

# Superficies espaciales del cono luz de $\mathbb{L}^4$

Francisco J. Palomo  
Departamento de Matemática Aplicada



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

Seminario de Geometría  
Departamento de Geometría y Topología  
Granada, 18 de enero de 2013

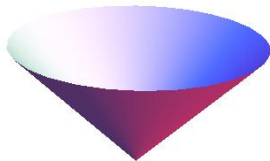
- 1 Para empezar...
- 2 Geometría de superficies en  $\mathbb{L}^3$ 
  - Ejemplos y algo más...
  - Geometría local
  - Superficie conjugada
- 3 Resultados globales
  - Una caracterización intrínseca de  $\mathbb{S}^2(u, r)$
  - Una caracterización extrínseca de  $\mathbb{S}^2(u, r)$
  - Sobre el  $\lambda_1$
- 4 Para acabar...

Basada en...

- F.J. Palomo and A. Romero, On spacelike surfaces in 4-dimensional Lorentz-Minkowski spacetime through a lightcone, *P. Roy. Soc. Edinb. A Mat.* (aparecerá).
- F.J. Palomo, F. Rodríguez and A. Romero, Compact spacelike surfaces in the lightcone with non-degenerate lightlike Gauss map, (enviado)

$$\mathbb{L}^{n+1} = \left( \mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle \right), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = -(dx_0)^2 + \sum_{i=1}^n (dx_i)^2.$$

$$\Lambda^n = \{v \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle v, v \rangle = 0, v_0 > 0\}$$



$$(T_{\vec{v}} \Lambda^n)^\perp = \text{Span}\{\vec{v}\} \subset \vec{v}^\perp = T_{\vec{v}} \Lambda^n, \quad \vec{v} \in \Lambda^n$$

$\Lambda^n \subset \mathbb{L}^{n+1}$  una hipersuperficie luz ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  degenera sobre  $\Lambda^n$ ) pero...

- Si  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  es una inmersión y

$$\psi_*(T_p M) \cap \text{Span}\{\psi(p)\} = \{\vec{0}\}, \quad p \in M$$



$\psi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una métrica de Riemann.

$\psi : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  será inmersión espacial de codimensión 2 en  $\mathbb{L}^{n+2}$ .

- ¿Qué variedades de Riemann  $(M^n, g)$  admiten una inmersión isométrica en  $\mathbb{L}^{n+1}$ ?

La respuesta fue encontrada por Brinkmann en 1923...

Una variedad de Riemann  $(M^n, g)$  se dice localmente conformemente llana si cada punto de  $M^n$  está en el dominio de un sistema coordenado local  $(x_1, \dots, x_n)$  donde la métrica se escribe

$$g = \omega^2 \left( \sum (dx_i)^2 \right).$$

## Brinkmann, 1923

Una variedad de Riemann de dimensión  $n \geq 3$  y simplemente conexa es localmente conformemente llana si y sólo si admite una inmersión isométrica en  $\mathbb{L}^{n+1}$ .<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>A. Asperti and M. Dajczer, Conformally flat Riemannian manifolds as hypersurfaces of the light cone, *Can. Math. Bull.*, **32** (1989), 281–285

## Ideas de la prueba

Sea  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  inmersión espacial con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la métrica inducida.

$$\psi \in \mathfrak{X}^\perp(M^n), \quad A_\psi = -\text{Id}$$

Tomemos  $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M^n)$  con  $\langle \eta, \psi \rangle = 1$  y  $\langle \eta, \eta \rangle = 0$ .

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = -L(X, Y) = \frac{-1}{n-2} \left[ \text{Ric}(X, Y) - \frac{S}{2(n-1)} \langle X, Y \rangle \right],$$

para cada  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^2)$ .

Ecuación de Gauss  $\leftrightarrow$  Tensor de Weyl nulo.

Ecuación de Codazzi  $\leftrightarrow$  Tensor de Schouten es de Codazzi.

Ecuación de Ricci  $\leftrightarrow [A_\eta, A_\psi] = 0$ .

¿Qué ocurre para  $n = 2$ ?

## Teorema de uniformización

Una variedad de Riemann de dimensión 2 y simplemente conexa es conformemente equivalente a una de las siguientes:  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}^2(1)$ ,  $\mathbb{H}^2(-1)$



Cada variedad de Riemann de dimensión 2 y simplemente conexa admite una inmersión isométrica en  $\mathbb{L}^3$ .

