Sobre la geometría del espacio de subconjuntos compactos en formas espaciales riemannianas

Didier A. Solís gamboa

U. Autónoma de Yucatán (México)

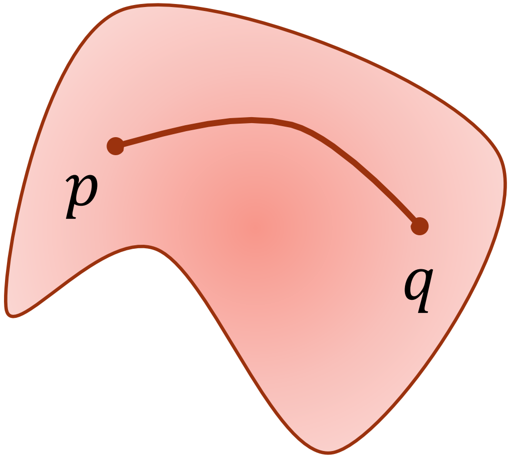
(conjunto con W. Barrera L. Montes y M. Navarro)

I. Motivación

Variedades riemannianas como espacios métricos

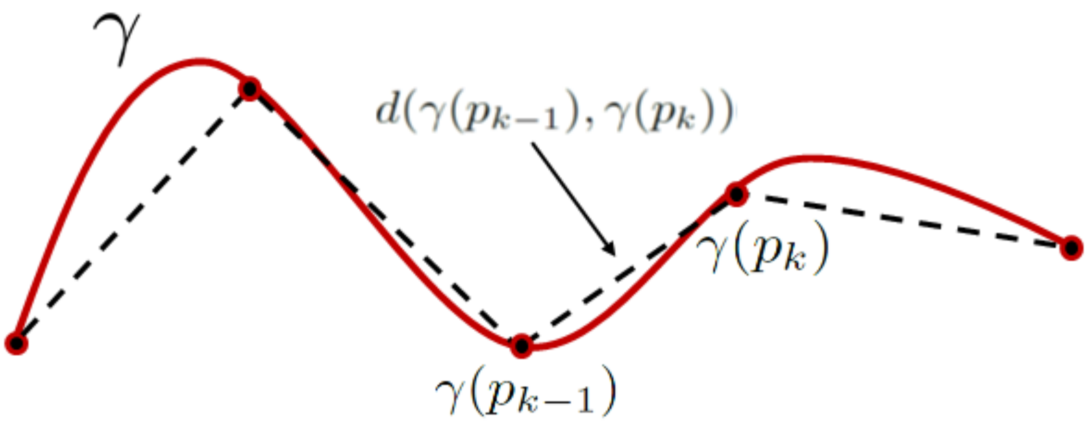
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt$$

$$d_L(p, q) = \text{ínf}\{L(\gamma) : \gamma \in \Omega(p, q)\}$$



Es posible construir una métrica d_L a partir de una estructura de longitud L.

Y viceversa ...



$$S(P,\gamma,d)=\sum_{k=1}^{N} d(\gamma(p_{k-1}),\gamma(p_k))$$

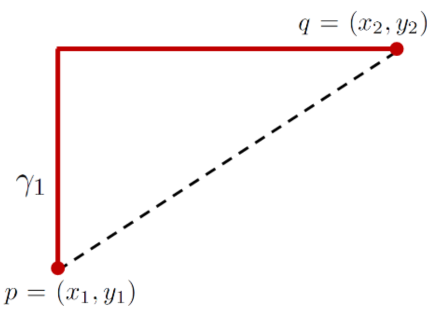
$$L_d(\gamma) = \sup\{S(P,\gamma,d) : P \text{ es una partición del intervalo } [a,b]\}$$

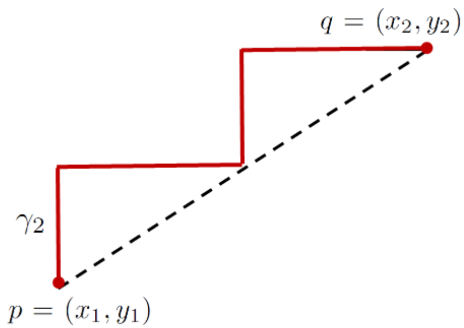
Es posible construir una estructura de longitud L_d a partir de una métrica d.

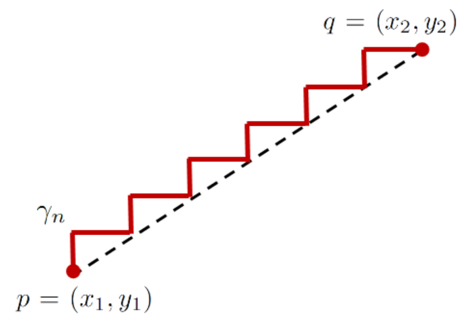
Observaciones:

$$L_d(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$$

L_d es semicontinua por abajo respecto a la convergencia uniforme.







