

La ecuación de Liouville con singularidades en el borde

Asun Jiménez

Universidad de Granada

Seminario de Geometría

Trabajo conjunto con J. A. Gálvez y P. Mira

El problema de Liouville con singularidades

Interpretación geométrica

Estudiaremos la EDP

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v + 2Ke^v = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_1 e^{v/2} & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^2 \cap \{s > 0\} \equiv \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_2 e^{v/2} & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^2 \cap \{s < 0\} \equiv \mathbb{R}^-. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

El problema de Liouville con singularidades

Interpretación geométrica

Estudiaremos la EDP

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v + 2Ke^v = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_1 e^{v/2} & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^2 \cap \{s > 0\} \equiv \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_2 e^{v/2} & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^2 \cap \{s < 0\} \equiv \mathbb{R}^-. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

- Si v es una solución a la ec. de Liouville, entonces la métrica $ds^2 = e^v(dx^2 + dy^2)$ tiene curvatura constante K .

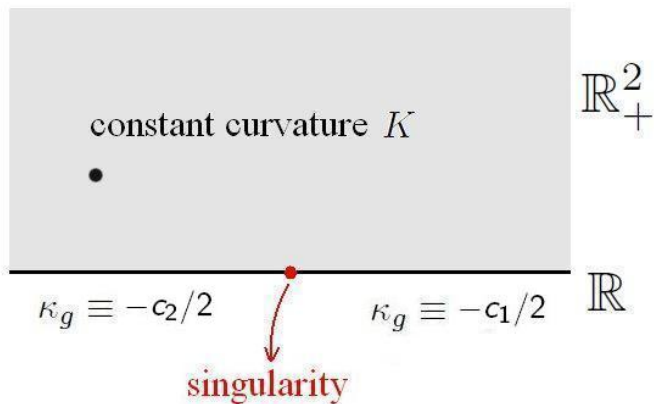
Estudiaremos la EDP

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v + 2Ke^v = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_1 e^{v/2} & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^2 \cap \{s > 0\} \equiv \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_2 e^{v/2} & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^2 \cap \{s < 0\} \equiv \mathbb{R}^-. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

- Si v es una solución a la ec. de Liouville, entonces la métrica $ds^2 = e^v(dx^2 + dy^2)$ tiene curvatura constante K .
- La condición de frontera $v_t = 2c_i e^{v/2}$, $i = 1, 2$ significa que ds^2 tiene **curvatura geodésica constante** $-c_i/2 \in \mathbb{R}$ respectivamente en $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_-$.

El problema de Liouville con singularidades

Interpretación geométrica



Teorema de Cartan

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo y (Ω, ds^2) tiene curvatura constante K , entonces existe una isometría local

$$g : (\Omega, ds^2) \rightarrow (\mathbb{M}^2(K), ds_K^2),$$

donde $(\mathbb{M}^2(K), ds_K^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+K|z|^2)^2})$ es el espacio modelo de curvatura K .

Teorema de Cartan

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo y (Ω, ds^2) tiene curvatura constante K , entonces existe una isometría local

$$g : (\Omega, ds^2) \rightarrow (\mathbb{M}^2(K), ds_K^2),$$

donde $(\mathbb{M}^2(K), ds_K^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+K|z|^2)^2})$ es el espacio modelo de curvatura K .

Si existiese dicha g , aún sin saber la solución v , sabemos que ha de ser una **aplicación conforme**.

Teorema de Cartan

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo y (Ω, ds^2) tiene curvatura constante K , entonces existe una isometría local

$$g : (\Omega, ds^2) \rightarrow (\mathbb{M}^2(K), ds_K^2),$$

donde $(\mathbb{M}^2(K), ds_K^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+K|z|^2)^2})$ es el espacio modelo de curvatura K .

Si existiese dicha g , aún sin saber la solución v , sabemos que ha de ser una **aplicación conforme**.

Por ser isometría, $ds^2 = g^*(ds_K^2)$, esto es,

$$e^v = \frac{4|g'|^2}{(1 + K|g|^2)^2}$$

La ecuación de Liouville

La aplicación desarrolladora g

Teorema de Cartan

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo y (Ω, ds^2) tiene curvatura constante K , entonces existe una isometría local

$$g : (\Omega, ds^2) \rightarrow (\mathbb{M}^2(K), ds_K^2),$$

donde $(\mathbb{M}^2(K), ds_K^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+K|z|^2)^2})$ es el espacio modelo de curvatura K .

