Superficies isoparamétricas en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

José M. Manzano

Seminario de Geometría
22 de febrero de 2019

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Trabajo financiado por el proyecto de investigación *MEC-FEDER* (MTM2017-89677-P) y el programa de excelencia *Severo Ochoa* (SEV-2015-0554)

Basado en el preprint

- M. Domínguez-Vázquez, —. Isoparametric surfaces in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$-spaces. arXiv:1803.06154.

Contenidos

Introducción

Superficies con diferencial de Abresch–Rosenberg nula

Superficies con curvaturas principales constantes

Superficies isoparamétricas

Introducción

Definición

Una hipersuperficie Σ de una variedad Riemanniana M se dice isoparamétrica si sus hipersuperficies paralelas (equidistantes) Σ_t tienen curvatura media constante para t suficientemente pequeño.

Cartan Si $M \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{S}^n\}$, entonces Σ es isoparamétrica si, y sólo si, tiene curvaturas principales constantes.

Cartan-Segre Clasificaron las hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{H}^n$ y todas ellas son homogéneas.

¿$\mathbb{S}^n$? Número de curv. principales: $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (Cartan).

- $g \leq 3$ Σ es homogénea (Cartan).
- $g = 4$ Σ es homogénea o un ejemplo de Ferus-Karcher-Münzner (Cecil-Chi-Jensen, 2007), con excepciones (estudiadas por Chi).
- $g = 6$ Misma multiplicidad $m \in \{1, 2\}$ (Abresch) y Σ es homogénea (Dorfmeister-Neher ($m = 1$) y Miyaoka ($m = 2$)).

Espacios $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$

Las 3-variedades simplemente conexas y homogéneas con grupo de isometrías de dimensión 4 pertenecen a una familia $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$, $\kappa,\tau\in\mathbb{R}$.

	$\kappa>0$	$\kappa=0$	$\kappa<0$
$\tau=0$	$\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$
$\tau\neq 0$	$\mathbb{S}^3_b$	Nil_3	$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$

- Incluyen todas las geometrias de Thurston salvo $\mathbb{H}^3$ y Sol_3.
- $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ admite una submersión riemanniana sobre $\mathbb{M}^2(\kappa)$ cuyas fibras son las curvas integrales de un campo de Killing unitario.

  $\rightsquigarrow$ Los conceptos *vertical* y *horizontal* son naturales en $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$.
- La constante τ es la curvatura del fibrado y mide la integrabilidad de la distribución horizontal.
- Existe una correspondencia isométrica (Daniel):

$$H\text{-superficies en } \mathbb{E}(\kappa,\tau) \quad\longleftrightarrow\quad H^*\text{-superficies en } \mathbb{E}(\kappa^*,\tau^*)$$

siempre que $4H^2+\kappa=4(H^*)^2+\kappa^*$ y $\kappa-4\tau^2=\kappa^*-4(\tau^*)^2$

Clasificación

Teorema (Domínguez-Vázquez, —)

Sea $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ con $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. Equivalen:

(i) Σ es un abierto de una superficie homogénea;

(ii) Σ es isoparamétrica;

(iii) Σ tiene curvaturas principales constantes;

(iv) Σ es un abierto de
- (a) un cilindro vertical $Z_{H,\kappa,\tau}$ para todo $H,\kappa,\tau \in \mathbb{R}$
- (b) una sección horizontal $S_{H,\kappa,\tau}$ con $\tau = H = 0$, o
- (c) un helicoide parabólico $P_{H,\kappa,\tau}$ con $4H^2 + \kappa < 0$.

(v) Σ tiene curvatura media y ángulo constantes (Espinar–Rosenberg)

(vi) Σ tiene curvatura media y curvatura de Gauss constante (conjetura)

Esquema de demostración:

(i $\Rightarrow$ ii) Trivial (cierta en general).

(ii $\Rightarrow$ iii) Cálculo de la curvatura media de superficies paralelas.