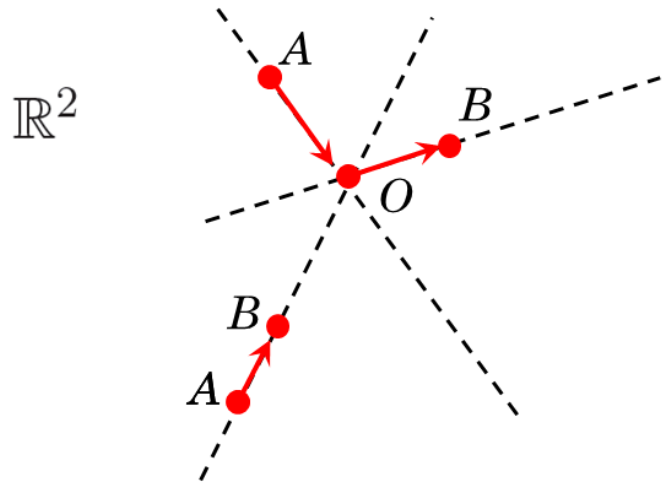
$$L_d(\gamma) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \qquad d(p,q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Notación: $\hat{d} = d_{L_d}$

Ejemplo:

$$d(u,v) = \big||u| - |v|\big| + \text{mín}\{|u|,|v|\} \cdot \sqrt{\measuredangle(u,v)}$$

$$\hat{d}(u,v) = \begin{cases} ||u| - |v|| & \measuredangle(u,v) = 0 \\ |u| + |v| & \measuredangle(u,v) \neq 0 \end{cases}$$



Propiedades:

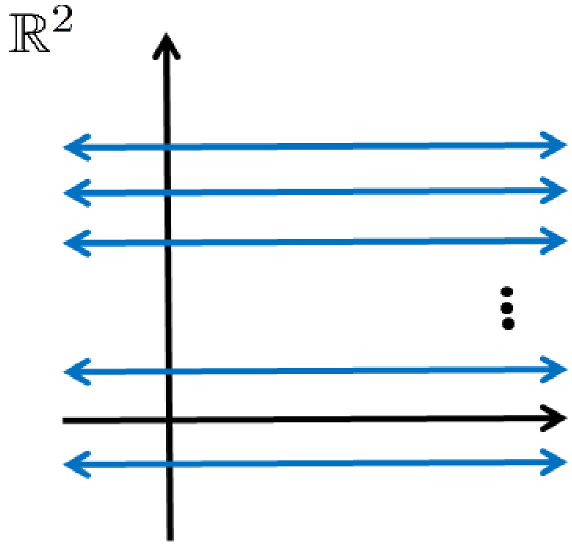
$$\hat{d} \geq d$$

$$L_{\hat{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$$

$$\hat{\hat{d}} = \hat{d}$$

Ejemplo:

$$d(p,q) = |x_1 - x_2| + \sqrt{|y_1 - y_2|}$$



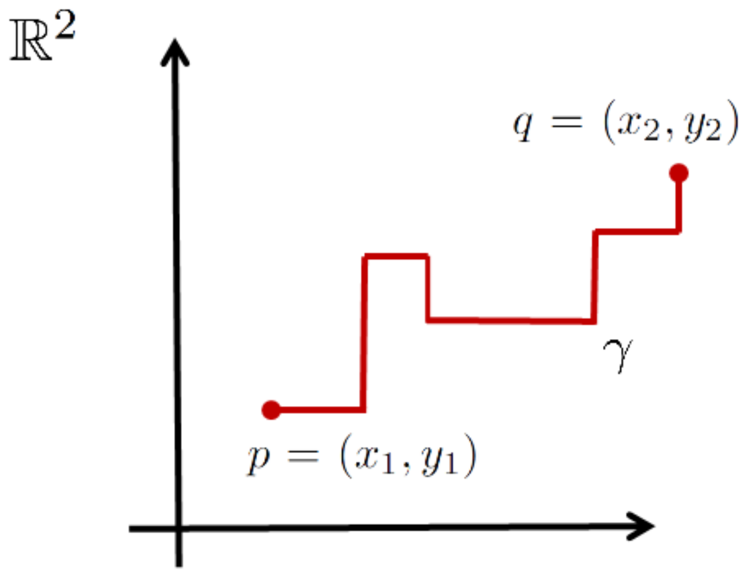
II. Espacios de caminos

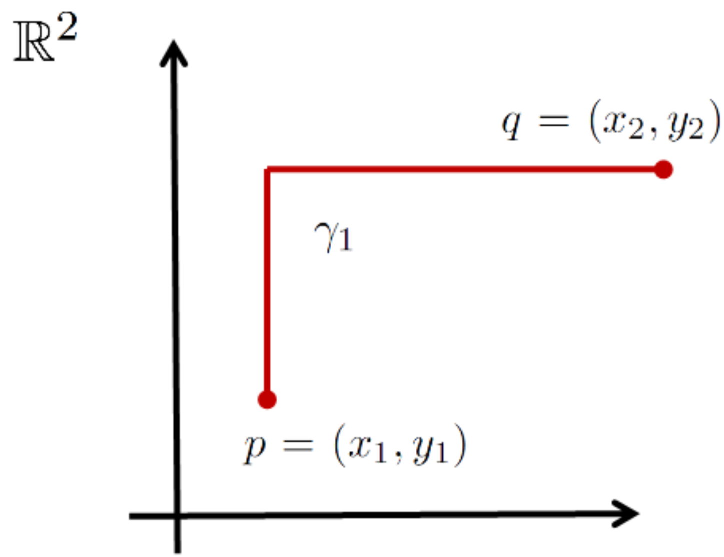
Definición: se dice que un espacio métrico (X, d) es *de caminos* (*de longitud, intrínseco*) si $d = \hat{d}$.

