Parabolicidad de hipersuperficies espaciales completas en ciertos espaciotiempos GRW. Aplicaciones a problemas de unicidad de hipersuperficies maximales.

Juan J. Salamanca

Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba
14071 - Córdoba
Email: jjsalamanca@uco.es

Taller de jóvenes investigadores de la REAG
Granada, 3-4 de octubre de 2013

Basado en:

A. Romero, R.M. Rubio and J.J. Salamanca, Uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic Generalized Robertson-Walker spacetimes, *Class. Quantum Grav.*, **V. 30, N. 11** (2013).

Índice

Índice

Motivación y objetivos

El problema que nos plantemos es estudiar nuevos resultados de unicidad para hipersuperficies completas maximales en ciertos espaciotiempos GRW. Su estudio viene motivado por

Física

- Cada una de ellas sirve como conjunto de valores iniciales para reconstruir el espaciotiempo solución a las ecuaciones de Einstein.
- Juegan un papel importante en el análisis del problema de Cauchy.
- La existencia de tales hipersuperficies implican, en varios casos, que el universo cambia de una fase expansiva a otra contractiva.

Geometría Diferencial

- Aparecen como puntos críticos de un problema variacional dado por el funcional área.
- Es conocida también su importancia histórica.

Motivación y objetivos

El problema que nos plantemos es estudiar nuevos resultados de unicidad para hipersuperficies completas maximales en ciertos espaciotiempos GRW. Su estudio viene motivado por

`Física`

- Cada una de ellas sirve como conjunto de valores iniciales para reconstruir el espaciotiempo solución a las ecuaciones de Einstein.
- Juegan un papel importante en el análisis del problema de Cauchy.
- La existencia de tales hipersuperficies implican, en varios casos, que el universo cambia de una fase expansiva a otra contractiva.

`Geometría Diferencial`

- Aparecen como puntos críticos de un problema variacional dado por el funcional área.
- Es conocida también su importancia histórica.

Motivación y objetivos

El problema que nos plantemos es estudiar nuevos resultados de unicidad para hipersuperficies completas maximales en ciertos espaciotiempos GRW. Su estudio viene motivado por

`Física`

- Cada una de ellas sirve como conjunto de valores iniciales para reconstruir el espaciotiempo solución a las ecuaciones de Einstein.
- Juegan un papel importante en el análisis del problema de Cauchy.
- La existencia de tales hipersuperficies implican, en varios casos, que el universo cambia de una fase expansiva a otra contractiva.

`Geometría Diferencial`

- Aparecen como puntos críticos de un problema variacional dado por el funcional área.
- Es conocida también su importancia histórica.

Índice

Espaciotiempos GRW

Consideremos $(I, -dt^2)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ junto con una variedad Riemanniana (F, g_F), y sea $f : I \to (0, \infty)$ una función diferenciable.

Llamamos **espaciotiempo generalizado de Robertson-Walker (GRW)**[1] a la variedad producto $I \times F$ dotada de la siguiente métrica Lorentziana

$$g = -\pi_I^*(dt^2) + f(t)^2\, \pi_F^*(g_F)\,,$$

donde π_I y π_F denotan las proyecciones sobre I y F.

Denotaremos este espaciotiempo por $M := I \times_f F$. La variedad (F, g_F) se le llama *fibra*, a $(I, -dt^2)$ *base*, y a f *función warping*.

[1] Introducidos en L.J. Alías, A. Romero y M. Sánches, Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Rel. Grav.*, **27** (1995), 71–84.

Consideremos $(I, -dt^2)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ junto con una variedad Riemanniana (F, g_F), y sea $f : I \to (0, \infty)$ una función diferenciable.

Llamamos **espaciotiempo generalizado de Robertson-Walker (GRW)**[1] a la variedad producto $I \times F$ dotada de la siguiente métrica Lorentziana

$$g = -\pi_I^*(dt^2) + f(t)^2 \, \pi_F^*(g_F) \, ,$$

donde π_I y π_F denotan las proyecciones sobre I y F.

Denotaremos este espaciotiempo por $M := I \times_f F$. La variedad (F, g_F) se le llama *fibra*, a $(I, -dt^2)$ *base*, y a f *función warping*.

[1] Introducidos en L.J. Alías, A. Romero y M. Sánches, Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Rel. Grav.*, **27** (1995), 71–84.

Ejemplos de espaciotiempos GRW

- El espaciotiempo de Lorentz-Minkowski, $f \equiv 1$, y fibra el espacio euclídeo.
- Cualquier Robertson-Walker (fibra 3-dimensional y de curvatura seccional constante), y, en particular, los modelos de Friedmann.
- El espaciotiempo de Einstein-De Sitter.
- El espaciotiempo de De Sitter.

