# Superficies de curvatura media constante en 3-variedades que admiten un campo de Killing

José M. Manzano

Department of Mathematics
King's College London

14 de junio de 2016

Trabajo conjunto con Ana M. Lerma

# Propiedades básicas

## Definición

Una submersión de Killing es una submersión riemanniana $\pi : \mathbb{E} \to M$, donde $\mathbb{E}$ y $M$ son orientables y conexas, tal que las fibras de $\pi$ son curvas integrales de un campo de Killing $\xi$.

- El campo $\xi$ está determinado salvo una constante.
- Las fibras no son geodésicas en general.
- Si una fibra tiene longitud finita, entonces todas la tienen.
- $\pi$ admite una sección global si
  - la base $M$ no es compacta, o bien
  - las fibras de $\pi$ tienen longitud infinita.

## Criterio de Clasificación

Dos submersiones de Killing $\pi_1 : \mathbb{E}_1 \to M$ y $\pi_2 : \mathbb{E}_2 \to M$ son isomorfas si existe una isometría $T : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ tal que $\pi_2 \circ T = \pi_1$.

# Clasificación de submersiones de Killing

Objetivo: Clasificar submersiones de Killing salvo isomorfismo.

Ingredientes:

1. La superficie base $M$.
2. La longitud del Killing $\mu = \|\xi\|$
   - Es constante a lo largo de las fibras $\rightsquigarrow$ $\mu \in C^\infty(M)$.
3. La curvatura del fibrado $\tau$.

$$\begin{aligned} \xi \text{ Killing} \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_Y \xi, X\rangle = 0 \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M) \\ &\Leftrightarrow \quad \omega(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle \text{ es antisimétrica} \end{aligned}$$

Definimos $\tau(p) = \frac{1}{\|\xi\|}\omega(e_1, e_2)$, donde $\{e_1, e_2\}$ es una referencia ortonormal de $\ker(d\pi)^\perp$ (distribución horizontal).

- It is constant along the fibers $\rightsquigarrow$ $\tau \in C^\infty(M)$.
- It does not depend on the choice of $\xi$.
- Horizontal distribution integrable $\Leftrightarrow \tau \equiv 0$.

# Ejemplos

3-variedades homogéneas simplemente conexas $N$

- $\dim(\mathrm{Iso}(N)) = 6 \rightsquigarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$ y $\mathbb{S}^3$.
- $\dim(\mathrm{Iso}(N)) = 4 \rightsquigarrow$ espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$
  - Productos $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$,
  - Grupo de Heisenberg $\mathrm{Nil}_3$,
  - Esferas de Berger $\mathbb{S}^3_b$, y
  - Recubridor universal de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ con métrica inv. a izquierda.
- $\dim(\mathrm{Iso}(N)) = 3 \rightsquigarrow$ grupos de Lie métricos isométricos a
  - Productos semidirectos $\mathbb{R}^2 \ltimes_A \mathbb{R}$ para cierta $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  - $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.

Productos warped $M \times_f \mathbb{R}$ con la métrica

$$\pi_M^*(\,ds_M^2) + (f \circ \pi_M)\,\pi_{\mathbb{R}}^*(\,dt^2),$$

donde $f$ está definida en $M$ (fibras 1-dimensionales).

# Ideas para construir submersiones de Killing

Tomemos $\pi : (\mathbb{R}^3, ds^2) \to (\mathbb{R}^2, g_0)$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

- Submersión de Killing más simple (trivial):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Curvatura del fibrado: 0.

- Submersión de Killing más simple (no trivial): $\mathrm{Nil}_3(\tau) = \mathbb{E}(0, \tau)$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz + \tau(y\,dx - x\,dy))^2.$$

Curvatura del fibrado: $\tau$ (constante).

- Generalización más simple:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz + \eta(x, y)(y\,dx - x\,dy))^2.$$

Curvatura del fibrado: $\tau(x, y) = 2\eta(x, y) + x\eta_x(x, y) + y\eta_y(x, y)$.

- ¿Es la última generalización?

$$ds^2 = \lambda(x, y)^2(dx^2 + dy^2) + \mu(x, y)^2(dz - a(x, y)\,dx - b(x, y)\,dy)^2.$$

# Referencias locales

Sean $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing y $p \in M$.