Definición: se dice que un espacio métrico (X, d) de caminos es *geodésico* si para todo p, q en X existe un camino γ tal que $d(p, q) = L(\gamma)$.

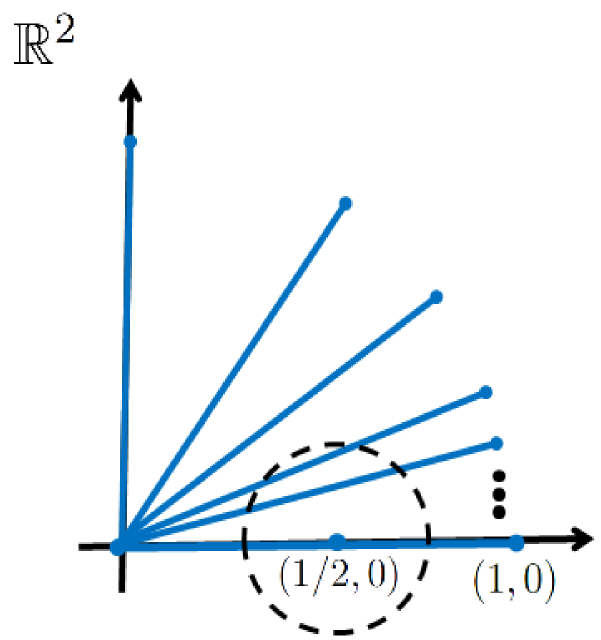
Ejemplo:

$$d(p,q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



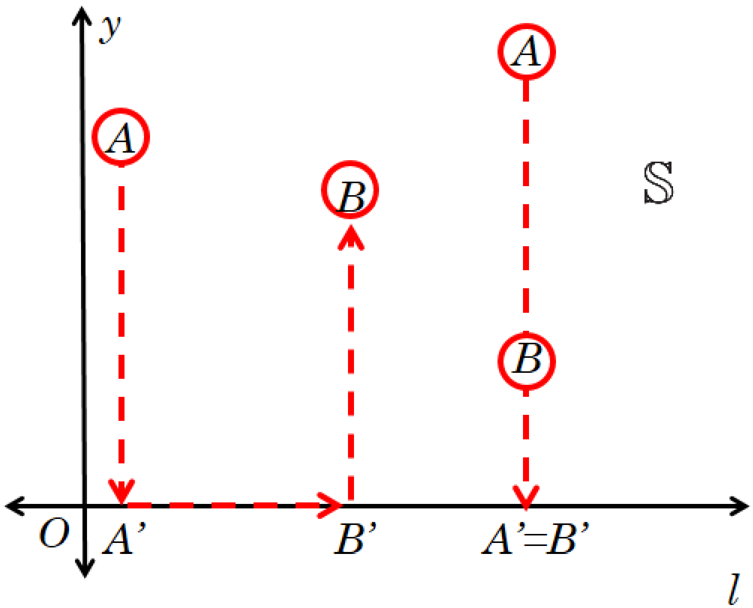


Proposición: un espacio métrico (X, d) de caminos es localmente conexo por caminos.



Proposición: un espacio métrico (X, d) completo es de caminos (geodésico) si y solo si existen ε-puntos medios (puntos medios)

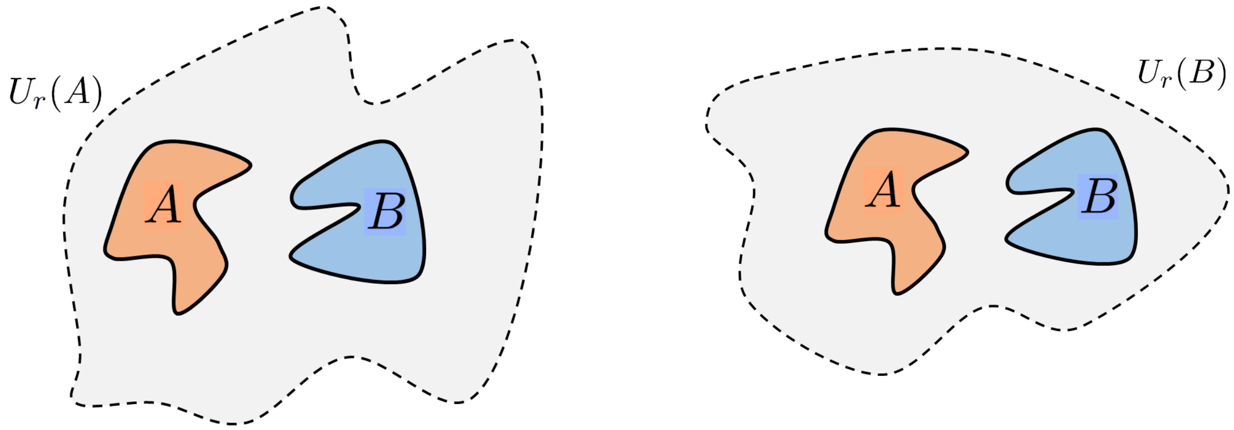
$$d(p,q) = \begin{cases} y_1 + y_2 + |x_1 - x_2| & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2| & \text{si } y_1 = y_2 \end{cases}$$