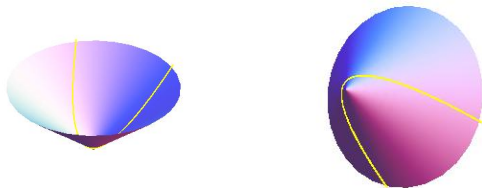
Este hecho es falso para otras cuádricas.

- No existe ninguna inmersión isométrica de  $\mathbb{S}^2(r)$  en  $\mathbb{S}_1^3 = \{v \in \mathbb{L}^4 : \langle v, v \rangle = 1\}$  con  $r < 1$ .



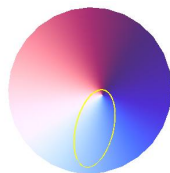
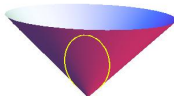
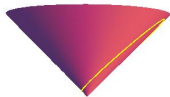
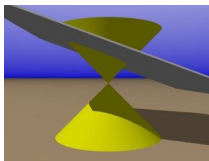
## Plano euclídeo

- $\psi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\psi(x, y) = (\cosh x, \sinh x, \cos y, \sin y)$
- $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\phi(x, y) = \left( \frac{x^2+y^2+1}{2}, \frac{x^2+y^2-1}{2}, x, y \right)$



## Esfera $\mathbb{S}^2(r)$ de curvatura de Gauss constante $1/r^2$

$$\mathbb{S}^2(u, r) = \{v \in \mathbb{L}^3 : \langle v, u \rangle = r\} \cong \mathbb{S}^2(r) \text{ con } \langle u, u \rangle = -1, u_0 < 0, r > 0.$$



$\mathbb{S}^2(u, r)$  son todas la esferas totalmente umbilicales de  $\mathbb{L}^4$  a través de  $\mathbb{L}^3$

## Plano hiperbólico $\mathbb{H}^2(-1)$

Consideremos el modelo de  $\mathbb{H}^2(-1)$  del semiplano de Poincaré  $y > 0$ .

- $\psi_\sigma(x, y) : \mathbb{H}^2(-1) \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\psi_\sigma(x, y) = \frac{1}{y} \left( \cosh x, \sinh x, \cos y, \sin y \right)$ .
- $\phi_\sigma(x, y) : \mathbb{H}^2(-1) \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{y} \left( \frac{x^2+y^2+1}{2}, \frac{x^2+y^2-1}{2}, x, y \right)$ .



## Un primer método general

(Cambio conforme)

Sean  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  espacial y  $\sigma \in C^\infty(M^2)$ .

$$\psi_\sigma = e^\sigma \psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$$

$$\psi_\sigma^* \langle \cdot, \cdot \rangle = e^{2\sigma} \langle \cdot, \cdot \rangle \Rightarrow K_\sigma = \frac{K - \Delta\sigma}{e^{2\sigma}}$$

- Este método ha permitido construir las inmersiones isométricas de  $\mathbb{H}^2(-1)$  en  $\mathbb{L}^3$ .

...del Teorema de uniformización...

Sea  $(M^2, g)$  una variedad de Riemann simplemente conexa. Entonces existe un *embebimiento* isométrico  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Obtenido también en H. Liu, M. Umehara and K. Yamada, The duality of conformally flat Riemannian manifolds, arXiv:1001.4569v4.

## Fórmulas y algún resultado

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$  una superficie espacial ( $\Rightarrow$  orientable).

$$\psi, \eta \in \mathfrak{X}^\perp(M^2), \quad \langle \eta, \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta, \psi \rangle = 1, \quad \psi_0 = x_0 \circ \psi$$

$$A_\psi = -\text{Id}, \quad A_\eta = -\frac{1 + \|\nabla \psi_0\|^2}{2\psi_0^2} \text{Id} + \frac{1}{\psi_0} \nabla^2 \psi_0$$

$$\nabla^\perp \psi = \nabla^\perp \eta = 0$$

$$K = -\text{tr}(A_\eta) = -\Delta \log \psi_0 + \frac{1}{\psi_0^2}$$

$$\vec{\mathbf{H}} = -\frac{1}{2}K \cdot \psi - \eta \quad (\Rightarrow \langle \vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}} \rangle = K)$$

Una superficie espacial de  $\mathbb{L}^4$  que admita un campo normal luminoso  $\xi$  con  $\nabla^\perp \xi = 0$  y  $A_\xi = -\text{Id}$  está contenida en un cono  $p + \mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$ .

