Superficies de curvatura media constante en espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

José M. Manzano

Parte 1 de 3

7 de junio de 2018

Severo Ochoa Excellence Program SEV2015-0554
MEC-Feder research project MTM2014-52368-P

Espacios homogéneos

Submersiones de Killing

Geodésicas, isometrías y curvatura

Espacios homogéneos

Sea X una 3-variedad Riemanniana.

DEF X es homogénea $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Iso}(X)$ actúa transitivamente en X.

DEF X es isótropa $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Iso}(X)$ actúa transitivamente en TX.
$\rightsquigarrow$ espacios forma $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ ó $\mathbb{H}^3$ (muy restrictivo)

Si X es homogénea, entonces X es completa y su recubridor universal es homogéneo, luego podemos suponer que X es simplemente conexa.

Teorema

Sea X una 3-variedad Riemanniana homogénea y simplemente conexa. Entonces, X es isométrica

- al espacio producto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, o bien
- a uno de los siguientes grupos de Lie:
  - el grupo especial unitario $\mathrm{SU}(2)$,
  - el recubridor universal del grupo especial lineal $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ o
  - un producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \ltimes_A \mathbb{R}$ para cierta $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

  con una métrica invariante a izquierda $\rightsquigarrow$ X es un grupo de Lie métrico.

Los grupos subyacentes I

El grupo especial unitario SU(2)

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}.$$

Identificamos $\mathrm{SU}(2) \equiv \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Una base invariante a izquierda es

$$E_1 = (-i\bar{w}, i\bar{z}), \qquad E_2 = (-\bar{w}, \bar{z}), \qquad E_3 = (iz, iw),$$

y satisface $[E_1, E_2] = 2E_3$, $[E_2, E_3] = 2E_1$, $[E_3, E_1] = 2E_2$.

El grupo especial lineal $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : |z|^2 - |w|^2 = 1 \right\}.$$

Identificamos SL(2) con una cuádrica de $\mathbb{C}^2$ (difeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$). Una base invariante a izquierda es

$$E_1 = (i\bar{w}, i\bar{z}), \qquad E_2 = (\bar{w}, \bar{z}), \qquad E_3 = (iz, iw),$$

y satisface $[E_1, E_2] = -2E_3$, $[E_2, E_3] = 2E_1$, $[E_3, E_1] = 2E_2$.

Los grupos subyacentes II

Productos semidirectos

Dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el producto $\mathbb{R}^2 \ltimes_A \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ con la operación

$$(p_1, z_1) \star (p_2, z_2) = \left(p_1 + e^{z_1 A} p_2, z_1 + z_2\right),$$

donde $e^{zA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n A^n}{n!}$. Una base invariante a izquierda está dada por

$$E_1 = \alpha_{11}(z)\partial_x + \alpha_{21}(z)\partial_y, \qquad E_2 = \alpha_{12}(z)\partial_x + \alpha_{22}(z)\partial_y, \qquad E_3 = \partial_z,$$

donde $e^{zA} = (\alpha_{ij}(z))_{i,j=1}^2$. Esta base satisface

$$[E_1, E_2] = 0, \qquad [E_3, E_1] = a_{11} E_1 + a_{21} E_2, \qquad [E_3, E_2] = a_{12} E_1 + a_{22} E_2.$$

El caso unimodular I

DEF Un grupo de Lie G es unimodular $\Leftrightarrow$ su medida de Haar invariante a izquierda es invariante a derecha.

Si G es 3-dimensional y orientado y está equipado con una métrica invariante a izquierda, entonces G es unimodular $\Leftrightarrow$ existe una base ortonormal positivamente orientada $\{E_1, E_2, E_3\}$ invariante a izquierda y $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$[E_1, E_2] = c_3 E_3, \qquad [E_2, E_3] = c_1 E_1, \qquad [E_3, E_1] = c_2 E_2.$$

Las constantes c_1, c_2, c_3 se llaman constantes de estructura.