Teorema de Liouville

Sea g una función meromorfa definida en Ω tal que $g' \neq 0$ (con $|g| < 1$ si $K = -1$, y holomorfa si $K = 0$). Entonces, la función v definida como:

$$v = \log \frac{4|g'|^2}{(1 + K|g|^2)^2},$$

es una solución a la ecuación de Liouville $\Delta v + 2Ke^v = 0$ en Ω .

Las métricas de **área finita** en $\Omega = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$:

- Para $K = 1$ vienen todas dadas por

$$ds^2 = \frac{4\lambda^2 |dz|^2}{(1 + \lambda^2 |z - x_0|^2)^2}, \quad \lambda > 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^2$$

g es una transformación de Möbius.

Las métricas de **área finita** en $\Omega = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$:

- Para $K = 1$ vienen todas dadas por

$$ds^2 = \frac{4\lambda^2 |dz|^2}{(1 + \lambda^2 |z - x_0|^2)^2}, \quad \lambda > 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^2$$

g es una transformación de Möbius.

- Si $K \leq 0$ no hay solución.

Algunos resultados previos

El problema con borde (sin singularidades)

Consideramos la EDP

$$\begin{cases} \Delta v + 2Ke^v = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = ce^{v/2} & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

Algunos resultados previos

El problema con borde (sin singularidades)

Consideramos la EDP

$$\begin{cases} \Delta v + 2Ke^v = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = ce^{v/2} & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

- Y.Y. Li, L. Zhang (2003), J. A. Gálvez y P. Mira (2009)
Caracterización para el caso de **área finita** de los dominios cuya frontera es una recta o una circunferencia menos un punto que admiten una métrica de curvatura $K = 0, 1, -1$.
 - Si $K = 0 \Rightarrow c < 0$.
 - Si $K = -1 \Rightarrow c < -2$.

Algunos resultados previos

El problema con borde (sin singularidades)

Consideramos la EDP

$$\begin{cases} \Delta v + 2Ke^v = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = ce^{v/2} & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

- Y.Y. Li, L. Zhang (2003), J. A. Gálvez y P. Mira (2009)
Caracterización para el caso de **área finita** de los dominios cuya frontera es una recta o una circunferencia menos un punto que admiten una métrica de curvatura $K = 0, 1, -1$.
 - Si $K = 0 \Rightarrow c < 0$.
 - Si $K = -1 \Rightarrow c < -2$.
- J. A. Gálvez y P. Mira (2009)
Clasificación de todas las soluciones sin imponer área finita.

Algunos resultados previos

El problema con singularidades de tipo cónico

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio con borde, y v una solución de la ecuación de Liouville tal que, para un $z_0 \in \partial\Omega$, el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} e^v |z - z_0|^{-2\alpha}$$

existe y es distinto de cero para un $\alpha > -1$. Decimos entonces que v tiene una singularidad de tipo **cónico** en el borde y $\theta = \pi(\alpha + 1)$ es el **ángulo cónico**.

Algunos resultados previos

El problema con singularidades de tipo cónico

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio con borde, y v una solución de la ecuación de Liouville tal que, para un $z_0 \in \partial\Omega$, el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} e^v |z - z_0|^{-2\alpha}$$

existe y es distinto de cero para un $\alpha > -1$. Decimos entonces que v tiene una singularidad de tipo **cónico** en el borde y $\theta = \pi(\alpha + 1)$ es el **ángulo cónico**.

- J. Jost, G. Wang, C. Zhou (2009), para el caso $K = 1$, resuelven el problema **(P)** ($\Omega = \mathbb{R}_+^2$) cuando las singularidades son de tipo cónico y el área del dominio y la longitud del borde son finitas, esto es

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^v |dz| < \infty, \quad \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{v/2} |dz| < \infty.$$

(I) Resolver el problema (P) sin hipótesis adicionales.

(I) Resolver el problema (P) sin hipótesis adicionales.

(II) Resolver el problema (P) con área finita y obtener como corolario las soluciones dadas por Jost, Wan y Zhou sin imponer que la singularidad sea cónica en el borde, ni la condición

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{v/2} |dz| < \infty.$$

El método de la aplicación recubridora

Las condiciones de frontera nos llevan a que $\operatorname{Im}(Q)=0$ en $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde

$$Q = v_{zz} - \frac{1}{2}v_z^2 = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 =: \{g, z\}.$$

Por tanto, Q puede extenderse de manera holomorfa a $\mathbb{C}^*$.