(iii $\Rightarrow$ iv) Reducir al caso $Q = 0$.

(iv $\Rightarrow$ i) Trivial (estudio de ejemplos).

Modelos para $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$

Modelo del disco:

$$\boxed{\mathbb{D}\left(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}\right)\times\mathbb{R},\quad \mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{(1+\frac{\kappa}{4}(x^2+y^2))^2}+\left(\mathrm{d}z+\frac{\tau\,(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)}{1+\frac{\kappa}{4}(x^2+y^2)}\right)^2}$$

- La submersión de Killing es $(x,y,z)\mapsto(x,y)$: omite una fibra si $\kappa>0$.
- Rotaciones respecto del eje z son isometrías.

Modelo del semiplano (sólo para $\kappa<0$):

$$\boxed{\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R},\quad \mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{-\kappa y^2}+\left(\mathrm{d}z-\frac{2\tau}{\kappa y}\mathrm{d}x\right)^2}$$

- La submersión de Killing es $(x,y,z)\mapsto(x,y)$ globalmente.
- $(x,y,z)\mapsto(x+a,y,z)$ son isometrías (traslaciones parabólicas) y también $(x,y,z)\mapsto(\lambda x,\lambda y,z)$ (traslaciones hiperbólicas)

Ejemplos relevantes I

Superficies rotacionalmente invariantes $S_{H,\kappa,\tau}$ (para todo $H, \tau, \kappa \in \mathbb{R}$).

$$\boxed{X(u,v) = \left(v\cos(u), v\sin(u), \pm\int_0^v \frac{-4Hs\sqrt{1+\tau^2 s^2}\,\mathrm{d}s}{(4+\kappa s^2)\sqrt{1-H^2s^2}}\right)}$$

donde $u \in \mathbb{R}$, $v \in \begin{cases} \left[0, \min\{\frac{1}{H}, \frac{2}{\sqrt{-\kappa}}\}\right) & \text{si } \kappa < 0 \\ \left[0, \frac{1}{H}\right) & \text{si } \kappa \geq 0 \end{cases}.$

- Son H-esferas para $4H^2 + \kappa > 0$ y H-grafos enteros para $4H^2 + \kappa \leq 0$.

Superficies helicoidales $C_{H,\kappa,\tau}$ (sólo para $4H^2 + \kappa < 0$)

$$\boxed{X(u,v) = \left(v\cos(u), v\sin(u), \frac{4\tau}{\kappa}u \pm \int_{\frac{4H}{|\kappa|}}^v \frac{16H\sqrt{16\tau^2+\kappa^2s^2}\,\mathrm{d}s}{\kappa s(4+\kappa s^2)\sqrt{\kappa^2s^2-16H^2}}\right)}$$

donde $u \in \mathbb{R}$, $v \in \left[\frac{4H}{-\kappa}, \frac{2}{\sqrt{-\kappa}}\right)$.

- Son H-catenoides para $\tau = 0$ y helicoides minimales para $H = 0$.
- Salvo estos dos casos, las demás no son embebidas.

Ejemplos relevantes II

Helicoides parabólicos $P_{H,\kappa,\tau}$ (sólo para $4H^2+\kappa\leq 0$).

$$\boxed{X(u,v)=\left(u,v,\frac{2H\sqrt{-\kappa+4\tau^2}}{-\kappa\sqrt{-\kappa-4H^2}}\log(v)\right)}$$

donde $u,v\in\mathbb{R}$ y $v>0$ si $\kappa+4H^2<0$; horocilindro/plano si $\kappa+4H^2=0$.

- Son H-grafos enteros homogéneos invariantes por los grupos

$$(x,y,z)\mapsto(x+t,y,z),\qquad (x,y,z)\mapsto\left(e^s x,e^s y,z-\frac{2H\sqrt{-\kappa+4\tau^2}}{-\kappa\sqrt{-\kappa-4H^2}}s\right)$$

- Son subgrupos de $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ como grupo de Lie no-unimodular.