## Caso compacto

Si  $M^2$  es compacta, entonces debe ser topológicamente una 2-esfera.

$$\dots \langle \vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}} \rangle = -\Delta \log \psi_0 + \frac{1}{\psi_0^2} = K \dots$$

$$\int_{M^2} \langle \vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}} \rangle dA = \int_{M^2} \frac{1}{\psi_0^2} dA = 4\pi.$$

...incluso un poco más...

$$\int_{M^2} \frac{1}{\langle \psi, u \rangle^2} dA = 4\pi,$$

para todo  $\langle u, u \rangle = -1$  con  $u_0 < 0$ .

## La superficie conjugada

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  una inmersión espacial y  $\tilde{\psi} = -\eta : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ .

$$\tilde{\psi}^* \langle X, Y \rangle = \langle A_\eta^2(X), Y \rangle := \text{III}_\eta(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^2).$$

$\tilde{\psi}$  es una inmersión (espacial)  $\Leftrightarrow \det(A_\eta) = \mathfrak{d} \neq 0$  en todo punto.

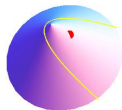
En este caso,  $\eta$  es una sección normal no degenerada y  $\tilde{\psi}$  la superficie conjugada a  $\psi$ .

$$\tilde{\psi} = \psi$$

$$K^{\text{III}_\eta} = K/\mathfrak{d}$$

### Plano euclídeo I

$$\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3, \quad \phi(x, y) = \left( \frac{x^2+y^2+1}{2}, \frac{x^2+y^2-1}{2}, x, y \right), \quad \tilde{\phi} \text{ es constante.}$$



### Plano euclídeo II

$$\psi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3, \quad \psi(x, y) = \left( \cosh x, \sinh x, \cos y, \sin y \right)$$

$$\eta(x, y) = \frac{1}{2} \left( -\cosh x, -\sinh x, \cos y, \sin y \right), \quad \vartheta = -1/4.$$

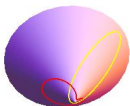
$$K^{\text{III}\eta} = 0$$



## Esfera $\mathbb{S}^2(r)$

$$\mathbb{S}^2(u, r) = \{v \in \mathbb{L}^3 : \langle v, u \rangle = r\} \text{ con } \langle u, u \rangle = -1, u_0 < 0, r > 0.$$

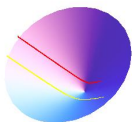
$$\widetilde{\mathbb{S}^2(u, r)} = \mathbb{S}^2(u, 1/2r), \quad \mathfrak{d} = 1/4r^4$$



## Plano hiperbólico I

$$\phi_\sigma : \mathbb{H}^2(-1) \rightarrow \mathbb{L}^3 \text{ con } \phi_\sigma(x, y) = \left( \frac{x^2+y^2+1}{2}, \frac{x^2+y^2-1}{2}, x, y \right), \quad y > 0$$

La métrica inducida por  $\widetilde{\phi}_\sigma$  tiene curvatura de Gauss constante  $-4$ .



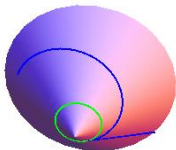
## Plano hiperbólico II

$$\psi_\sigma : \mathbb{H}^2(-1) \rightarrow \mathbb{L}^3, \quad \psi_\sigma(x, y) = \frac{1}{y} \left( \cosh x, \sinh x, \cos y, \sin y \right)$$

$$\mathfrak{d}_\sigma = \frac{1-y^4}{4}, \quad K^{\text{III}\eta_\sigma} = \frac{4}{y^4-1} \quad (y \neq 1).$$

$$\psi(x, y) = (\cosh x, \sinh x, \cos y, \sin y), \quad \sigma(x, y) = -\log y$$

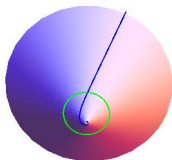
Cambio conforme y superficie conjugada:  $\widetilde{\psi}_\sigma$



$$K = 4/(y^4 - 1), \quad y \neq 1$$

$$\psi(x, y) = (\cosh x, \sinh x, \cos y, \sin y), \quad \sigma(x, y) = -\log y$$

Superficie conjugada y cambio conforme:  $(\tilde{\psi})_\sigma$



$$K = -4$$

## Teorema. Caracterización intrínseca de $\mathbb{S}^2(u, r)$

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  una superficie espacial completa. Supongamos:

- $K$  es constante.
- $\psi_0$  alcanza un máximo local en algún  $q \in M^2$ .