El método de la aplicación recubridora

Las condiciones de frontera nos llevan a que $\operatorname{Im}(Q)=0$ en $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde

$$Q = v_{zz} - \frac{1}{2}v_z^2 = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 =: \{g, z\}.$$

Por tanto, Q puede extenderse de manera holomorfa a $\mathbb{C}^*$. Además, ya que $\{g, z\} = Q$, g se extiende como una función meromorfa **multivaluada** en $\mathbb{C}^*$.

De hecho,

$$\tilde{g}(w) := g(e^w)$$

puede ser definida como una función univaluada localmente inyectiva, no solo en la banda $\{w : 0 \leq \operatorname{Im} w \leq \pi\}$, sino en $\mathbb{C}$.

El método de la aplicación recubridora

Las condiciones de frontera nos llevan a que $\text{Im}(Q)=0$ en $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde

$$Q = v_{zz} - \frac{1}{2}v_z^2 = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 =: \{g, z\}.$$

Por tanto, Q puede extenderse de manera holomorfa a $\mathbb{C}^*$. Además, ya que $\{g, z\} = Q$, g se extiende como una función meromorfa multivaluada en $\mathbb{C}^*$.

De hecho,

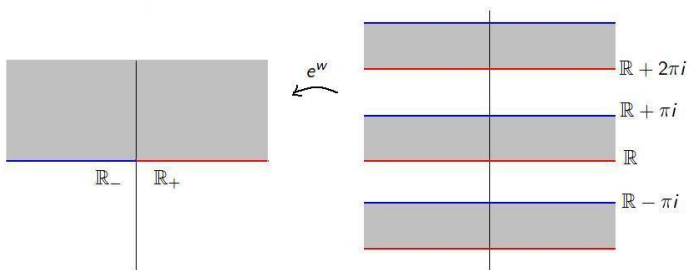
$$\tilde{g}(w) := g(e^w)$$

puede ser definida como una función univaluada localmente inyectiva, no solo en la banda $\{w : 0 \leq \text{Im} w \leq \pi\}$, sino en $\mathbb{C}$. Puesto que las soluciones de $\tilde{Q} = \{\tilde{g}, w\}$ en dominios simplemente conexos son únicas salvo transformación de Möbius, existe una transformación de Möbius $\mathcal{M}$ tal que

$$\tilde{g}(w + 2\pi i) = \mathcal{M}(\tilde{g}(w)).$$

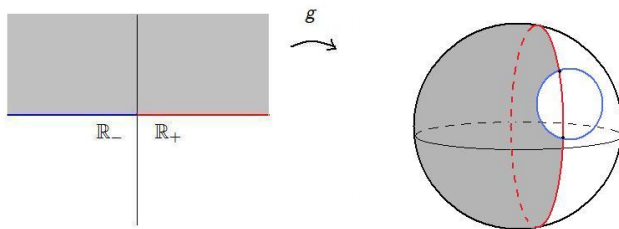
El método de la aplicación recubridora

Clasificación en términos de la frontera



El método de la aplicación recubridora

Clasificación en términos de la frontera



Sabemos que $\tilde{g}(w)$ cae en un círculo $\mathcal{C}_1$ para $w \in \mathbb{R}$, y $\tilde{g}(w)$ cae en otro círculo $\mathcal{C}_2$ para $w \in \mathbb{R} + i\pi$.

Estudiaremos el comportamiento de g en términos de la posición relativa de ambos círculos.

Clasificación en términos de la frontera

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$

Clasificación en términos de la frontera

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \varphi(\mathcal{C}_2)$$

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \varphi(\mathcal{C}_2)$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = e^{i\theta_0} \tilde{G}(w), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi)$$

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \varphi(\mathcal{C}_2)$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = e^{i\theta_0} \tilde{G}(w), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi)$$

- La función $H(w) = e^{-\frac{\theta_0}{2\pi} w} \tilde{G}(w)$ cumple $H(w + 2\pi i) = H(w)$
 $\Rightarrow H(w) = F(e^w)$

1 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ es otra recta vectorial junto con el punto $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \varphi(\mathcal{C}_2)$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = e^{i\theta_0} \tilde{G}(w), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi)$$

- La función $H(w) = e^{-\frac{\theta_0}{2\pi} w} \tilde{G}(w)$ cumple $H(w + 2\pi i) = H(w)$
 $\Rightarrow H(w) = F(e^w)$
- $\tilde{G}(w) = e^{\gamma w} F(e^w)$ con $\overline{F(\overline{z})} = F(z)$

$\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en dos puntos o ambas coinciden.