- $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (-c_1, -c_2, -c_3) \rightsquigarrow$ cambio de orientación.
- $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (\lambda c_1, \lambda c_2, \lambda c_3)$, $\lambda > 0 \rightsquigarrow$ homotecia en la métrica.
- Los signos de c_1, c_2, c_3 determinan el grupo de Lie salvo isomorfismo.
- Los valores de c_1, c_2, c_3 determinan la métrica salvo isometría.

El caso unimodular II

Dados $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, tenemos las siguientes posibilidades:

1. $\boxed{c_1, c_2, c_3 > 0}$ $\qquad G \cong \mathrm{SU}(2) = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$

$$E_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{c_2 c_3}(-i\bar{w}, i\bar{z}), \quad E_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{c_1 c_3}(-\bar{w}, \bar{z}), \quad E_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{c_1 c_2}(iz, iw),$$

2. $\boxed{c_1 < 0,\ c_2, c_3 > 0}$ $\qquad G \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 - |w|^2 = 1\}$

$$E_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{c_2 c_3}(i\bar{w}, i\bar{z}), \quad E_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{-c_1 c_3}(\bar{w}, \bar{z}), \quad E_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{-c_1 c_2}(iz, iw),$$

3. Si $c_3 = 0$, entonces tenemos $G \cong \mathbb{R}^2 \ltimes_A \mathbb{R}$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$

3.1 $\boxed{c_1, c_2 > 0,\ c_3 = 0}$ $\qquad G \cong \widetilde{\mathrm{E}}(2) \equiv \mathbb{R}^3$

$$E_1 = \cos(\sqrt{c_1 c_2} z)\partial_x + \frac{c_2}{\sqrt{c_1 c_2}} \sin(\sqrt{c_1 c_2} z)\partial_y, \qquad E_3 = \partial_z$$
$$E_2 = \frac{-c_1}{\sqrt{c_1 c_2}} \sin(\sqrt{c_1 c_2} z)\partial_x + \cos(\sqrt{c_1 c_2} z)\partial_y.$$

3.2 $\boxed{c_1 > 0,\ c_2 < 0,\ c_3 = 0}$ $\qquad G \cong \mathrm{Sol}_3 \cong \widetilde{\mathrm{E}}(1,1) \equiv \mathbb{R}^3$

$$E_1 = \cosh(\sqrt{-c_1 c_2} z)\partial_x + \frac{c_2}{\sqrt{-c_1 c_2}} \sinh(\sqrt{-c_1 c_2} z)\partial_y, \quad E_3 = \partial_z,$$
$$E_2 = \frac{-c_1}{\sqrt{-c_1 c_2}} \sinh(\sqrt{-c_1 c_2} z)\partial_x + \cosh(\sqrt{-c_1 c_2} z)\partial_y.$$

3.3 $\boxed{c_1 = c_3 = 0,\ c_2 \geq 0}$ $\qquad G \cong \mathrm{Nil}_3 \equiv \mathbb{R}^3$ ó $G \cong \mathbb{R}^3$

$$E_1 = \partial_x + c_2 z \partial_y, \qquad E_2 = \partial_y, \qquad E_3 = \partial_z.$$

El caso no unimodular

Si G es no unimodular, entonces X es un producto $\mathbb{R}^2 \ltimes_A \mathbb{R}$ con su métrica canónica invariante a izquierda.Se puede suponer que A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \frac{T}{2} + a & -(\frac{T}{2} - a)b \\ (\frac{T}{2} + a)b & \frac{T}{2} - a \end{pmatrix}, \qquad a, b, T \in \mathbb{R}, \ T \neq 0.$$

- La traza T y el determinante $D = (\frac{T^2}{4} - a^2)(1 + b^2)$ son invariantes, dando lugar a una familia 3-paramétrica de métricas no congruentes.
- Los ejemplos más regulares son:
  - $\boxed{a = 0} \rightsquigarrow X$ es isométrico a $\mathbb{H}^3(\frac{-T^2}{4})$.
  - $\boxed{a = \frac{T}{2}, b = 0} \rightsquigarrow X$ es isométrico a $\mathbb{H}^2(-T^2) \times \mathbb{R}$.
  - $\boxed{a = \frac{T}{2}, b > 0} \rightsquigarrow X$ es isométrico a $\mathbb{E}(-T^2, \frac{1}{2}Tb)$.
- Isomorfismo, unimodularidad e isometría no están relacionados:
  - Hay métricas no isométricas sobre el mismo grupo de Lie.
  - Hay grupos de Lie unimodulares y no unimodulares con métricas invariantes a izquierda isométricas.