Cuando f es no-localmente constante, el espaciotiempo GRW se dice que es propio. En el caso opuesto, un espaciotiempo GRW se dice estático cuando su función warping es constante.

Ejemplos de espaciotiempos GRW

- El espaciotiempo de Lorentz-Minkowski, $f \equiv 1$, y fibra el espacio euclídeo.
- Cualquier Robertson-Walker (fibra 3-dimensional y de curvatura seccional constante), y, en particular, los modelos de Friedmann.
- El espaciotiempo de Einstein-De Sitter.
- El espaciotiempo de De Sitter.

Cuando f es no-localmente constante, el espaciotiempo GRW se dice que es propio. En el caso opuesto, un espaciotiempo GRW se dice estático cuando su función warping es constante.

Ejemplos de espaciotiempos GRW

- El espaciotiempo de Lorentz-Minkowski, $f \equiv 1$, y fibra el espacio euclídeo.
- Cualquier Robertson-Walker (fibra 3-dimensional y de curvatura seccional constante), y, en particular, los modelos de Friedmann.
- El espaciotiempo de Einstein-De Sitter.
- El espaciotiempo de De Sitter.

Cuando f es no-localmente constante, el espaciotiempo GRW se dice que es propio. En el caso opuesto, un espaciotiempo GRW se dice estático cuando su función warping es constante.

Ejemplos de espaciotiempos GRW

- El espaciotiempo de Lorentz-Minkowski, $f \equiv 1$, y fibra el espacio euclídeo.
- Cualquier Robertson-Walker (fibra 3-dimensional y de curvatura seccional constante), y, en particular, los modelos de Friedmann.
- El espaciotiempo de Einstein-De Sitter.
- El espaciotiempo de De Sitter.

Cuando f es no-localmente constante, el espaciotiempo GRW se dice que es propio. En el caso opuesto, un espaciotiempo GRW se dice estático cuando su función warping es constante.

Ejemplos de espaciotiempos GRW

- El espaciotiempo de Lorentz-Minkowski, $f \equiv 1$, y fibra el espacio euclídeo.
- Cualquier Robertson-Walker (fibra 3-dimensional y de curvatura seccional constante), y, en particular, los modelos de Friedmann.
- El espaciotiempo de Einstein-De Sitter.
- El espaciotiempo de De Sitter.

Cuando f es no-localmente constante, el espaciotiempo GRW se dice que es propio. En el caso opuesto, un espaciotiempo GRW se dice estático cuando su función warping es constante.

Ejemplos de espaciotiempos GRW

- El espaciotiempo de Lorentz-Minkowski, $f \equiv 1$, y fibra el espacio euclídeo.
- Cualquier Robertson-Walker (fibra 3-dimensional y de curvatura seccional constante), y, en particular, los modelos de Friedmann.
- El espaciotiempo de Einstein-De Sitter.
- El espaciotiempo de De Sitter.

Cuando f es no-localmente constante, el espaciotiempo GRW se dice que es propio. En el caso opuesto, un espaciotiempo GRW se dice estático cuando su función warping es constante.

Algunas propiedades de los espaciotiempos GRW

- Cualquier espaciotiempo GRW con fibra completa es globalmente hiperbólico[2].
- El espacio físico para una determinada familia de observadores comóviles (asociados a ∂_t) es representado por copias homotéticas de la fibra $(F, g_{_F})$.
- Cuando este espacio físico es homogéneo e isótropo, entonces el espaciotiempo satisface el *Principio Cosmológico*[3].

[2] J.K. Beem, P.E. Ehrlich and K.L. Easly, Global Lorentzian Geometry.

[3] Véase, por ejemplo, P. Sharan, Spacetime, Geometry and Gravitation.

Cuando la fibra de un espaciotiempo GRW es compacta, entonces el espaciotiempo se dice *espacialmente cerrado*.

Esta familia ha sido útil para obtener modelos cosmológicos cerrados.

En estos espacios ambiente, diversos autores han estudiado el problema de unicidad de hipersuperficies maximales y de curvatura media constante[4].

[4] Por ejemplo, L.J. Alías, A. Romero, M. Sánchez, Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature and Calabi-Bernstein Type Problems, Tôhoku Math. J., **49** (1997), 337–345.

Una familia de espaciotiempos GRW I

Cuando la fibra de un espaciotiempo GRW es compacta, entonces el espaciotiempo se dice *espacialmente cerrado*.