Cilindros verticales $Z_{H,\kappa,\tau}=\pi^{-1}(\Gamma)$ (para todo $H,\tau,\kappa\in\mathbb{R}$).

- Son H-cilindros para $4H^2+\kappa>0$ y H-planos para $4H^2+\kappa\leq 0$.
- Son homogéneos: invariantes por traslaciones verticales y por translaciones a lo largo de la curva generatriz.

Secciones horizontales: Se recuperan como $S_{0,\kappa,0}=C_{0,\kappa,0}=P_{0,\kappa,0}$.

Clasificación de superficies con $Q = 0$

Teorema (Domínguez-Vázquez,—)

Sea $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ una H-superficie, $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. Equivalen:

(i) La diferencial de Abresch–Rosenberg Q de Σ se anula idénticamente.

(ii) Σ es congruente con un abierto de $S_{H,\kappa,\tau}$, $C_{H,\kappa,\tau}$ ó $P_{H,\kappa,\tau}$.

$$\boxed{\frac{q}{\kappa-4\tau^2} = \frac{\kappa-4\tau^2}{4}\left(\frac{4H^2+\kappa}{\kappa-4\tau^2}-\nu^2\right)\left(\frac{4H^2+\kappa-4K}{\kappa-4\tau^2}+3\nu^2\right)-\|\nabla\nu\|^2}$$

Demostración.

- $\Sigma^* \looparrowright \mathbb{E}(\kappa^*,0)$ con $\kappa^* = \kappa - 4\tau^2$ y $H^* = \sqrt{H^2+\tau^2}$ hermana de Σ
- Σ^* también tiene $Q \equiv 0$. Abresch–Rosenberg probaron que:
  - Σ^* y Σ pueden suponerse completas.
  - Σ^* es congruente con una superficie S_{H^*,κ^*} $(\kappa + 4H^2 > 0)$, D_{H^*,κ^*} $(\kappa + 4H^2 \leq 0)$, C_{H^*,κ^*} $(\kappa + 4H^2 < 0)$ ó P_{H^*,κ^*} $(\kappa + 4H^2 \leq 0)$
- Como las superficies $S_{H,\kappa,\tau}$, $C_{H,\kappa,\tau}$ y $P_{H,\kappa,\tau}$ tienen $Q \equiv 0$, han de ser las únicas con $Q \equiv 0$ por conteo. $\square$

Clasificación de superficies con CPC

Supongamos que $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$, $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, tiene CPC.

- Podemos suponer que Σ no es totalmente umbilical (Souam–Toubiana) y tomar base de dir. principales $\{e_1, e_2\}$ con curv. principales $\kappa_1 \neq \kappa_2$.
- Podemos suponer que la función ángulo ν no es idénticamente 0 ó ± 1.
- Los símbolos de Christoffel $p_1, p_2 \in C^\infty(\Sigma)$ satisfacen

  $$\nabla_{e_1} e_1 = p_1 e_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -p_1 e_1, \quad \nabla_{e_2} e_1 = p_2 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -p_2 e_1.$$

  lo que nos permite calcular $[e_1, e_2] = -p_1 e_1 - p_2 e_2$ y

  $$\overline{R}(e_1, e_2)N = (\kappa_2 - \kappa_1)(p_1 e_1 - p_2 e_2).$$

  La expresión del tensor de curvatura de $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ nos da

  $$\boxed{p_1 = \sigma\nu\langle T, e_2\rangle} \qquad \boxed{p_2 = \sigma\nu\langle T, e_1\rangle} \qquad \text{con } \sigma = \frac{\kappa - 4\tau^2}{\kappa_1 - \kappa_2}$$

- La curvatura de Gauss de Σ cumple

  $$K = \langle \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1,e_2]} e_2, e_1\rangle = e_2(p_1) - e_1(p_2) - p_1^2 - p_2^2$$