III. Distancia de Hausdorff

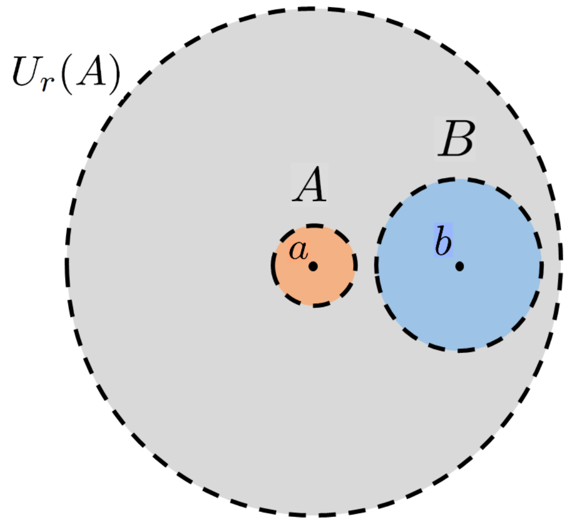
$$A \subset X \text{ y } r > 0, \qquad U_r(A) = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < r\}$$

$$d_H(A, B) = \text{ínf}\{r : U_r(A) \subset B, U_r(B) \subset A\}$$



Ejemplos:

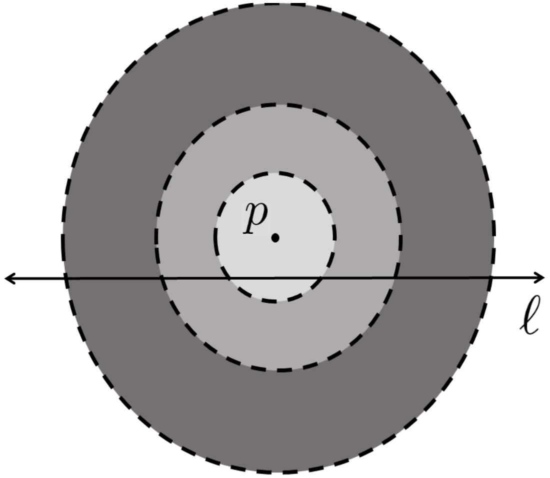
$$d_H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$$



$$A = B_{r_a}(a) \qquad B = B_{r_b}(b)$$

$$d_H(A, B) = d_{\mathbb{R}^2}(a, b) + |r_a - r_b|$$

$$d_H(\{p\}, \ell) = \infty$$



Proposición: d_H es una métrica en el espacio de los subconjuntos cerrados de X. Además

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} \operatorname{dist}(a,B), \sup_{b\in B} \operatorname{dist}(b,A)\right\}$$

Teorema (Hahn, Blashke): si el espacio métrico (X,d) es completo, entonces el espacio de subconjuntos cerrados (compactos) es completo con la métrica d_H.

IV. El espacio de subconjuntos compactos

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \{K \subset \mathbb{R} : K \text{ compacto}\}$$

Proposición (BMN-): el espacio métrico $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), d_H)$ es estrellado.

$$\alpha(t) = \frac{t}{C}K = \left\{\frac{tk}{C} : k \in K\right\} \qquad C = \sup_{k \in K} |k|.$$

Proposición (BMN-): el espacio métrico $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), d_H)$ es geodésicamente conexo.

$$\alpha(t) = \overline{U}_t(A) \cap \overline{U}_{r-t}(B) \qquad r = d_H(A, B) > 0$$

Corolario: el espacio métrico $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), d_H)$ es geodésico

IDEA: comparar el espacio métrico $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), d_H)$ con un subespacio “mesurable”

$$\Sigma_s(\mathbb{R}) = \{[x-s, x+s] : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\Sigma_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$$d_H([x-s, x+s], [y-s, y+s]) = |x-y|$$

$$(\Sigma_s(\mathbb{R}), d_H) \underset{\text{iso}}{\cong} (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$\Sigma(\mathbb{R}) = \bigcup_{s\geq 0} \Sigma_s(\mathbb{R})$$

$$d_H([x-t,x+t],[y-s,y+s]) = |x-y| + |s-t|$$

Proposición (BMN-): $(\Sigma(\mathbb{R}), d_H) \underset{\text{iso}}{\cong} (\mathbb{R}^2_{\geq 0}, d_T)$ donde

$$\mathbb{R}^2_{\geq 0} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$$

$$d_T((x,t),(y,s)) = |x-y| + |s-t|$$

Generalizando: Sea (X, d) un espacio métrico completo, geodésico y localmente compacto.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X) &= \{K : K \text{ es compacto}\} \\ \Sigma(X) &= \{\overline{B}_r(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

Proposición (BMN-): el espacio métrico $(\mathcal{H}(X), d_H)$ es geodésicamente conexo.