Entonces $g(z) = \psi(z^\gamma F(z))$ con $\gamma \in [0, 1)$ y $F : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa tales que $F(r) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para todo $r \in \mathbb{R}^*$, y ψ una transformación de Möbius.

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$$

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = \tilde{G}(w) + 2\pi i.$$

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = \tilde{G}(w) + 2\pi i.$$

- La función $H(w) = \tilde{G}(w) - w$ cumple $H(w + 2\pi i) = H(w)$
 $\Rightarrow H(w) = F(e^w)$

2 $\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\varphi(\mathcal{C}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \overline{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi(\overline{\tilde{G}(r + \pi i)})$

$$\Rightarrow w = \Psi(\overline{w}), \quad \forall w \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z = \pi\} \cup \{\infty\}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = \tilde{G}(w) + 2\pi i.$$

- La función $H(w) = \tilde{G}(w) - w$ cumple $H(w + 2\pi i) = H(w)$
 $\Rightarrow H(w) = F(e^w)$
- $\tilde{G}(w) = F(e^w) + w$ con $\overline{F(\overline{z})} = F(z)$

$\mathcal{C}_1$ interseca $\mathcal{C}_2$ en un único punto.

Entonces $g(z) = \psi(F(z) + \log(z))$ con $F : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa tal que $F(r) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para todo $r \in \mathbb{R}^*$, y ψ una transformación de Möbius.

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \frac{1}{\overline{\tilde{G}(\overline{w})}}$

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \frac{1}{\overline{\tilde{G}(\overline{w})}}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi\left(\frac{1}{\overline{\tilde{G}(r + \pi i)}}\right)$

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.
Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \frac{1}{\overline{\tilde{G}(\overline{w})}}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi\left(\frac{1}{\overline{\tilde{G}(r + \pi i)}}\right)$

$$\Rightarrow w = \Psi\left(\frac{1}{\overline{w}}\right), \quad \text{si } |w| = R$$

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \frac{1}{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi\left(\frac{1}{\tilde{G}(r + \pi i)}\right)$

$$\Rightarrow w = \Psi\left(\frac{1}{\tilde{G}(w)}\right), \quad \text{si } |w| = R$$

$$\Psi\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right) = Re^{i\theta} \quad \forall \theta \Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = 2R\tilde{G}(w).$$

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \frac{1}{\tilde{G}(\overline{w})}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi\left(\frac{1}{\tilde{G}(r + \pi i)}\right)$

$$\Rightarrow w = \Psi\left(\frac{1}{\tilde{G}(w)}\right), \quad \text{si } |w| = R$$

$$\Psi\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right) = Re^{i\theta} \quad \forall \theta \Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = 2R\tilde{G}(w).$$

- La función $H(w) = e^{-\frac{\log(2R)}{2\pi i}w} \tilde{G}(w)$ cumple
 $H(w + 2\pi i) = H(w) \Rightarrow H(w) = F(e^w)$

2 $\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

- Consideramos una transformación de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ y $\varphi(\mathcal{C}_2)$ son respectivamente los círculos de radio 1 y $R > 1$.

Las nuevas funciones $G = \varphi \circ g$ y $\tilde{G} = \varphi \circ \tilde{g}$ cumplen

$$\tilde{G}(w) = G(e^w) \quad \tilde{G}(w + 2\pi i) = \Psi(\tilde{G}(w))$$

para una cierta transformación de Möbius Ψ .

- La condición de frontera en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \tilde{G}(w) = \frac{1}{\overline{\tilde{G}(\overline{w})}}$
- $\tilde{G}(r + \pi i) = \Psi(\tilde{G}(r - \pi i)) = \Psi\left(\frac{1}{\overline{\tilde{G}(r + \pi i)}}\right)$

$$\Rightarrow w = \Psi\left(\frac{1}{\overline{w}}\right), \quad \text{si } |w| = R$$

$$\Psi\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right) = Re^{i\theta} \quad \forall \theta \Rightarrow \tilde{G}(w + 2\pi i) = 2R\tilde{G}(w).$$

- La función $H(w) = e^{-\frac{\log(2R)}{2\pi i}w} \tilde{G}(w)$ cumple
 $H(w + 2\pi i) = H(w) \Rightarrow H(w) = F(e^w)$
- $\tilde{G}(w) = e^{i\gamma w} F(e^w)$ con $\overline{F(\overline{z})}F(z) = 1$

$\mathcal{C}_1$ no interseca $\mathcal{C}_2$.