Grupo de isometrías: dimensión

Sea X un grupo de Lie métrico. Como el grupo subyacente G actúa de forma natural en X, deducimos que $\dim(\mathrm{Iso}(X)) \geq \dim(G) = 3$.

- $\boxed{\dim(\mathrm{Iso}(X)) = 4}$
  - Caso unimodular: $c_1 = c_2 \neq c_3 \neq 0 \rightsquigarrow \mathbb{E}(c_1 c_3, \frac{1}{2} c_3)$.
  - Caso no-unimodular: $a = \frac{T}{2} \rightsquigarrow \mathbb{E}(-T^2, \frac{1}{2} Tb)$.
- $\boxed{\dim(\mathrm{Iso}(X)) = 5}$ $\rightsquigarrow$ no existen ejemplos.
- $\boxed{\dim(\mathrm{Iso}(X)) = 6}$ $\rightsquigarrow$ curvatura seccional constante.
  - Caso unimodular: $\begin{cases} c_1 = c_2 = c_3 & \rightsquigarrow \mathbb{M}^3(c_1^2) \text{ (grupo } \mathbb{R}^3 \text{ ó SU(2))}, \\ c_1 = c_2, c_3 = 0 & \rightsquigarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{(grupo } \widetilde{\mathrm{E}}(2)). \end{cases}$
  - Caso no-unimodular: $a = 0 \rightsquigarrow \mathbb{H}^3(-\frac{T^2}{4})$.

Grupo de isometrías: estabilizadores

Sea X un grupo de Lie métrico sobre un grupo de Lie G.

Isometrías de X provienen de G: traslaciones

Todo campo invariante a derecha es un campo de Killing de X (y tiene asociado un subgrupo 1-paramétrico de G que actúa en X por isometrías).

- $\dim(\mathrm{Iso}(X)) = 4 \rightsquigarrow$ existe un campo biinvariante unitario.

Isometrías de X que no provienen de G

Por ser X homogéneo todos los subgrupos estabilizadores

$$\mathrm{Stab}(p) = \{\varphi \in \mathrm{Iso}(X) : \varphi(p) = p\}$$

son conjugados por traslaciones y, por tanto, isomorfos.

- $\boxed{\dim(\mathrm{Iso}(X)) = 6} \rightsquigarrow \mathrm{Stab}(p) \cong \mathrm{O}(3)$.
- $\boxed{\dim(\mathrm{Iso}(X)) = 4} \rightsquigarrow \mathrm{Stab}(p) \cong \mathrm{O}(2)$ ó $\mathrm{O}(2) \times \mathbb{Z}_2$.
- $\boxed{\dim(\mathrm{Iso}(X)) = 3} \rightsquigarrow \mathrm{Stab}(p)$ es finito.

Otro enfoque para los espacios homogéneos

Sean X un grupo de Lie métrico y $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ un campo invariante a derecha.

- Las curvas integrales de ξ son curvas que folian X:
  - en SU(2) son compactas (topológicamente $\mathbb{S}^1$),
  - en el resto de estructuras son no compactas (topológicamente $\mathbb{R}$).
- El espacio de curvas integrales M tiene una estructura diferenciable natural y $\pi : X \to M$ dada por $\pi(p) = \Gamma \Leftrightarrow p \in \Gamma$ es una submersión.
  - Las fibras de π son las curvas integrales de ξ.
  - La variedad M es una superficie (topológicamente $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{S}^2$) y admite una única métrica tal que π es Riemanniana.

¡Este tipo de estructura también existe en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$!

Submersiones de Killing

DEF Una submersión de Killing es una submersión riemanniana $\pi : \mathbb{E} \to M$, donde $\mathbb{E}$ y M son orientables y conexas, tal que las fibras de π son curvas integrales de un campo de Killing ξ.