Corolario: el espacio métrico $(\mathcal{H}(X), d_H)$ es geodésico

$$(X \times \mathbb{R}_{\geq 0}, d_T)$$

$$d_T((x,t),(y,s)) = d(x,y) + |t - s|$$

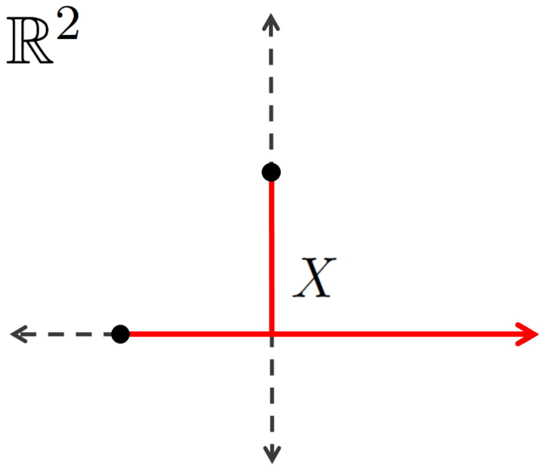
$$f : X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \Sigma(X)$$
$$f(x,t) = \overline{B}_t(x)$$

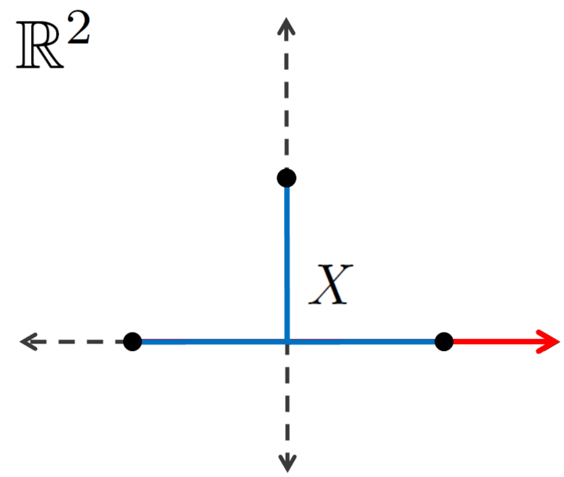
Proposición (BMN-): f es 1-Lipschitz y suprayectiva.

Ejemplo:

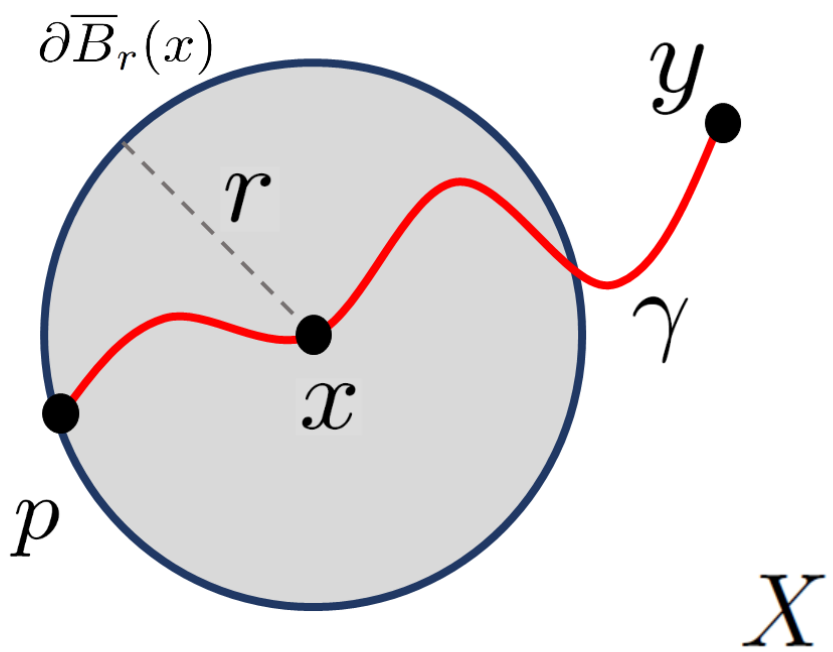
$$X = \{(a,0) : a \in [-1,\infty)\} \cup \{(0,b) : b \in [0,1]\}$$

$$\overline{B}_2(-1,0) = \overline{B}_2(0,1)$$





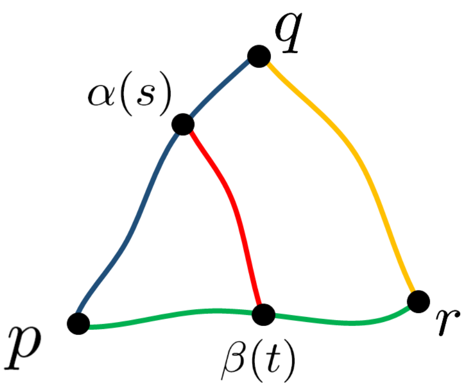
Definición: el espacio métrico (X, d) satisface la propiedad de *entrada y salida* si para cualquier pareja de puntos $x, y \in X$ y $r > 0$ existe una única geodésica γ y un único punto $p \in \partial\bar{B}_r(x)$ tales que $\gamma(0) = y, \gamma(L) = x$ $\gamma(L + r) = p$ donde $L = d(x, y)$.