Entonces $g(z) = \psi(F(z)z^{i\gamma})$ con $\gamma < 0$ y $F : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa tal que $|F(r)| = 1$ para todo $r \in \mathbb{R}^*$, y ψ una transformación de Möbius.

Teorema

Sea v una solución al problema (P) . Entonces existe una función meromorfa $F : \mathbb{C}^* \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que v puede calcularse como

$$v = \log \frac{4|g'|^2}{(1 + K|g|^2)^2} \quad (L)$$

para una función meromorfa localmente inyectiva g dada por una de las siguientes expresiones

- $g(z) = \psi(z^\gamma F(z))$ con $\gamma \in [0, 1)$ y $F(r) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para todo $r \in \mathbb{R}^*$,
- $g(z) = \psi(F(z) + \log(z))$ con $F(r) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para todo $r \in \mathbb{R}^*$,
- $g(z) = \psi(z^{i\gamma} F(z))$ con $\gamma < 0$ and $|F(r)| = 1$ para todo $r \in \mathbb{R}^*$.

Aquí ψ es una transformación de Möbius, g cumple que $|g| < 1$ si $K = -1$ y g es holomorfa si $K = 0$. (Y recíprocamente).

El caso de área finita

Sea v una solución de (P) para $K = K_0 = 0, -1$ tal que en un entorno de cero, $\int e^v |dz| < \infty$ y g la aplicación desarrolladora asociada.

Sea v una solución de (P) para $K = K_0 = 0, -1$ tal que en un entorno de cero, $\int e^v |dz| < \infty$ y g la aplicación desarrolladora asociada.

Entonces la función v_1 determinada por (L) para $K = 1$ cumple

$$\int e^{v_1} |dz| = \int \frac{4|g'|^2 |dz|}{(1 + |g|^2)^2} \leq \int \frac{4|g'|^2 |dz|}{(1 + K_0 |g|^2)^2} = \int e^v |dz| < \infty$$

Sea v una solución de (P) para $K = K_0 = 0, -1$ tal que en un entorno de cero, $\int e^v |dz| < \infty$ y g la aplicación desarrolladora asociada.

Entonces la función v_1 determinada por (L) para $K = 1$ cumple

$$\int e^{v_1} |dz| = \int \frac{4|g'|^2 |dz|}{(1 + |g|^2)^2} \leq \int \frac{4|g'|^2 |dz|}{(1 + K_0 |g|^2)^2} = \int e^v |dz| < \infty$$

Propiedades que cumple g cerca del origen en el caso de área finita para $K = 1$

$\Rightarrow$ Propiedades que cumple g cerca del origen en el caso de área finita para $K = 0, -1$.

Puesto que la transformación de Möbius ψ que aparece en el Teorema de Clasificación es un **difeomorfismo global de la esfera de Riemann compacta** $\overline{\mathbb{C}}$, si ds^2 es la métrica de Riemann usual en $\overline{\mathbb{C}}$,

Puesto que la transformación de Möbius ψ que aparece en el Teorema de Clasificación es un **difeomorfismo global de la esfera de Riemann compacta** $\overline{\mathbb{C}}$, si ds^2 es la métrica de Riemann usual en $\overline{\mathbb{C}}$, entonces

$$\frac{1}{r} ds^2 \leq \psi^*(ds^2) \leq r ds^2$$

para una constante real $r \geq 1$.

$\Rightarrow$ no nos preocupamos por ψ en la expresión de g .

Área finita localmente $\Rightarrow g$ puede extenderse al origen.

Área finita localmente $\Rightarrow g$ puede extenderse al origen.

- La longitud de los semicírculos

$$C_r = \{z : |z| = r, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

en la métrica $e^v |dz|^2$ de curvatura $K = 1$ tiende a cero cuando r tiende a cero. (*)

(*) Teoremas sobre familias normales de funciones de Marty y Montel.

Área finita localmente $\Rightarrow g$ puede extenderse al origen.