Esta familia ha sido útil para obtener modelos cosmológicos cerrados.

En estos espacios ambiente, diversos autores han estudiado el problema de unicidad de hipersuperficies maximales y de curvatura media constante[4].

[4] Por ejemplo, L.J. Alías, A. Romero, M. Sánchez, Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature and Calabi-Bernstein Type Problems, Tôhoku Math. J., **49** (1997), 337–345.

Una familia de espaciotiempos GRW I

Cuando la fibra de un espaciotiempo GRW es compacta, entonces el espaciotiempo se dice *espacialmente cerrado*.

Esta familia ha sido útil para obtener modelos cosmológicos cerrados.

En estos espacios ambiente, diversos autores han estudiado el problema de unicidad de hipersuperficies maximales y de curvatura media constante[4].

[4] Por ejemplo, L.J. Alías, A. Romero, M. Sánchez, Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature and Calabi-Bernstein Type Problems, Tôhoku Math. J., **49** (1997), 337–345.

Una familia de espaciotiempos GRW II

Sin embargo, algunos argumentos observacionales y teóricos relacionados con el balance total de masa del universo sugieren la conveniencia de tomar modelos cosmológicos abiertos[5].

Por otro lado, es conocido que un espaciotiempo GRW espacialmente cerrado viola el principio holográfico[6].

[5] H.Y. Chiu, A cosmological model of universe, *Annals of Physics*, **43** (1967), 1–41.
[6] R. Bousso, The holographic principle, *Rev. Mod. Phys.*, **74** (2002), 825–874.

Espaciotiempos espacialmente parabólicos

Introducimos la siguiente noción: un espaciotiempo GRW es espacialmente parabólico si su fibra es una variedad Riemanniana parabólica; esto es, es una variedad Riemanniana completa no compacta y que no admite funciones superharmónicas positivas salvo las constantes.

Pueden entenderse como modelos intermedios entre el caso compacto y $\mathbb{L}^n$. Además, pueden resultar útiles para estudiar determinadas ecuaciones provenientes de la física desde un punto de vista cosmológico, como la ecuación del calor.

Espaciotiempos espacialmente parabólicos

Introducimos la siguiente noción: un espaciotiempo GRW es espacialmente parabólico si su fibra es una variedad Riemanniana parabólica; esto es, es una variedad Riemanniana completa no compacta y que no admite funciones superharmónicas positivas salvo las constantes.

Pueden entenderse como modelos intermedios entre el caso compacto y $\mathbb{L}^n$. Además, pueden resultar útiles para estudiar determinadas ecuaciones provenientes de la física desde un punto de vista cosmológico, como la ecuación del calor.

Índice

Hipersuperficies espaciales I

Una inmersión $x : S \to M$ se dice *espacial* si la métrica inducida sobre S, g_S, es Riemanniana. Nos referiremos a S como una hipersuperficie espacial.

Como todo GRW es orientable temporalmente, puede ser elegido $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(S)$ como el único campo vectorial temporal unitario normal a S globalmente definido en la misma orientación temporal que el campo $-\partial_t$.

El *ángulo hiperbólico* entre N y S se define mediante

$$\cosh \theta = g(N, \partial_t)$$

Hipersuperficies espaciales I

Una inmersión $x : S \to M$ se dice *espacial* si la métrica inducida sobre S, g_S, es Riemanniana. Nos referiremos a S como una hipersuperficie espacial.

Como todo GRW es orientable temporalmente, puede ser elegido $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(S)$ como el único campo vectorial temporal unitario normal a S globalmente definido en la misma orientación temporal que el campo $-\partial_t$.

El *ángulo hiperbólico* entre N y S se define mediante

$$\cosh\theta = g(N, \partial_t)$$

Hipersuperficies espaciales I

Una inmersión $x : S \to M$ se dice *espacial* si la métrica inducida sobre S, g_S, es Riemanniana. Nos referiremos a S como una hipersuperficie espacial.

Como todo GRW es orientable temporalmente, puede ser elegido $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(S)$ como el único campo vectorial temporal unitario normal a S globalmente definido en la misma orientación temporal que el campo $-\partial_t$.

El *ángulo hiperbólico* entre N y S se define mediante

$$\cosh\theta = g(N, \partial_t)$$

Hipersuperficies espaciales II

El operador de forma asociado a N es

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \,,$$

donde $\overline{\nabla}$ denota la conexión de Levi-Civita de M.

La función *curvatura media* asociada a N es

$$H := -(1/n)\,\mathrm{traza}(A)\,.$$

Una hipersuperficie espacial con $H = 0$ se le llama hipersuperficie maximal.