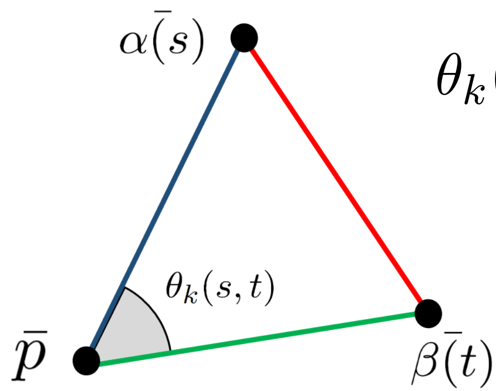


Teorema (BMN-): f es una isometría si y solo si (X,d) satisface la propiedad de entrada y salida.

Corolario: $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ y $\Sigma(\mathbb{H}^n)$ son isométricos a un espacio métrico del taxi.

V. Espacios de curvatura





$$\theta_k(s,t) = \widetilde{\measuredangle}_k \alpha(s) p \beta(t)$$

Definición: espacio métrico de caminos (X, d) tiene *curvatura acotada por abajo por* k , denotado $\mathrm{Curv}(X) \geq k$ si en cada punto $p \in X$ la función $\theta_k(s,t)$ es monótona no creciente.

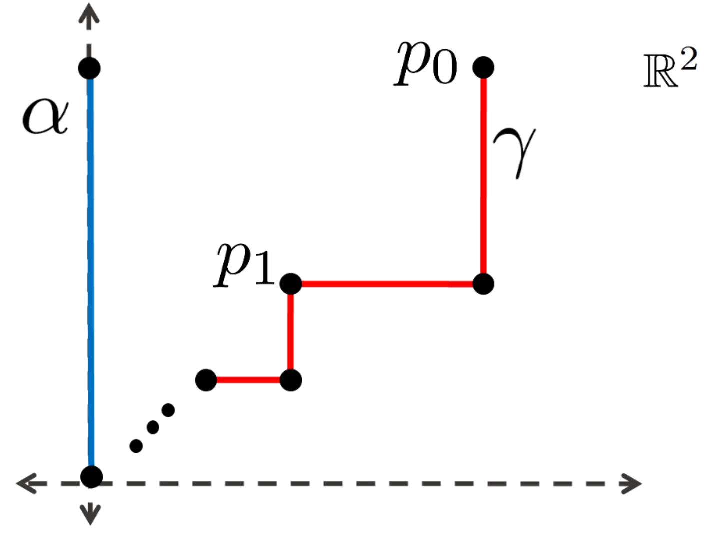
Definición: sea (X, d) un espacio métrico de caminos con $\mathrm{Curv}(X) \geq k$. Se define el ángulo entre las geodésicas α y β como

$$\measuredangle(\alpha, \beta) = \lim_{s,t \to 0} \theta_k(s, t)$$

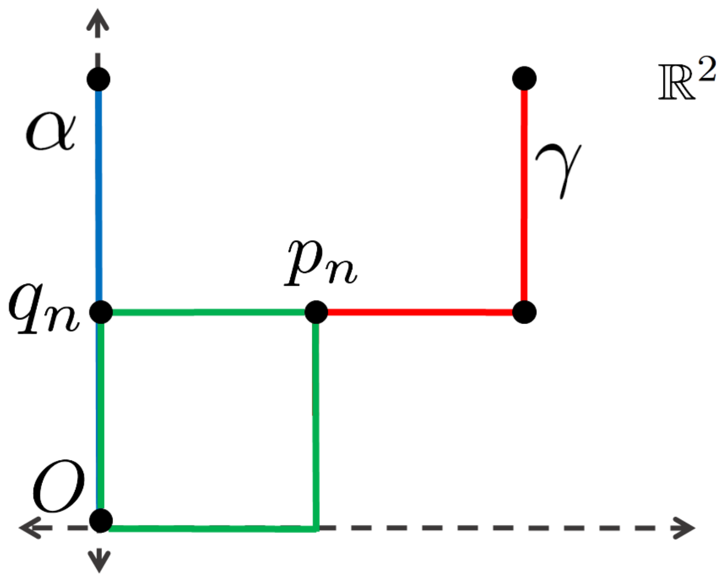
Proposición: sea (X, d) un espacio métrico de caminos con $\mathrm{Curv}(X) \geq k$. Entonces