- La longitud de los semicírculos

$$C_r = \{z : |z| = r, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

en la métrica $e^v|dz|^2$ de curvatura $K = 1$ tiende a cero cuando r tiende a cero. (*)

- El caso (iii) en el Teorema de Clasificación queda descartado.

(*) Teoremas sobre familias normales de funciones de Marty y Montel.

Área finita localmente $\Rightarrow g$ puede extenderse al origen.

- La longitud de los semicírculos

$$C_r = \{z : |z| = r, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

en la métrica $e^v |dz|^2$ de curvatura $K = 1$ tiende a cero cuando r tiende a cero. (*)

- El caso (iii) en el Teorema de Clasificación queda descartado.
- En los casos (i) y (ii) del Teorema de Clasificación tenemos que $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = p_0$, siendo p_0 un punto de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

(*) Teoremas sobre familias normales de funciones de Marty y Montel.

Teorema

Sea v una solución de (P) con área finita alrededor del origen, esto es, con

$$\int e^v |dz| < \infty$$

en un entorno del origen en $\overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus \{0\}$.

Teorema

Sea v una solución de (P) con área finita alrededor del origen, esto es, con

$$\int e^v |dz| < \infty$$

en un entorno del origen en $\overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus \{0\}$.

Entonces g viene dada por los casos (i) o (ii) en el Teorema de Clasificación, donde F no tiene una singularidad esencial en el origen. Además, la función meromorfa g puede extenderse al origen. En particular, la derivada Schwarziana Q tiene a lo sumo un polo de orden dos en el origen.

Área finita globalmente

La función meromorfa $h(w) = g(z)$ con $z = -\frac{1}{w}$ es también la aplicación desarrolladora de una solución $\hat{v}$ al problema (P) .

Puesto que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{\hat{v}} |dz| = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^v |dz| < \infty,$$

$\Rightarrow \hat{Q}(w)$ tiene a lo sumo un polo de orden dos en el origen.

Área finita globalmente

La función meromorfa $h(w) = g(z)$ con $z = -\frac{1}{w}$ es también la aplicación desarrolladora de una solución $\hat{v}$ al problema (P).

Puesto que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{\hat{v}} |dz| = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^v |dz| < \infty,$$

$\Rightarrow \hat{Q}(w)$ tiene a lo sumo un polo de orden dos en el origen.

Usando la igualdad $w^4 \hat{Q}(w) = Q(z)$ deducimos que $Q(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ con a lo sumo un polo de orden dos en el origen y un cero de orden al menos dos en infinito.

Área finita globalmente

La función meromorfa $h(w) = g(z)$ con $z = -\frac{1}{w}$ es también la aplicación desarrolladora de una solución $\hat{v}$ al problema (P).

Puesto que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{\hat{v}} |dz| = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^v |dz| < \infty,$$

$\Rightarrow \hat{Q}(w)$ tiene a lo sumo un polo de orden dos en el origen.

Usando la igualdad $w^4 \hat{Q}(w) = Q(z)$ deducimos que $Q(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ con a lo sumo un polo de orden dos en el origen y un cero de orden al menos dos en infinito.

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{c}{z^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soluciones de $\{g, z\} = Q(z)$:

- $g(z) = \psi(z^\gamma)$
- $g(z) = \psi(\log z)$

Área finita globalmente

La función meromorfa $h(w) = g(z)$ con $z = -\frac{1}{w}$ es también la aplicación desarrolladora de una solución $\hat{v}$ al problema (P).

Puesto que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{\hat{v}} |dz| = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^v |dz| < \infty,$$

$\Rightarrow \hat{Q}(w)$ tiene a lo sumo un polo de orden dos en el origen.

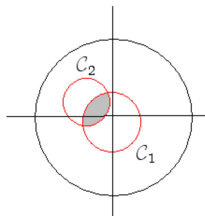
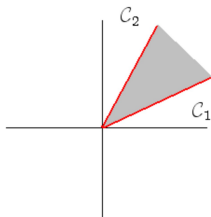
Usando la igualdad $w^4 \hat{Q}(w) = Q(z)$ deducimos que $Q(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ con a lo sumo un polo de orden dos en el origen y un cero de orden al menos dos en infinito.