Sea $U \subset M$ un entorno de $p$ tal que existen:

a) una sección $F_0 : U \to \mathbb{E}$, y

b) una carta conforme $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Tenemos un isomorfismo de submersiones de Killing:

$$\begin{tikzcd} \varphi(U) \times \mathbb{R} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} ds^2_\lambda + \mu^2( dz - \lambda(a\,dx + b\,dy))^2 \arrow[d] \\ ds^2_\lambda = \lambda^2(dx^2 + dy^2) \end{tikzcd}$$

$$\Psi(x, y, t) = \phi_t(F_0(\varphi^{-1}(x, y))), \quad (x, y) \in \varphi(U),\ t \in \mathbb{R},$$

- $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es el grupo de translaciones verticales.
- La curvatura del fibrado asociada a $\pi_1$ es

$$\tau = \frac{\mu}{2\lambda^2} \left((\lambda b)_x - (\lambda a)_y\right).$$

# Existencia y unicidad

## Teorema

Sea $M$ una superficie simplemente conexa y $\tau, \mu \in C^\infty(M)$. Entonces existe una submersión de Killing $\pi : \mathbb{E} \to M$ tal que

(a) La curvatura del fibrado es $\tau$.

(b) La longitud del Killing es $\mu$.

(c) $\mathbb{E}$ es simplemente conexa.

Además, $\pi$ es única salvo isomorfismo.

- Si $M$ es un disco, entonces $\pi \sim \pi_1 : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{D}$.
- Si $M$ es una esfera, entonces
  - Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} = 0$, entonces $\pi \sim \pi_1 : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$.
  - Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} \neq 0$, entonces $\pi \sim \pi_{\mathrm{Hopf}} : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$.
- Si no imponemos (c), recuperamos $\pi$ mediante un cociente por una translación vertical de los ejemplos anteriores.

# El caso no simplemente conexo

Una isometría $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ es una isometría de Killing si preserva la dirección vertical.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{E}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "h"] & M_2 \end{tikzcd}$$

$$\pi_2 \circ f = h \circ \pi_1 .$$

## Levantamiento de isometrías

Supongamos que $M_1, M_2, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ son simplemente conexas, $h : M_1 \to M_2$ una isometría y $p_1 \in \mathbb{E}_1$, $p_2 \in \mathbb{E}_2$ son tales que $h(\pi_1(p_1)) = h(\pi_2(p_2))$.

- Si $\tau_2 \circ h = \tau_1$ y $\mu_2 \circ h = \mu_1$, entonces existe una única isometría de Killing que preserva la orientación $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ con $f(p_1) = p_2$.

## Theorem

*Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing y $\rho : \widetilde{M} \to M$ y $\sigma : \widetilde{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}$ los recubridores universales riemannianos de $M$ y $\mathbb{E}$, respectivamente.*

- *Hay una submersión de Killing $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathbb{E}} \to \widetilde{M}$.*
- *Hay un grupo $G$ de isometrías de Killing actuando propia y discontinuamente sobre $\widetilde{\mathbb{E}}$ tal que $\mathbb{E} = \widetilde{\mathbb{E}}/G$.*

Cada $f \in G$ está asociada a cierto $h \in \mathrm{Aut}(\rho)$.

# La ecuación de la curvatura media

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing

- Un grafo de Killing sobre $\Omega \subset M$ es una sección $F : \Omega \to \pi^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{E}$.
- Si $\Omega = M$, el grafo se dice entero.

Dada una sección inicial $F_0 : \Omega \to \mathbb{E}$, todo grafo sobre $\Omega$ se puede expresar como

$$F_u : \Omega \to \mathbb{E}, \qquad F_u(p) = \phi_{u(p)}(F_0(p)),$$

para cierta $u \in C^\infty(\Omega)$.

La curvatura media $H$ de $F_u$ está dada por

$$2H\mu = \operatorname{div}_M(\mu\, \pi_* N) = \operatorname{div}_M \left( \frac{\mu\, Gu}{\sqrt{\mu^{-2} + \|Gu\|^2}} \right),$$

donde $Gu = \nabla u - Z$, para cierto $Z \in \mathfrak{X}(M)$ que no depende de $u$, tal que

$$\operatorname{div}(JZ) = \frac{-2\tau}{\mu}.$$

Si $M$ es compacta, entonces $\pi$ admite sección global $\Leftrightarrow \int_M \frac{\tau}{\mu} = 0$.

# Grafos mínimos enteros

## Theorem

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing con $M$ compacta, $\tau$ = curvatura del fibrado y $\mu$ = longitud del Killing .

- Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} = 0$, entonces $\mathbb{E}$ admite un grafo mínimo entero.
- Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} \neq 0$, entonces $\mathbb{E}$ no admite ninguna sección global.

- El grafo mínimo entero es el único grafo entero con $H \geq 0$ (salvo traslaciones).
- El grafo mínimo entero es area minimizante, mínimo global de

$$\mathcal{A}(u) = \int_M \sqrt{\mu^{-2} + \|Gu\|^2} \sim \int_M \sqrt{f^2 + \|\nabla u + X\|^2}.$$

- Si las fibras tienen longitud infinita, el grafo mínimo entero es la única compacta mínima (salvo traslaciones).