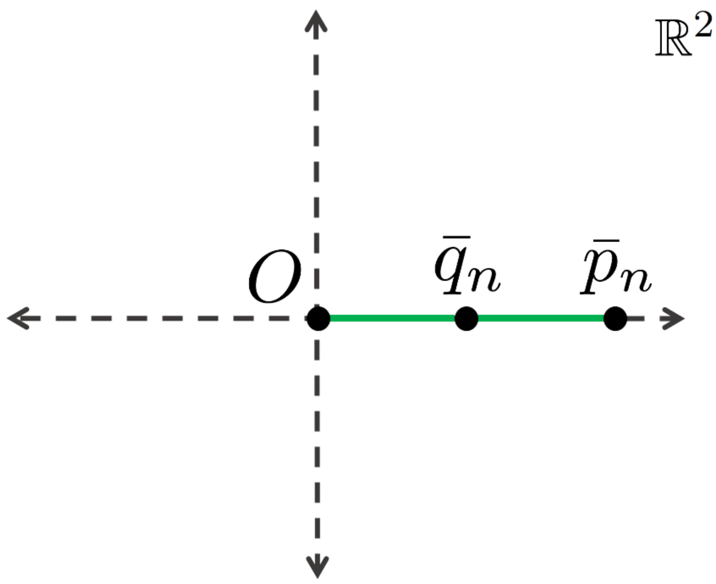
$$\lim_{s,t \to 0} \theta_k(s, t) = \lim_{s,t \to 0} \theta_0(s, t)$$

Proposición: $(\mathbb{R}^2, d_T)$ no cumple con $\mathrm{Curv}(X) \geq k$.

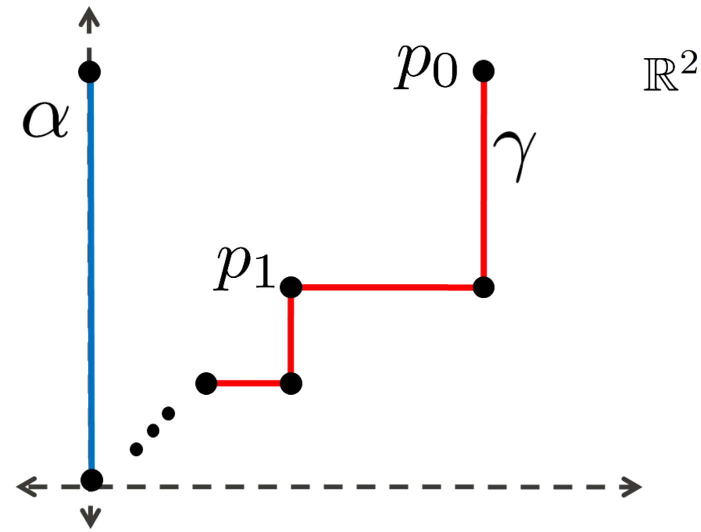


$$\theta_0 = 0$$

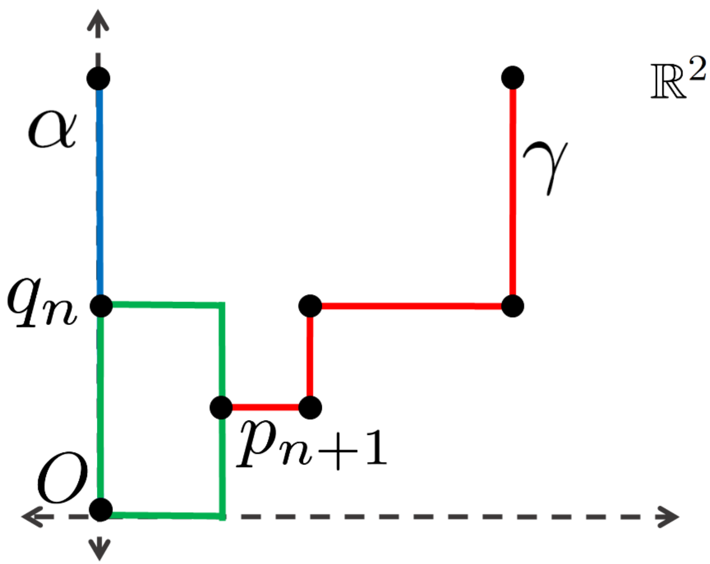


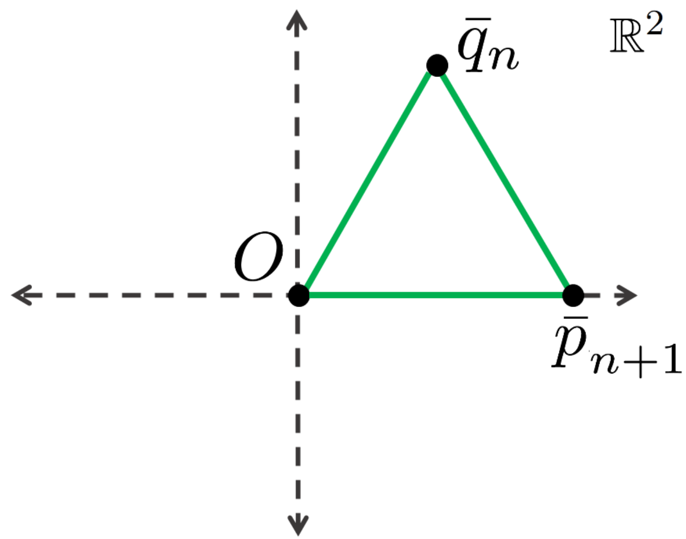


Proposición: $(\mathbb{R}^2, d_T)$ no cumple con $\mathrm{Curv}(X) \geq k$.