  - $p_1^2 + p_2^2 = \sigma^2\nu^2(\langle T, e_1\rangle^2 + \langle T, e_2\rangle^2) = \sigma^2\nu^2\|T\|^2 = \sigma^2\nu^2(1-\nu^2)$
  - $e_2(p_1) = \sigma(\kappa_2\nu^2 - \sigma\nu^2\langle T, e_1\rangle^2 + \tau\langle T, e_1\rangle\langle T, e_2\rangle - \kappa_2\langle T, e_2\rangle^2)$
  - $e_1(p_2) = \kappa_1\nu^2 - \kappa_1\langle T, e_1\rangle^2 - \tau\langle T, e_1\rangle\langle T, e_2\rangle + \sigma\nu^2\langle T, e_2\rangle^2$

Clasificación de superficies con CPC

Supongamos que $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$, $\kappa-4\tau^2\neq 0$, tiene CPC. Entonces:

$$\boxed{\begin{aligned}\kappa_1\langle T,e_1\rangle^2+2\tau\langle T,e_1\rangle\langle T,e_2\rangle-\kappa_2\langle T,e_2\rangle^2&=\sigma^{-1}(\kappa_1\kappa_2+\tau^2)\\&\quad+2\nu^2(\sigma(1-\nu^2)+\kappa_1-\kappa_2)\end{aligned}}$$

(a) Si $\kappa_1=-\kappa_2$ y $\tau=0$, el LHS es igual a $\kappa_1(1-\nu^2)$ y tenemos un polinomio de grado 4 con coeficientes constantes, luego ν es constante.
$\rightsquigarrow$ Obtenemos secciones horizontales y cilindros verticales.

(b) Supongamos que $\kappa_1\neq-\kappa_2$ o bien $\tau\neq 0$.

- Junto con $\langle T,e_1\rangle^2+\langle T,e_2\rangle^2=1$ tenemos un sistema cuadrático en $\langle T,e_1\rangle$ y $\langle T,e_2\rangle$, de donde $\langle T,e_i\rangle$ son funciones de ν:

$$\langle\nabla\langle T,e_i\rangle,J\nabla\nu\rangle=0\qquad i\in\{1,2\}.$$

Esta ecuación puede reescribirse como

$$\boxed{\kappa_1\langle T,e_1\rangle^2+2\tau\langle T,e_1\rangle\langle T,e_2\rangle-\kappa_2\,\langle T,e_2\rangle^2=\sigma^{-1}(\kappa_1\kappa_2+\tau^2)}$$

- Obtenemos que $\nabla\nu=0$, de donde $\kappa_1\kappa_2+\tau^2=0$. Por tanto:

$$\nu^2=1+\sigma^{-1}(\kappa_1-\kappa_2)=1+\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{\kappa-4\tau^2}=1+\frac{4H^2+4\tau^2}{\kappa-4\tau^2}=\frac{4H^2+\kappa}{\kappa-4\tau^2},$$

de donde se sigue que $q=0$ y $\Sigma\cong P_{H,\kappa,\tau}$.

Geodésicas en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ una geodésica con $\|\gamma'\| = 1$. Entonces,

- $\pi \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{M}^2(\kappa)$ tiene curvatura y velocidad constantes.
- $\langle \gamma', \xi \rangle$ es constante.

No obstante, las expresiones de las geodésicas son complejas si $\tau \neq 0$.