Entonces  $M^2$  es una esfera (totalmente umbilical)  $\mathbb{S}^2(u, r)$ .

## Ideas de la prueba

- 1  $K = (-\Delta \log \psi_0 + \frac{1}{\psi_0^2})(q) > 0 \Rightarrow M^2$  es una 2-esfera topológica.
- 2 La diferencial cuadrática  $\Omega = \langle \text{II}(\partial_z, \partial_z), \eta \rangle dz^2 = 0 \Leftrightarrow M^2$  es t. u.
- 3  $\langle \vec{\mathbf{H}}, \eta \rangle = -K/2 = cte \Rightarrow \Omega$  es holomorfa.
- 4  $M^2$  es una 2-esfera  $\Rightarrow \Omega = 0$ .

...hacia una caracterización extrínseca...

Si  $\det(A_\eta) = \vartheta \neq 0$  en cada punto,

$$\text{II}_\eta(X, Y) = -\langle A_\eta(X), Y \rangle$$

es una métrica semi-riemanniana en  $M^2$ .

Sean  $D$  y  $\nabla$  las conexiones de Levi-Civita de  $\text{II}_\eta$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , respectivamente.

### Teorema. Curvatura de $\text{II}_\eta$

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \Lambda$  un superficie espacial con  $\eta$  no degenerado. Entonces, la curvatura de Gauss  $\text{II}_\eta$  satisface,

$$2K^\eta = \frac{K^2}{\vartheta} + \text{II}_\eta(L, L) - \frac{1}{4\vartheta^2} \text{II}_\eta(\nabla^{\text{II}_\eta} \vartheta, \nabla^{\text{II}_\eta} \vartheta),$$

donde  $L(X, Y) = D_X Y - \nabla_X Y$  para cada  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^2)$ .

## Teorema. Caracterización extrínseca de $\mathbb{S}^2(u, r)$

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  una superficie compacta espacial. Supongamos que  $\eta$  es no degenerado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1  $M^2$  es totalmente umbilical ( $= \mathbb{S}^2(u, r)$ ).
- 2 La curvatura de Gauss-Kronecker  $\mathfrak{d} = \det(A_\eta)$  es constante.
- 3 La curvatura de Gauss  $\text{II}_\eta$  satisface  $K^\eta = 2$

## Ideas de la prueba

- 1  $M^2 = \mathbb{S}^2(u, r) \Rightarrow A_\eta = -1/2r^2 \cdot \text{Id} \Rightarrow K^\eta = \frac{K^2}{2\mathfrak{d}} = 2.$
- 2  $A_\eta = -\frac{1+\|\nabla\psi_0\|^2}{2\psi_0^2}\text{Id} + \frac{1}{\psi_0}\nabla^2\psi_0 \Rightarrow \text{II}_\eta$  es una métrica de Riemann.
- 3  $K = -\text{tr}(A_\eta) \Rightarrow K^2 \geq 4\mathfrak{d} > 0 \Leftrightarrow K \geq 2\sqrt{\mathfrak{d}}$  ("=" si y sólo si es t.u.)

$$\Downarrow \quad \underline{\mathfrak{d} = \text{cte}} \Rightarrow K^\eta = 1/2\left(K^2/\mathfrak{d} + \text{II}_\eta(L, L)\right) \geq K^2/2\mathfrak{d} \geq K/\sqrt{\mathfrak{d}}$$

$$4\pi = \int_{M^2} K^\eta dA_{\text{II}_\eta} \geq \int_{M^2} \frac{K}{\sqrt{\mathfrak{d}}} dA_{\text{II}_\eta} = \int_{M^2} K dA = 4\pi \Rightarrow \text{t.u.}$$

- 4  $\underline{K^\eta = 2} \Rightarrow K \geq K^\eta\sqrt{\mathfrak{d}}$  ("=" si y sólo si es t.u.)

$$4\pi = \int_{M^2} K^\eta dA_{\text{II}_\eta} = \int_{M^2} K^\eta\sqrt{\mathfrak{d}} dA \leq \int_{M^2} K dA = 4\pi \Rightarrow \text{t.u.}$$



$$\Delta f + \lambda f = 0$$

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

## Teorema

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  una superficie compacta espacial. Para cada  $u \in \mathbb{L}^4$  con  $\langle u, u \rangle = -1$  y  $u_0 < 0$ ,