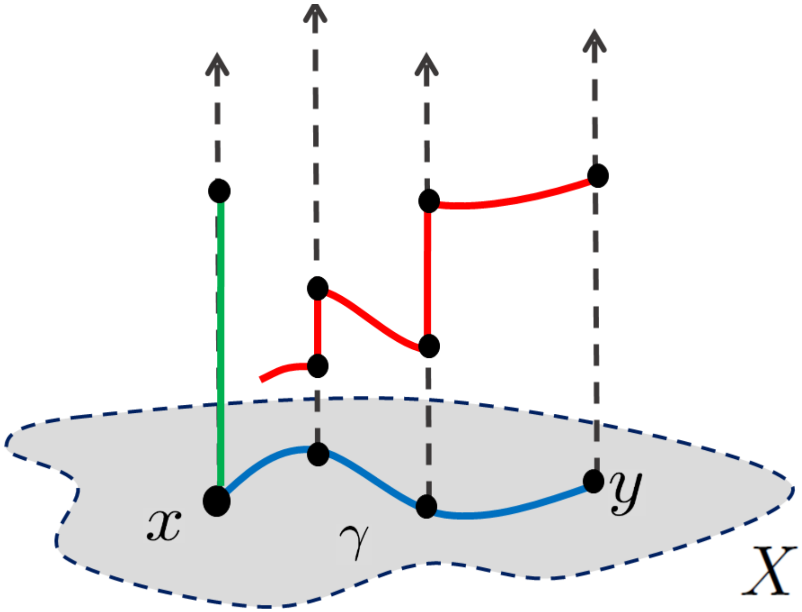


$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$$





Proposición: sea (X, d) un espacio métrico completo, localmente compacto y geodésico que cumple la propiedad de entrada y salida. Entonces el espacio $(X \times \mathbb{R}_{\geq 0}, d_T)$ no cumple con $\mathrm{Curv}(X \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \geq k$.



VI. Submetrías

Definición: una función $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre espacios métricos se dice submetría si

$$f(\bar{B}_r(p)) = \bar{B}_r(f(p))$$

Proposición: toda submersión riemanniana $f\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ es una submetría.

Teorema (O'neill): sea $f\colon (M, g_M) \to (B, g_B)$ una submersión riemanniana, entonces

$$\sec_B(X,Y) = \sec_M(\tilde{X},\tilde{Y}) + \frac{3}{4}\left|\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]^{\mathcal{V}}\right|^2$$

Corolario: sea $f\colon (M, g_M) \to (B, g_B)$ una submersión riemanniana, si $\sec_M \geq k$ entonces $\sec_B \geq k$

Teorema: sea $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una submetría y (X, d) localmente compacto con $\mathrm{Curv}(X) \geq k$, entonces $\mathrm{Curv}(Y) \geq k$.

Proposición (BMN-): $g: (\mathcal{H}(\mathbb{R}), d_H) \to (\Sigma(\mathbb{R}), d_H)$ dada por

$$g(K) = [\min K, \max K]$$

es una submetría.

Conjetura (BMN-): $g: (\mathcal{H}(\mathbb{R}), d_H)$ no cumple con $\mathrm{Curv}(\mathcal{H}(\mathbb{R})) \geq k$.

VII. El cubo de Hilbert

$$d_{GH}(X,Y) = \inf_{Z} \inf_{\phi,\psi} d_H^Z(\phi(X), \psi(Y))$$

Teorema (Gromov): d_{GH} es una métrica en el conjunto $\mathcal{M}$ de las clases de isometría de conjuntos compactos.

Teorema (Gromov): sea C un subconjunto totalmente acotado de $\mathcal{M}$, entonces existe un encaje isométrico de (C, d_{GH}) en un subconjunto compacto de (ℓ_∞, d_H).

Definición: el *cubo de Hilbert* $(\mathcal{Q}, d_{\mathcal{Q}})$ es el espacio métrico dado por

$$\mathcal{Q} = \Pi_\infty [0,1]$$

$$d_{\mathcal{Q}}(x, y) = \Sigma_i \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

Teorema: $(GH(\mathbb{R}^n), d_{GH})$ es homeomorfo a $(\mathcal{Q} *, d_{\mathcal{Q}})$

TRABAJO EN PROGRESO:

Caracterizaciones explícitas de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ en $(\mathcal{Q}*, d_{\mathcal{Q}})$

Geodésicas

Isometrías

Submetrías

¡ GRACIAS !