Hipersuperficies espaciales III

En todo espaciotiempo GRW, las hipersuperficies de nivel de la función t constituyen una familia distinguida de hipersuperficies espaciales, los slices espaciales.

Un slice espacial $t = t_0$ es totalmente umbilical y posee curvatura media constante $H = -f'(t_0)/f(t_0)$.

Observemos que la familia de slices espaciales folian todo el espaciotiempo.

Hipersuperficies espaciales IV

Una hipersuperficie se dice *contenida entre dos slices* si existen $t_1, t_2 \in I$, tal que

$$x(S) \subset [t_1, t_2] \times F\,.$$

Si definimos $\tau := \pi_I \circ x$, para una hipersuperficie maximal se tiene,

$$\Delta \tau = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\{n - \|\nabla \tau\|^2\}\,, \tag{1}$$

y

$$\Delta f(\tau) = n\,\frac{f'(\tau)^2}{f(\tau)} + f(\tau)(\log f)''(\tau)\|\nabla \tau\|^2\,. \tag{2}$$

Hipersuperficies espaciales IV

Una hipersuperficie se dice *contenida entre dos slices* si existen $t_1, t_2 \in I$, tal que

$$x(S) \subset [t_1, t_2] \times F\,.$$

Si definimos $\tau := \pi_I \circ x$, para una hipersuperficie maximal se tiene,

$$\Delta\tau = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\{n - \|\nabla\tau\|^2\}\,, \tag{1}$$

y

$$\Delta f(\tau) = n\,\frac{f'(\tau)^2}{f(\tau)} + f(\tau)(\log f)''(\tau)\|\nabla\tau\|^2\,. \tag{2}$$

Índice

Parabolicidad I

Una variedad Riemanniana M completa y no compacta se dice **parabólica** si las únicas funciones positivas superarmónicas que admite son las constantes; esto es, si las condiciones $\Delta u \leq 0$ y $u \geq 0$ implican que u es constante.

Ejemplo.- El espacio euclídeo, $\mathbb{R}^2$ es parabólico.

Teorema *

Una superficie Riemanniana completa (no compacta) con curvatura de Gauss positiva es parabólica.

(*) A. Hubber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, ***32*** *(1957), 13–72.*

Parabolicidad I

Una variedad Riemanniana M completa y no compacta se dice **parabólica** si las únicas funciones positivas superarmónicas que admite son las constantes; esto es, si las condiciones $\Delta u \leq 0$ y $u \geq 0$ implican que u es constante.

Ejemplo.- El espacio euclídeo, $\mathbb{R}^2$ es parabólico.

Teorema *

Una superficie Riemanniana completa (no compacta) con curvatura de Gauss positiva es parabólica.

(*) A. Hubber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, ***32*** *(1957), 13–72.*

Parabolicidad I

Una variedad Riemanniana M completa y no compacta se dice **parabólica** si las únicas funciones positivas superarmónicas que admite son las constantes; esto es, si las condiciones $\Delta u \leq 0$ y $u \geq 0$ implican que u es constante.

Ejemplo.- El espacio euclídeo, $\mathbb{R}^2$ es parabólico.

Teorema *

Una superficie Riemanniana completa (no compacta) con curvatura de Gauss positiva es parabólica.

(*) A. Hubber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, ***32*** *(1957), 13–72.*

Parabolicidad II

Teorema

Una variedad Riemanniana completa con crecimiento de volumen moderado es parabólica.

Existen ejemplos de variedades Riemannianas parabólicas cuya curvatura no está acotada inferiormente.

Parabolicidad II

Teorema

Una variedad Riemanniana completa con crecimiento de volumen moderado es parabólica.

Existen ejemplos de variedades Riemannianas parabólicas cuya curvatura no está acotada inferiormente.

Parabolicidad III

Sean (P, g) y (P', g') dos variedades Riemannianas. Un difeormorfismo ϕ de P en P' se llama cuasi-isometría si existe una constante $c \geq 1$ tal que

$$c^{-1} \left|v\right|_g \leq \left|d\varphi(v)\right|_{g'} \leq c \left|v\right|_g ,$$

para todo $v \in T_pP$, $p \in P$.

Parabolicidad III

Sean (P, g) y (P', g') dos variedades Riemannianas. Un difeormorfismo ϕ de P en P' se llama cuasi-isometría si existe una constante $c \geq 1$ tal que

$$c^{-1} \left|v\right|_g \leq \left|d\varphi(v)\right|_{g'} \leq c \left|v\right|_g ,$$

para todo $v \in T_p P$, $p \in P$.