# Caso I: $M \ncong \mathbb{S}^2$

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing con base compacta $M \ncong \mathbb{S}^2$, fibras infinitas y $\int_M \frac{\tau}{\mu} = 0$.

- Un cociente compacto $Q \cong M \times \mathbb{S}^1$ es irreducible.
- Cualquier sección global $F_0 : M \to Q$ es incompresible.

Deducimos de (Meeks-Simon-Yau, 1982) que existe una superficie mínima, compacta y embebida $\Sigma_0 \subset Q$ isótopa a $F_0$.

1. $\Sigma_0$ se levanta a una mínima, compacta y embebida, $\Sigma \subset \mathbb{E}$.
2. $\Sigma$ es un grafo entero mínimo por el principio del máximo.

# Caso II: $M \cong \mathbb{S}^2$

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing con $M \cong \mathbb{S}^2$, fibras infinitas, y sea $u \in C^\infty(M)$ tal que $\Sigma_u = F_u(M)$ es mínima. Entonces:

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mu\, Gu}{\sqrt{\mu^{-2} + \|Gu\|^2}}\right) = 0 \implies \frac{\mu\, Gu}{\sqrt{\mu^{-2} + \|Gu\|^2}} = -J\nabla v.$$

Manipulando esto último, llegamos a que $\|\nabla v\| < \mu$ y

$$Gu = \frac{-J\nabla v}{\mu\sqrt{\mu^2 - \|\nabla v\|^2}} \implies \mathrm{div}\left(\frac{\nabla v}{\mu\sqrt{\mu^2 - \|\nabla v\|^2}}\right) = \mathrm{div}(JGu) = \frac{2\tau}{\mu}.$$

## Theorem

Hay una correspondencia entre

(a) Grafos mínimos enteros en $\mathbb{E}$.

(b) Grafos enteros espaciales en $M \times \mathbb{R}$ con la métrica lorentziana $ds_M^2 - \frac{1}{\mu^2}\, dt^2$ y curvatura media prescrita $\tau$ $\rightsquigarrow$(Gerhardt, 1983).

# Esferas mínimas en submersiones de Killing

## Teorema

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing. Existe una esfera mínima inmersa en $\mathbb{E}$ si, y sólo si, $M \cong \mathbb{S}^2$.

## Sketch of the proof.

Podemos suponer que $\mathbb{E}$ es simplemente conexo.

- Si $M \not\cong \mathbb{S}^2$, entonces $\mathbb{E}$ es topológicamente $\mathbb{R}^3$.
- Si $M \cong \mathbb{S}^2$, distinguimos dos subcasos:
  - Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} = 0$, tenemos los grafos enteros mínimos.
  - Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} \neq 0$, entonces $\mathbb{E} \cong \mathbb{S}^3$ y podemos usar (Simon, 1985).

$\square$

# Superficies compactas estables con CMC

Sean $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing y $\Sigma$ una superficie inmersa, compacta y orientable en $\mathbb{E}$ con CMC , i.e., $\Sigma$ es un punto crítico del funcional

$$\mathcal{J} = \mathrm{Area} - 2H \cdot \mathrm{Vol}.$$

En tal situación, $\Sigma$ es estable $\Leftrightarrow \mathcal{J}'' \geq 0$ para cualquier variación de $\Sigma$.

- Si $\Sigma$ es estable, entonces la función ángulo $\nu = \langle N, \xi \rangle$ cumple $\nu \equiv 0$ ó $\nu > 0$ ($\nu$ está en el núcleo del operador de estabilidad).
  - Si $\nu > 0$, entonces $\Sigma$ es transversa al campo de Killing

    $$2H\mu = \mathrm{div}(X) \implies H = 0 \text{ y } \Sigma \text{ es un grafo mínimo entero.}$$

    Entonces, $M$ es compacta y la submersión admite sección global.
  - Si $\nu \equiv 0$, entonces $\Sigma$ es invariante por traslaciones, i.e., $\Sigma = \pi^{-1}(\Gamma)$ es un cilindro vertical (topológicamente $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$).

# Superficies compactas estables con CMC

## Teorema

Sea $\Sigma$ una superficie compacta y orientable, inmersa en $\mathbb{E}$ con CMC. Si $\Sigma$ es estable, tenemos dos posibilidades:

- *$M$* es compacta y $\Sigma$ es un grafo mínimo entero.
- las fibras de $\pi$ son compactas y $\Sigma$ es un cilindro vertical.

## Corolarios

- Si $\Sigma \ncong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, entonces es un grafo mínimo entero.
- Si $H \neq 0$, entonces $\Sigma$ es un cilindro vertical.