- El campo ξ está determinado salvo una constante.
- Las fibras no son geodésicas en general.
- Sólo podemos garantizar que $\dim(\mathrm{Iso}(\mathbb{E})) \geq 1$ empleando el grupo 1-paramétrico $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de isometrías asociado a ξ.
- Si una fibra tiene longitud finita, entonces todas tienen longitud finita.
- Una submersión de Killing admite una sección global si la base no es compacta o las fibras tienen longitud infinita.

Criterio de Clasificación

Dos submersiones de Killing $\pi_1 : \mathbb{E}_1 \to M_1$ y $\pi_2 : \mathbb{E}_2 \to M_2$ son isomorfas si existen isometrías $T : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ y $h : M_1 \to M_2$ tales que $\pi_2 \circ T = h \circ \pi_1$.

Objetivo 1: Clasificar submersiones de Killing salvo isomorfismo.

Objetivo 2: Caracterizar las submersiones de Killing homogéneas.

Clasificación de submersiones de Killing

Objetivo 1: Clasificar submersiones de Killing salvo isomorfismo.

Ingredientes:

1. La superficie base M.
2. La longitud del Killing $\mu = \|\xi\|$
   - Es constante a lo largo de las fibras $\rightsquigarrow$ $\mu \in C^\infty(M)$.
3. La curvatura del fibrado τ.

$$\begin{aligned} \xi \text{ Killing} \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \overline{\nabla}_Y \xi, X \rangle = 0 \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M) \\ &\Leftrightarrow \quad \omega(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle \text{ es antisimétrica} \end{aligned}$$

Definimos $\tau(p) = \frac{1}{\|\xi_p\|} \omega_p(e_1, e_2)$, donde $\{e_1, e_2, \xi_p\}$ es una base ortonormal positivamente orientada de $T_p\mathbb{E}$.

- Es constante a lo largo de las fibras $\rightsquigarrow$ $\tau \in C^\infty(M)$.
- No depende de la elección de ξ.
- La distribución horizontal es integrable $\Leftrightarrow \tau \equiv 0$.

¿Cómo construir submersiones de Killing?

Tomemos $\pi : (\mathbb{R}^3, ds^2) \to (\mathbb{R}^2, g_0)$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

- Submersión de Killing más simple (trivial):

$$ds^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

  Curvatura del fibrado: 0.

- Submersión de Killing más simple (no trivial): $\mathrm{Nil}_3(\tau) = \mathbb{E}(0, \tau)$

$$ds^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (\mathrm{d}z + \tau(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y))^2.$$

  Curvatura del fibrado: τ (constante).

- Generalización más simple:

$$ds^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (\mathrm{d}z + \eta(x, y)(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y))^2.$$

  Curvatura del fibrado: $\tau = (x\eta)_x + (y\eta)_y$.

- Base y longitud del campo de Killing más generales:

$$ds^2 = \lambda(x, y)^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + \mu(x, y)^2(\mathrm{d}z - a(x, y)\mathrm{d}x - b(x, y)\mathrm{d}y))^2.$$

Referencias locales

Sean $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing y $p \in M$ y tomemos $U \subset M$ un entorno de p tal que existen:

- una sección $F_0 : U \to \mathbb{E}$,
- una carta conforme $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$.

Construimos un isomorfismo local de submersiones de Killing:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] & \varphi(U) \times \mathbb{R} \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[r, dotted, no head] & \mathrm{d}s_\lambda^2 + \mu^2(\mathrm{d}z - \lambda(a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y))^2 \\
U \arrow[r, "\varphi"] & \varphi(U) \arrow[r, dotted, no head] & \mathrm{d}s_\lambda^2 = \lambda^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)
\end{tikzcd}$$

$$\Psi(x, y, t) = \phi_t(F_0(\varphi^{-1}(x, y))), \quad (x, y) \in \varphi(U),\ t \in \mathbb{R}.$$

$$E_1 = \frac{\partial_x}{\lambda} + a\partial_z$$
$$E_2 = \frac{\partial_x}{\lambda} + b\partial_z$$
$$E_3 = \partial_z$$
$$e_1 = \frac{\partial_x}{\lambda} = \pi_* E_1$$
$$e_2 = \frac{\partial_x}{\lambda} = \pi_* E_2$$