- Heisenberg $\mathrm{Nil}_3(\tau) = \mathbb{E}(0, \tau)$ (con $\gamma(0) = (0, 0, 0)$):
  - Horizontales: $\gamma_{\theta,\pi/2}(t) = (t\cos(\theta), t\sin(\theta), 0)$
  - Vertical: $\gamma_{\theta,0}(t) = (0, 0, t)$
  - Resto de geodésicas: $\gamma_{\theta,\phi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\tan(\phi)}{2\tau}\left(\cos(2\tau\cos(\phi)t + \theta) - \cos(\theta)\right), \\
y(t) &= \frac{\tan(\phi)}{2\tau}\left(\sin(2\tau\cos(\phi)t + \theta) - \sin(\theta)\right), \\
z(t) &= \frac{1 + \cos^2(\phi)}{2\cos(\phi)}\, t - \frac{\tan^2(\phi)}{4\tau}\sin(2\tau\cos(\phi)t),
\end{aligned}
$$

Geodésicas en $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$

- Grupo especial $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{E}(\kappa,\tau)$, $\kappa < 0$, $\tau \neq 0$

  Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ geodésica (modelo del disco) con $\gamma(0) = (0,0,0)$ y $\|\gamma'\| = 1$. Definimos $\boxed{\delta = (\kappa - 4\tau^2)\langle\gamma', \xi\rangle^2 - \kappa}$.

  - Elípticas ($0 < \delta \leq -\kappa$): se proyectan en círculo de $\mathbb{H}^2(\kappa)$.

$$x(t) = \frac{4a(\kappa a^2 - 4)(1 - \cos(mt))}{16 + \kappa^2 a^4 + 8\kappa a^2 \cos(mt)},$$

$$y(t) = \frac{4a(\kappa a^2 + 4)\sin(mt)}{16 + \kappa^2 a^4 + 8\kappa a^2 \cos(mt)},$$

$$z(t) = \frac{4 + a^2(8\tau^2 - \kappa)}{\sqrt{(4 - \kappa a^2)^2 + 64a^2\tau^2}}\, t + \frac{4\tau}{\kappa} \arctan\left(\frac{-\kappa a^2 \sin(mt)}{4 + \kappa a^2 \cos(mt)}\right),$$

  - Hiperbólicas ($-4\tau^2 \leq \delta < 0$): se proyectan en hiperciclo de $\mathbb{H}^2(\kappa)$.

$$x(t) = \frac{4a \sinh^2(mt)}{4 + \kappa a^2 \cosh^2(mt)},$$

$$y(t) = \frac{a\sqrt{-\kappa a^2 - 4}\,\sinh(2mt)}{4 + \kappa a^2 \cosh^2(mt)},$$

$$z(t) = \frac{4\tau^2 - \kappa}{\kappa\sqrt{1 + a^2\tau^2}}\, t + \frac{4\tau}{\kappa} \arctan\left(\frac{2\tanh(mt)}{\sqrt{-\kappa a^2 - 4}}\right),$$

Geodésicas en $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$

- Grupo especial $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{E}(\kappa,\tau)$, $\kappa < 0$, $\tau \neq 0$
  Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ geodésica (modelo del disco) con $\gamma(0) = (0,0,0)$ y $\|\gamma'\| = 1$. Definimos $\boxed{\delta = (\kappa - 4\tau^2)\langle \gamma', \xi\rangle^2 - \kappa}$.
  - Parabólicas ($\delta = 0$): se proyectan en horociclo de $\mathbb{H}^2(\kappa)$.

$$x(t) = \frac{-2\sqrt{-\kappa}\tau^2 t^2}{4\tau^2 - \kappa(1+\tau^2 t^2)},$$

$$y(t) = \frac{2\tau\sqrt{4\tau^2-\kappa}\, t}{4\tau^2 - \kappa(1+\tau^2 t^2)},$$

$$z(t) = \frac{\sqrt{4\tau^2-\kappa}}{\sqrt{-\kappa}}\, t + \frac{4\tau}{\kappa} \arctan\left(\frac{\tau\sqrt{-\kappa}}{\sqrt{4\tau^2-\kappa}}\, t \right).$$

La aplicación exponencial es muy compleja. De hecho no se conocen expresiones explícitas para bolas geodésicas de $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ si $\tau \neq 0$.