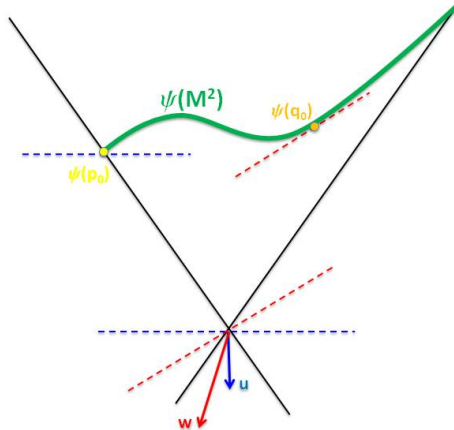
$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\min \langle \psi, u \rangle^2}.$$

La igualdad se alcanza para algún  $u$  si y sólo si  $M^2 = \mathbb{S}^2(u, r)$ ,  $r = \langle \psi, u \rangle$ .

En particular,

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\min (\psi_0^2)},$$

con igualdad si y sólo si  $\psi_0 = \text{cte}$ .



$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\langle \psi(p_0), u \rangle^2}, \quad \lambda_1 \leq \frac{2}{\langle \psi(q_0), w \rangle^2}$$

## Desigualdad de Hersch

$$\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{\text{área}(\mathbb{S}^2, g)}$$

con igualdad si y sólo si  $g$  tiene curvatura de Gauss constante.

### Ideas de la prueba

1

$$\int_{M^2} \frac{1}{\langle \psi, u \rangle^2} dA = 4\pi \leq \text{área}(M^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) / \min \langle \psi, u \rangle^2.$$

2

Usar la desigualdad de Hersch.

Si  $M^2$  es una superficie en un cono de  $\mathbb{L}^4$  entonces,

$$\text{II}(X, Y) = \langle A_\eta(X), Y \rangle \psi - \langle X, Y \rangle \eta \quad (X, Y \in \mathfrak{M}^2)$$

...es imposible que sea totalmente geodésica en  $\mathbb{L}^4$ .

...además

$$\vec{H} = -\frac{1}{2}K \cdot \psi - \eta$$

...es imposible  $\vec{H} = 0$ .

...pero existen superficies compactas totalmente umbilicales en un cono.

- ¿Pueden clasificarse de *algún modo* las hipersuperficies luz por el *tipo* de superficies espaciales que contienen?

Toda superficie compacta de  $\mathbb{S}_1^3$  con segunda forma fundamental II no degenerada es totalmente umbilical si y sólo si  $K^{\text{II}}$  es constante.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>J.A. Aledo and A. Romero, Compact spacelike surfaces in the 3-dimensional de Sitter space with non-degenerate second fundamental form, *Differ. Geom. Appl.*, **19** (2003), 97–111.

Si  $M^2$  es compacta,  $\eta$  es no degenerado y  $K^\eta = \text{cte}$ , entonces  $K^\eta \geq 2$ .

$$2K^\eta \geq \frac{K^2(q_0)}{\partial(q_0)} \geq 4,$$

donde  $q_0$  es un máximo local de  $\partial$ .

...no hemos encontrado ninguna superficie con  $K^\eta = \text{cte}$  y  $K^\eta > 2$ .

- ¿Será cierto que  $M^2$  compacta y  $K^\eta = \text{cte}$  implican totalmente umbilical?
- Estos es, si  $M^2$  es compacta,

$$\text{¿} K^\eta = \text{cte} \Leftrightarrow K^\eta = 2?$$

Si  $M^2$  es una superficie espacial compacta en  $\mathbb{L}^3$ ,

$$\langle \vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}} \rangle = K \quad \Rightarrow \quad \int_{M^2} \langle \vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}} \rangle dA = 4\pi$$

...la desigualdad de Hersch puede ahora escribirse...

$$\lambda_1 \leq \frac{2 \int_{M^2} \langle \vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}} \rangle dA}{\text{área}(M^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)} \quad (*)$$

¡¡Formalmente idéntica a la acotación extrínseca de Reilly para superficies compactas en espacios euclídeos!!

...pero la desigualdad de Reilly es falsa para superficies compactas en  $\mathbb{L}^4$ ...

- ¿Existe alguna acotación extrínseca para el  $\lambda_1$  de superficies compactas en  $\mathbb{L}^4$ ?
- ¿Caracterizará (\*) las superficies en un cono?