- La curvatura del fibrado asociada a π_1 es

$$2\tau = \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle = \frac{\mu}{\lambda^2}\left((\lambda b)_x - (\lambda a)_y\right).$$

- Si U es estrellado, podemos resolver

$$(a, b) = \left(\frac{-\eta y}{\lambda}, \frac{\eta x}{\lambda}\right), \qquad \eta(x, y) = \int_0^1 \frac{2s\tau(xs, ys)\lambda(xs, ys)^2}{\mu(xs, ys)}\mathrm{d}s.$$

Existencia y unicidad

Teorema

Sean M una superficie simplemente conexa y $\tau, \mu \in C^\infty(M)$, $\mu > 0$. Existe una submersión de Killing $\pi : \mathbb{E} \to M$ (única salvo isomorfismo) tal que

(a) La curvatura del fibrado es τ.

(b) La longitud del Killing es μ.

(c) $\mathbb{E}$ es simplemente conexa.

- Si M es un disco, entonces $\pi \sim \pi_1 : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ y

$$\mathrm{d}s^2 = \lambda^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + (\mathrm{d}z + \eta(y\,\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y))^2\,,$$
$$\eta(x,y) = \int_0^1 \frac{2s\tau(xs,ys)\lambda(xs,ys)^2}{\mu(xs,ys)}\mathrm{d}s.$$

- Si M es una esfera, entonces
  - Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} = 0$, entonces $\pi \sim \pi_1 : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$.
  - Si $\int_M \frac{\tau}{\mu} \neq 0$, entonces $\pi \sim \pi_{\mathrm{Hopf}} : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$.
- Si no imponemos que M ó $\mathbb{E}$ sean simplemente conexos, entonces π es un cociente de los ejemplos anteriores, aunque perdemos la unicidad.

¿Por qué la topología depende de $\int_M \frac{\tau}{\mu}$?

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing y $\alpha : [a, b] \to M$ una curva de Jordan C^1 que bordea un dominio relativamente compacto $\Omega \subset M$ y lo parametriza en sentido positivo.

DEF Un levantamiento horizontal de α es una curva C^1 horizontal $\widetilde{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{E}$ tal que $\pi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

- El levantamiento existe y es único prefijando $\widetilde{\alpha}(a) \in \pi^{-1}(\{\alpha(a)\})$.
- En tales condiciones, $\widetilde{\alpha}(b) = \phi_{2d}(\widetilde{\alpha}(a))$, siendo

$$\boxed{d = \int_\Omega \frac{\tau}{\mu}}.$$

Localmente, se sigue del teorema de la divergencia en Ω ya que

$$\frac{2\tau}{\mu} = \frac{1}{\lambda^2}\left((\lambda b)_x - (\lambda a)_y\right) = \mathrm{div}_M\left(\tfrac{b}{\lambda}\partial_x - \tfrac{a}{\lambda}\partial_y\right).$$

Esto nos lleva a:

1. Distinguir las topologías $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^3$.
2. Caracterizar la trivialidad de la submersión en general.

Geodésicas de una submersión de Killing

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing unitaria (i.e., con $\mu = 1$).

DEF Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{E}$ es una geodésica $\Leftrightarrow \overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = 0$.

- γ geodésica $\rightsquigarrow \langle \gamma', \xi \rangle$ es constante.
  Por tanto, existen $\sigma \in \mathbb{R}$ y $\alpha : [a, b] \to M$ tales que

  $$\gamma(t) = \phi_{\sigma t}(\widetilde{\alpha}(t))$$

  (i.e., γ es un levantamiento de ángulo constante de α).
- γ geodésica $\Leftrightarrow \alpha$ tiene curvatura geodésica $\kappa_g(t) = 2\sigma\tau(\alpha(t))$ en M.

Reducimos el problema de las geodésicas a un problema de curvatura geodésica prescrita.

