_\varepsilon J(f_\varepsilon) \leq \int_\Sigma |\phi|^2 P_H(|\phi|) \\ & -\frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla\phi|^2 - \int_\Sigma (\varepsilon + |\phi|^2)(|\phi|^2 + n(1+H^2)).\end{aligned}$$

- Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$ concluimos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \quad &\leqslant \quad -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\frac{\int_\Sigma |\phi|^3}{\int_\Sigma |\phi|^2} - \frac{2}{n+2}\frac{\int_\Sigma |\nabla\phi|^2}{\int_\Sigma |\phi|^2} \\ &\leqslant \quad -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H| \max_\Sigma |\phi|.\end{aligned}$$

- Además, si se da la igualdad, todas las desigualdades anteriores deben ser igualdades. En particular, $\nabla\phi = 0$ y $|\phi|^2$ debe ser una constante positiva.

- De esta manera, utilizando el principio minimax

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 \quad &\leq \quad -\int_\Sigma f_\varepsilon J(f_\varepsilon) \leq \int_\Sigma |\phi|^2 P_H(|\phi|) \\ &\quad -\frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla\phi|^2 - \int_\Sigma (\varepsilon + |\phi|^2)(|\phi|^2 + n(1+H^2)).\end{aligned}$$

- Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$ concluimos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \quad &\leqslant \quad -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\frac{\int_\Sigma |\phi|^3}{\int_\Sigma |\phi|^2} - \frac{2}{n+2}\frac{\int_\Sigma |\nabla\phi|^2}{\int_\Sigma |\phi|^2} \\ &\leqslant \quad -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H| \max_\Sigma |\phi|.\end{aligned}$$

- Además, si se da la igualdad, todas las desigualdades anteriores deben ser igualdades. En particular, $\nabla\phi = 0$ y $|\phi|^2$ debe ser una constante positiva.
- Pero entonces $J = \Delta + (|\phi|^2 + n(1+H^2))$, con $|\phi|^2 + n(1+H^2)$ constante, y su primer valor propio es

$$\lambda_1 = \lambda_1^\Delta - (|\phi|^2 + n(1+H^2)) = -(|\phi|^2 + n(1+H^2)).$$

- Como también tenemos

$$\lambda_1 = -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|,$$

concluimos que

$$P_H(|\phi|) = |\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi| - n(1+H^2) = 0$$

y la constante $|\phi|$ es justamente la raíz positiva de $P_H(x)$,

$$|\phi| = \alpha_H = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}}\left(\sqrt{n^2H^2+4(n-1)} - (n-2)|H|\right)$$

- Como también tenemos

$$\lambda_1 = -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|,$$

concluimos que

$$P_H(|\phi|) = |\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi| - n(1+H^2) = 0$$

y la constante $|\phi|$ es justamente la raíz positiva de $P_H(x)$,

$$|\phi| = \alpha_H = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}}\left(\sqrt{n^2H^2+4(n-1)} - (n-2)|H|\right)$$

- Por otra parte, si se da la igualdad también tenemos la igualdad en

$$nH\mathrm{tr}(\phi^3) \geqslant -n|H||\mathrm{tr}(\phi^3)| \geqslant -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|^3,$$

es decir, o bien $H=0$, o bien $H \neq 0$ y tenemos igualdad en el Lema de Okumura.

- Como también tenemos

$$\lambda_1 = -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|,$$

concluimos que

$$P_H(|\phi|) = |\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi| - n(1+H^2) = 0$$

y la constante $|\phi|$ es justamente la raíz positiva de $P_H(x)$,

$$|\phi| = \alpha_H = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}}\left(\sqrt{n^2H^2+4(n-1)} - (n-2)|H|\right)$$

- Por otra parte, si se da la igualdad también tenemos la igualdad en

$$nH\mathrm{tr}(\phi^3) \geqslant -n|H||\mathrm{tr}(\phi^3)| \geqslant -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|^3,$$

es decir, o bien $H=0$, o bien $H\neq 0$ y tenemos igualdad en el Lema de Okumura.

- Si $H=0$, entonces $|\phi| = \alpha_0 = |A| = \sqrt{n}$ y sabemos que Σ es un toro de Clifford minimal de la familia $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, con $k = 1, \ldots, n-1$.

- Si $H \neq 0$, tenemos igualdad en el Lema de Okumura y entonces Σ es una hipersuperficie isoparamétrica de la esfera con exactamente dos curvaturas principales distintas, de multiplicidades $(n-1)$ y 1.

- Si $H \neq 0$, tenemos igualdad en el Lema de Okumura y entonces Σ es una hipersuperficie isoparamétrica de la esfera con exactamente dos curvaturas principales distintas, de multiplicidades $(n-1)$ y 1.
- Pero entonces sabemos que Σ debe ser un toro de Clifford de CMC de la forma $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0 < r < 1$. Sólo falta identificar cuáles satisfacen la condición adicional $|\phi| = \alpha_H$.

- Si $H \neq 0$, tenemos igualdad en el Lema de Okumura y entonces Σ es una hipersuperficie isoparamétrica de la esfera con exactamente dos curvaturas principales distintas, de multiplicidades $(n-1)$ y 1.
- Pero entonces sabemos que Σ debe ser un toro de Clifford de CMC de la forma $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0 < r < 1$. Sólo falta identificar cuáles satisfacen la condición adicional $|\phi| = \alpha_H$.
- Cuando $n = 2$, un cálculo directo prueba que $|\phi|^2 = \alpha_H^2$ para todos ellos.

- Si $H \neq 0$, tenemos igualdad en el Lema de Okumura y entonces Σ es una hipersuperficie isoparamétrica de la esfera con exactamente dos curvaturas principales distintas, de multiplicidades $(n-1)$ y 1.
- Pero entonces sabemos que Σ debe ser un toro de Clifford de CMC de la forma $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $0 < r < 1$. Sólo falta identificar cuáles satisfacen la condición adicional $|\phi| = \alpha_H$.
- Cuando $n = 2$, un cálculo directo prueba que $|\phi|^2 = \alpha_H^2$ para todos ellos.
- Pero cuando $n \geqslant 3$ tenemos que

$$|\phi|^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left(\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)} - (n-2)|H| \right)^2 = \alpha_H^2$$

si $r < \sqrt{(n-1)/n}$ $(H \neq 0)$, y

$$|\phi|^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left(\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)} + (n-2)|H| \right)^2 > \alpha_H^2$$

si $r > \sqrt{(n-1)/n}$. Por tanto, debe ser $0 < r < \sqrt{(n-1)/n}$.

Esto es todo

Esto es todo

Muchas gracias por vuestra atención