Usaremos un método alternativo para calcular la curvatura media de superficies paralelas basado en los campos de Jacobi.

Curvatura media de superficies paralelas I

Sea $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ una superficie con normal unitario local N.

- El traslado equidistante $\Phi:\Sigma\times\mathbb{R}\to\mathbb{E}(\kappa,\tau)$, $\Phi(p,r)=\exp_p(rN_p)$ produce una foliación (local) $\mathcal{U}=\cup_{r\in(-\varepsilon,\varepsilon)}\Phi(\Sigma,r)$.
- Nos restringimos a $\mathcal{U}$, a donde extendemos ν, N y la rotación J.
  $\rightsquigarrow$ ν es constante a lo largo de γ_p.
- Podemos suponer que ν no es constante 0 ó ± 1, luego tenemos un sistema ortonormal $\{U_1,U_2,N\}$ en $\mathcal{U}$ dado por
  $$U_1=\frac{\xi-\nu N}{\sqrt{1-\nu^2}},\qquad U_2=JU_1.$$
  Se cumple que $\overline{\nabla}_N U_i=\tau J U_i$.

Un campo $\zeta(t)$ a lo largo de γ_p es de Jacobi si $\zeta''+\overline{R}(\zeta,\gamma')\gamma'=0$. Si las condiciones iniciales $\zeta(0)$ y $\zeta'(0)$ son ortogonales a γ_p', podremos expresar $\zeta=b_1U_1+b_2U_2$ y la ecuación de Jacobi se escribe como

$$\boxed{b_1''-2\tau b_2'=0}\qquad \boxed{b_2''+2\tau b_1'+(\kappa-4\tau^2)(1-\nu^2)b_2=0}$$

Curvatura media de superficies paralelas II

Sea $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ una superficie con normal unitario local N.

- Campos de Jacobi ζ_j con $\zeta_j(0) = U_j(p)$ y $\zeta_j'(0) = -AU_j(p)$, $j \in \{1,2\}$. Se traducen en condiciones iniciales

$$
\begin{array}{llll}
b_{11}(0) = 1, & b_{22}(0) = 1, & b_{12}(0) = 0, & b_{21}(0) = 0, \\
b_{11}'(0) = -a_{11}, & b_{22}'(0) = -a_{22}, & b_{12}'(0) = \tau - a_{12}, & b_{21}'(0) = -\tau - a_{12}.
\end{array}
$$

donde $AU_i = a_{i1}U_1 + a_{i2}U_2$. La ecuación de Jacobi nos da

$$
\begin{aligned}
b_{11}(t) &= 1 + 4\delta^{-1}\tau^2 a_{11} s_\delta(t) - 2\delta^{-1}\tau\,(a_{12}+\tau)\,(c_\delta(t)-1) - a_{11}\delta^{-1}(\delta+4\tau^2)t, \\
b_{21}(t) &= 2\tau\delta^{-1}a_{11}\big(c_\delta(t)-1\big) - \big(a_{12}+\tau\big)s_\delta(t), \\
b_{12}(t) &= \delta^{-1}\Big(2\tau(2\tau a_{12}+\delta+2\tau^2)s_\delta(t) - 2\tau a_{22}(c_\delta(t)-1) - (\delta+4\tau^2)(a_{12}+\tau)t\Big), \\
b_{22}(t) &= 1 - a_{22}s_\delta(t) + \delta^{-1}(2\tau a_{12}+\delta+2\tau^2)(c_\delta(t)-1),
\end{aligned}
$$

siendo $\delta = (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 - \kappa$ y

$$
s_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}}\sinh(t\sqrt{\delta}) & \text{si } \delta > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}}\sin(t\sqrt{-\delta}) & \text{si } \delta < 0, \end{cases} \qquad c_\delta(t) = \begin{cases} \cosh(t\sqrt{\delta}) & \text{si } \delta > 0, \\ \cos(t\sqrt{-\delta}) & \text{si } \delta < 0. \end{cases}
$$

Curvatura media de superficies paralelas III

Sea $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ una superficie con normal unitario local N.