Isometrías de una submersión de Killing

DEF Una isometría $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ es una isometría de Killing si preserva la dirección vertical (i.e., $f_*\xi_1 = \pm\xi_2$).

- Induce $h : M_1 \to M_2$ tal que $\pi_2 \circ f = h \circ \pi_1$.
- $\tau_2 \circ h = \pm\tau_1$ y $\mu_2 \circ h = \mu_1$
- $\pm \rightsquigarrow f$ preserva/invierte orientación de las fibras.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{E}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "h"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Levantamiento de isometrías

Supongamos que $M_1, M_2, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ son simplemente conexas, $h : M_1 \to M_2$ una isometría y $p_1 \in \mathbb{E}_1$, $p_2 \in \mathbb{E}_2$ son tales que $h(\pi_1(p_1)) = \pi_2(p_2)$.

- Si $\tau_2 \circ h = \tau_1$ y $\mu_2 \circ h = \mu_1$, entonces existe una única isometría de Killing que preserva la orientación $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ con $f(p_1) = p_2$.
- Si $\tau_2 \circ h = -\tau_1$ y $\mu_2 \circ h = \mu_1$, entonces existe una única isometría de Killing que invierte la orientación $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ con $f(p_1) = p_2$.

Este resultado es constructivo cuando trabajamos con métricas canónicas:

- Dada $h : M_1 \to M_2$, existe $d \in C^\infty(M)$ tal que la aplicación $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ es de la forma $(x, y, z) \mapsto (h(x, y), \pm z + d(x, y))$.
- La condición de isometría se convierte en un sistema de EDPs de primer orden para d y $\tau_2 \circ h = \pm\tau_1$ es la condición de integrabilidad.

Conexión de una submersión de Killing

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing unitaria. Supondremos que trabajamos (localmente) con la métrica canónica en $\mathbb{E}$, de forma que

$$E_1 = \frac{\partial_x}{\lambda} + a\partial_z, \quad E_2 = \frac{\partial_y}{\lambda} + b\partial_z, \quad E_3 = \partial_z$$

es una base ortonormal para $a, b, \lambda \in C^\infty(\Omega)$, con $\lambda > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Además,

$$[E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0, \qquad [E_1, E_2] = \frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_1 - \frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_2 + 2\tau E_3.$$

De la fórmula de Koszul

$$\langle \overline{\nabla}_X Y, Z \rangle = \frac{X(\langle Y,Z\rangle) + Y(\langle X,Z\rangle) - Z(\langle X,Y\rangle) + \langle [X,Y],Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle}{2}$$

se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_{E_1} E_1 = -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_2, && \overline{\nabla}_{E_1} E_2 = \frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_1 + \tau E_3, && \overline{\nabla}_{E_1} E_3 = -\tau E_2,\\
&\overline{\nabla}_{E_2} E_1 = \frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_2 - \tau E_3, && \overline{\nabla}_{E_2} E_2 = -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_1, && \overline{\nabla}_{E_2} E_3 = \tau E_1,\\
&\overline{\nabla}_{E_3} E_1 = -\tau E_2, && \overline{\nabla}_{E_3} E_2 = \tau E_1, && \overline{\nabla}_{E_3} E_3 = 0.
\end{aligned}$$

Tensor de curvatura de una submersión de Killing

El tensor de curvatura de cuatro variables está dado por

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z.$$

Usando los cálculos anteriores para $\overline{\nabla}$ llegamos a que

$$\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_1 &= -(K_M - 3\tau^2)E_2 - E_1(\tau)E_3,\\
R(E_1,E_2)E_2 &= (K_M - 3\tau^2)E_1 - E_2(\tau)E_3,\\
R(E_1,E_2)E_3 &= E_1(\tau)E_1 + E_2(\tau)E_2,\\
R(E_1,E_3)E_1 &= -E_1(\tau)E_2 - \tau^2 E_3,\\
R(E_1,E_3)E_2 &= E_1(\tau)E_1,\\
R(E_1,E_3)E_3 &= \tau^2 E_1,\\
R(E_2,E_3)E_1 &= -\langle T, E_2\rangle E_2 + a_{21}E_3,\\
R(E_2,E_3)E_2 &= E_2(\tau)E_1 - \tau^2 E_3,\\
R(E_2,E_3)E_3 &= \tau^2 E_3,
\end{aligned}$$

donde $K_M = -\frac{\Delta_0(\log\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\lambda_x^2+\lambda_y^2}{\lambda^4} - \frac{\lambda_{xx}+\lambda_{yy}}{\lambda^3}$ es la curvatura de M.