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{c}{z^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soluciones de $\{g, z\} = Q(z)$:

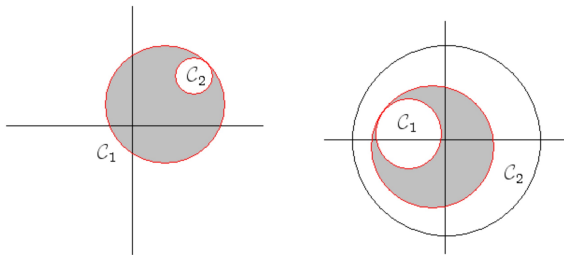
- $g(z) = \psi(z^\gamma), \gamma > 0$
- $g(z) = \psi(\log z)$

Nota: Si $K = 0$ ó $K = -1$, g es un **difeomorfismo conforme de $\overline{\mathbb{R}^2_+} \cup \{\infty\}$ en un dominio compacto** respectivamente en $\mathbb{C}$ o en el disco unidad, acotada por un par de arcos de circunferencia que se intersecan en dos puntos o en un único punto.



Singularidad cónica en el borde

Nota: Si $K = 0$ ó $K = -1$, g es un **difeomorfismo conforme de $\overline{\mathbb{R}^2_+} \cup \{\infty\}$ en un dominio compacto** respectivamente en $\mathbb{C}$ o en el disco unidad, acotada por un par de arcos de circunferencia que se intersecan en dos puntos o en un único punto.



Singularidad no cónica en el borde

Teorema

Sea v una solución de (P) con área finita. Entonces existen $\gamma, \lambda > 0$ y $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$ tales que, o bien,

$$(i) \quad v = \log \frac{4\lambda^2 \gamma^2 |z|^{2(\gamma-1)}}{(K\lambda^2 + |z^\gamma - z_0|^2)^2} |dz|^2,$$

con $K\lambda^2 + |z^\gamma - z_0|^2 \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$, o

Teorema

Sea v una solución de (P) con área finita. Entonces existen $\gamma, \lambda > 0$ y $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$ tales que, o bien,

$$(i) \quad v = \log \frac{4\lambda^2 \gamma^2 |z|^{2(\gamma-1)}}{(K\lambda^2 + |z^\gamma - z_0|^2)^2} |dz|^2,$$

con $K\lambda^2 + |z^\gamma - z_0|^2 \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$, o

$$(ii) \quad v = \log \frac{4\lambda^2}{|z|^2 (K\lambda^2 + |\log(z) - z_0|^2)^2} |dz|^2,$$

con $K\lambda^2 + |\log(z) - z_0|^2 \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Teorema

Sea v una solución de (P) con área finita. Entonces existen $\gamma, \lambda > 0$ y $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$ tales que, o bien,

$$(i) \quad v = \log \frac{4\lambda^2 \gamma^2 |z|^{2(\gamma-1)}}{(K\lambda^2 + |z^\gamma - z_0|^2)^2} |dz|^2,$$

con $K\lambda^2 + |z^\gamma - z_0|^2 \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$, o

$$(ii) \quad v = \log \frac{4\lambda^2}{|z|^2 (K\lambda^2 + |\log(z) - z_0|^2)^2} |dz|^2,$$

con $K\lambda^2 + |\log(z) - z_0|^2 \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Además, los valores de c_i , $i = 1, 2$ son:

- Caso (i): $c_1 = 2\frac{r_0}{\lambda} \sin(\theta_0)$ $c_2 = -2\frac{r_0}{\lambda} \sin(\theta_0 - \pi\gamma)$
- Caso (ii): $c_1 = 2\frac{r_0}{\lambda} \operatorname{Im} z_0$ $c_2 = 2\frac{r_0}{\lambda} (\pi - \operatorname{Im} z_0)$

Corolario

Dados $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existe solución a (P) con área finita si y sólo si:

- $K = 1$ y c_1 y c_2 son arbitrarios.

Corolario

Dados $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existe solución a (P) con área finita si y sólo si:

- $K = 1$ y c_1 y c_2 son arbitrarios.
- $K = 0$ y al menos uno de los c_i , $i = 1, 2$ es estrictamente negativo.

Corolario

Dados $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existe solución a (P) con área finita si y sólo si:

- $K = 1$ y c_1 y c_2 son arbitrarios.
- $K = 0$ y al menos uno de los c_i , $i = 1, 2$ es estrictamente negativo.
- $K = -1$ y uno de los c_i , $i = 1, 2$ es tal que $c_i \in (-\infty, -2)$ o bien si $c_i \leq 0$, y c_j , $j \neq i$, es tal que $c_j \leq |c_i|$.

¡Gracias!