- Sean los endomorfismos $B(r)$ y $C(r)$ de $T_{\gamma_p(r)}\Sigma^r$ dados por

$$B(r)U_j(\gamma_p(r)) = \zeta_j(r) \quad \rightsquigarrow \quad B(r) \equiv \begin{pmatrix} b_{11}(r) & b_{12}(r) \\ b_{21}(r) & b_{22}(r) \end{pmatrix},$$

$$C(r)U_j(\gamma_p(r)) = \zeta_j'(r) \quad \rightsquigarrow \quad C(r) = \begin{pmatrix} b_{11}'(r) + \tau b_{21}(r) & b_{12}'(r) + \tau b_{22}(r) \\ b_{21}'(r) - \tau b_{11}(r) & b_{22}'(r) - \tau b_{12}(r) \end{pmatrix}$$

Entonces el operador de Weingarten de Σ^r es

$$\boxed{A^r = -C(r)B(r)^{-1}}$$

y la curvatura media de Σ^r se puede calcular como

$$H(r) = -\frac{1}{2}\mathrm{traza}(C(r)B(r)^{-1}) = \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\det(B(r))}{2\det(B(r))}$$

Por tanto, $f(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\det(B(r)) + 2H(r)\det(B(r))$ es idénticamente nula.

Clasificación de superficies isoparamétricas

Sea $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ una superficie isoparamétrica.

- La siguiente función se anula idénticamente:

$$\begin{aligned}\delta^2 f(r) = {} & \delta\big(\delta^2+3\delta\tau^2+4\tau^4+2\tau(\delta+4\tau^2)a_{12}+(\delta-4\tau^2)(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\big)s_\delta(r)\\ & -\delta^2(a_{11}+a_{22})c_\delta(r)-\delta^2(\delta+4\tau^2)a_{11}rs_\delta(r)\\ & +\delta(\delta+4\tau^2)(a_{11}a_{22}-(\tau+a_{12})^2)rc_\delta(r)\\ & -2\delta(\delta+4\tau^2)((\tau+a_{12})^2-a_{11}a_{22})rH(r)s_\delta(r)\\ & -2\delta(\delta+4\tau^2)a_{11}rh(r)c_\delta(r)-2\delta(\delta a_{22}-4\tau^2a_{11})H(r)s_\delta(r)\\ & +2\big((\delta+4\tau^2)(\delta+4\tau a_{12})-8\tau^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2-\tau^2)\big)H(r)c_\delta(r)\\ & +8\tau\big(2\tau a_{11}a_{22}-(\tau+a_{12})(\delta+2\tau^2+2\tau a_{12})\big)H(r).\end{aligned}$$

  y $H(r)$ no depende del punto base $p\in\Sigma$.

  - De $f'(0)=0$ y $f''(0)=0$ se sigue que a_{12} y a_{11} sólo dependen de $\delta=(\kappa-4\tau^2)\nu^2-\kappa$ y de derivadas (constantes) de H en 0.
  - De $f'''(0)=0$ se obtiene que $q_1(\delta)\pm\tau\sqrt{q_2(\delta)}=0$, siendo q_1 y q_2 polinomios de grados 2 y 3 $\rightsquigarrow$ δ constante $\rightsquigarrow$ Σ es CPC. $\square$

Un corolario

De todo el análisis realizado en este artículo se deduce que las siguientes son clases preservadas por la correspondencia de Daniel:

- Superficies homogéneas,
- Superficies isoparamétricas,
- Superficies con curvaturas principales constantes,
- Cada una de las familias $S_{H,\kappa,\tau}$, $C_{H,\kappa,\tau}$, $P_{H,\kappa,\tau}$ y $Z_{H,\kappa,\tau}$.

Gracias por venir...

... y citadnos si os ha gustado.