Más curvaturas de una submersión de Killing

Sean $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing unitaria y $p \in \mathbb{E}$.

- Dada una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de un plano vectorial $\Pi \subset T_p\mathbb{E}$, la curvatura seccional de Π está dada por

$$\begin{aligned} K(\Pi) &= \langle \overline{R}(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle \\ &= \nu^2(K_M - 3\tau^2) + (1 - \nu^2)\tau^2 - 2\nu\langle N \wedge \xi_p, (\overline{\nabla}\tau)_p \rangle, \end{aligned}$$

  donde $\nu = \langle N, \xi_p \rangle$ y N es un normal unitario a Π.

- Dado $u \in T_p\mathbb{E}$ unitario, el tensor de Ricci en u está dado por

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ric}}(u) &= \sum_{i=1}^{3} \langle \overline{R}(E_i, v)v, E_i \rangle \\ &= (K_M - 2\tau^2) - \langle u, \xi_p \rangle^2 (K_M - 4\tau^2) + 2\langle u, \xi_p \rangle \langle u \wedge \xi_p, (\overline{\nabla}\tau)_p \rangle \end{aligned}$$

  Observemos que $\overline{\mathrm{Ric}}(\xi) = 2\tau^2 \geq 0$.

- La curvatura escalar en p está dada por

$$S = \sum_{i=1}^{3} \overline{\mathrm{Ric}}(E_i) = 2(K_M - \tau^2).$$

Submersiones de Killing homogéneas

Sea $\pi : \mathbb{E} \to M$ una submersión de Killing unitaria tal que $\mathbb{E}$ es homogéneo.

- La curvatura escalar $S = 2(K_M - \tau)$ es constante.
- Dado $p \in \mathbb{E}$, $\overline{\mathrm{Ric}}(u) = K_M - 2\tau^2$ para todo $u \in T_p\mathbb{E}$ horizontal. Además:
  - La esfera unidad $\mathbb{S}_p \subset T_p\mathbb{E}$ contiene un círculo máximo donde $\overline{\mathrm{Ric}} = K_M - 2\tau^2$.
  - Una isometría $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ lleva círculos máximos de $\mathbb{S}_p$ en círculos máximos de $\mathbb{S}_{f(p)}$.
  - Dos círculos máximos de una esfera siempre se cortan.

  Esto nos dice que $K_M - 2\tau^2$ también es constante.

Por tanto, existen $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ tales que π es un cociente de la única submersión de Killing unitaria con curvatura del fibrado τ sobre la superficie completa y simplemente conexa de curvatura constante κ.

$$\pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \to \mathbb{M}^2(\kappa)$$

Modelos para $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$

Modelo rotacionalmente invariante

Dados $\kappa,\tau\in\mathbb{R}$, sea $\lambda(x,y,z)=(1+\frac{\kappa}{4}(x^2+y^2))^{-1}$ en

$$\Omega_\kappa=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1+\tfrac{\kappa}{4}(x^2+y^2)>0\right\}=\begin{cases}\mathbb{D}(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}) & \text{si } \kappa<0,\\ \mathbb{R}^2 & \text{si } \kappa\geq 0.\end{cases}$$

Entonces, $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ es localmente isométrico a $\Omega_\kappa\times\mathbb{R}$ provisto de la única métrica riemanniana que tiene por base ortonormal

$$E_1=\tfrac{1}{\lambda}\partial_x-\tau y\partial_z,\quad E_2=\tfrac{1}{\lambda}\partial_y+\tau x\partial_z,\quad E_3=\partial_z,$$

donde la submersión toma la forma $(x,y,z)\mapsto(x,y)$.

- Este modelo destroza la topología global para $\kappa>0$

Modelo de SU(2) para $\kappa>0$ y $\tau\neq 0$

Es $\mathbb{S}^3\subset\mathbb{C}^2$ con la única métrica riemanniana que tiene por base ortonormal

$$E_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{\kappa}(-i\bar{w},i\bar{z}),\qquad E_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{\kappa}(-\bar{w},\bar{z}),\qquad E_3=\tfrac{\kappa}{4\tau}(iz,iw),$$

donde la submersión toma la forma $(z,w)\mapsto\frac{2}{\sqrt{\kappa}}\left(z\bar{w},\frac{1}{2}(|z|^2-|w|^2)\right)$

Construcción de más modelos

Modelo del semiespacio para $\kappa < 0$

Sea $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y > 0\}$ y $\lambda = \frac{1}{y\sqrt{-\kappa}}$. El modelo del semiespacio es $H \times \mathbb{R}$ con la única métrica riemanniana que tiene por base

$$E_1 = \frac{\partial_x}{\lambda} + \frac{2\tau}{\sqrt{-\kappa}}\partial_z, \qquad E_2 = \frac{\partial_y}{\lambda}, \qquad E_3 = \partial_z,$$

donde la submersión toma la forma $(z, w) \mapsto \frac{2}{\sqrt{\kappa}}\left(z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2)\right)$.

Una isometría entre modelos es $T : \mathbb{D}(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}) \times \mathbb{R} \to H \times \mathbb{R}$ dada por

$$T(x, y, z) = \left(\frac{\frac{4}{\sqrt{-\kappa}}y}{(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}} + x)^2 + y^2}, \frac{-\frac{4}{\kappa} - x^2 - y^2}{(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}} + x)^2 + y^2}, z + \frac{4\tau}{\kappa}\arccos\left(\frac{y}{\sqrt{(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}} + x)^2 + y^2}}\right)\right).$$

Resumen: ¿Qué sabemos de los espacios $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$?

	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	SU(2)	Nil_3	$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$

- Contienen a los espacios forma $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ para $\kappa - 4\tau^2 = 0$.
- Homotecia $\Phi : \mathbb{E}(\lambda^2\kappa, \lambda\tau) \to \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ tal que $\Phi^* ds^2_{\mathbb{E}(\kappa,\tau)} = \lambda^2 ds^2_{\mathbb{E}(\lambda^2\kappa,\lambda\tau)}$

Geodésicas

- Son curvas γ ppa con $\langle \gamma', \xi \rangle$ constante que se proyectan sobre curvas de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ con curvatura constante $\kappa_g = 2\tau\langle \gamma', \xi \rangle$.

Curvaturas

- Conocemos explícitamente todos los tipos de curvatura.

Isometrías

- Toda isometría de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ se levanta a una isometría de Killing de $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ que preserva la orientación (única salvo traslaciones verticales).
- Si $\tau = 0$ también se levanta invirtiendo la orientación.
- Toda isometría es de Killing si $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$.

¿Por qué estudiar los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$?

1. Atendiendo a la simetría de los espacios, es el paso natural después de los espacios forma $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3$.
   - Algunas técnicas se extienden con mayor o menor dificultad.
   - Otras técnicas necesitan ser desarrolladas de forma específica.
2. Ganaron relevancia pues contienen algunas geometrías de Thurston

$$\mathbb{R}^3 \quad \mathbb{S}^3 \quad \mathbb{H}^3 \quad \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \quad \mathrm{Nil}_3 \quad \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Sol}_3$$

   - Geometrización de superficies cerradas y orientables.
     - Clasificación topológica: género.
     - Clasificación geométrica: signo de la característica de Euler.
   - Geometrización de 3-variedades cerradas y orientables.
     (a) Descomponer en sumandos primos $N = P_1 \# \ldots \# P_r$ (de forma única salvo reordenamiento, homeomorfismo y factores triviales).
     (b) Cada sumando P_i se corta a lo largo de toros de forma que cada una de las componentes se modela como una de las 8 geometrías.

   Este proceso condujo a la resolución de la conjetura de Poincaré.