Un resultado clave para nuestro trabajo es el siguiente[7],

Teorema

La parabolicidad es invariante frente a cuasi-isometrías. Es decir, dos variedades cuasi-isométricas son, simultáneamente, parabólicas o no parabólicas.

Ejemplo.- Sea (M, g) una variedad compacta, (M', g') una variedad parabólica y consideremos $h \in C^\infty(M)$ una función diferenciable. Entonces $(M \times_h M', g + h^2\, g')$ es una variedad parabólica.

[7] M. Kanai, Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **38** (1986), 227–238.

Parabolicidad IV

Un resultado clave para nuestro trabajo es el siguiente[7],

Teorema

La parabolicidad es invariante frente a cuasi-isometrías. Es decir, dos variedades cuasi-isométricas son, simultáneamente, parabólicas o no parabólicas.

Ejemplo.- Sea (M, g) una variedad compacta, (M', g') una variedad parabólica y consideremos $h \in C^\infty(M)$ una función diferenciable. Entonces $(M \times_h M', g + h^2\, g')$ es una variedad parabólica.

[7] M. Kanai, Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **38** (1986), 227–238.

Índice

Técnica

Proposición

Sea S una hipersuperficie espacial completa en un espaciotiempo GRW, cuya fibra posee un recubridor universal Riemanniano parabólico.

Si el ángulo hiperbólico de S está acotado y la función warping sobre S satisface:

- $\sup f(\tau) < \infty$ *y*
- $\inf f(\tau) > 0$,

entonces S es parabólica.

Resultados de unicidad I

Teorema 1

Sea S una hipersuperficie maximal completa de un espaciotiempo GRW propio cuya fibra posee un recubridor universal Riemanniano parabólico y cuya función warping satisface $(\log f)''(t) \leq 0$.

Si el ángulo hiperbólico de S está acotado y

- $f(\tau)$ *está acotado, y*
- $\inf(f(\tau)) > 0$,

entonces S debe de ser un slice espacial $t = t_0$, con $f'(t_0) = 0$.

Resultados de unicidad II

Teorema 2

Sea S una hipersuperficie maximal completa de un espaciotiempo GRW cuya fibra posee un recubridor universal Riemanniano parabólico y cuya función warping satisface $(\log f)''(t) \leq 0$.

Si el ángulo hiperbólico de S está acotado y S está comprendida entre dos slices, entonces S debe de ser un slice espacial $t = t_0$, con $f'(t_0) = 0$.

Teorema 3

Sea S una hipersuperficie maximal completa de un espaciotiempo GRW estático, $I \times F$, cuya fibra tiene curvatura de Ricci no-negativa y posee un recubridor universal Riemanniano parabólico.

Si el ángulo hiperbólico de S está acotado, entonces S debe de ser totalmente geodésica.

En general, la hipersuperficie no tiene que ser un slice, por ejemplo, considérese un plano no horizontal de $\mathbb{L}^3$.

Resultados de unicidad III

Teorema 3

Sea S una hipersuperficie maximal completa de un espaciotiempo GRW estático, $I \times F$, cuya fibra tiene curvatura de Ricci no-negativa y posee un recubridor universal Riemanniano parabólico.

Si el ángulo hiperbólico de S está acotado, entonces S debe de ser totalmente geodésica.

En general, la hipersuperficie no tiene que ser un slice, por ejemplo, considérese un plano no horizontal de $\mathbb{L}^3$.

Resultados de unicidad IV

Corolario

Las únicas hipersuperficies maximales completas con ángulo hiperbólico acotado de un espaciotiempo GRW estático $I \times F$, *donde* $F = \mathbb{S}^{2m} \times \mathbb{R}$ *está dotada de la métrica producto* $g + ds^2$, g *es una métrica Riemanniana sobre* $\mathbb{S}^{2m}$ *con curvatura de Ricci no negativa, son las hipersuperficies*

$$\left\{(t, x, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2m} \times \mathbb{R} : a_1 t + a_2 s + a_3 = 0\right\} ,$$

donde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *satisfacen* $-a_1^2 + a_2^2 < 0$.

Índice

Sea (F, g_F) una variedad Riemanniana (no compacta) y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable positiva. Para cada $u \in C^\infty(F)$ tal que $u(F) \subset I$ podemos considerar su grafo $\Sigma_u = \{(u(p), p) : p \in F\}$ en el espaciotiempo GRW $M = I \times_f F$. La métrica inducida

$$g_u := -du^2 + f(u)^2 \, g_F \, ,$$

que es Riemanniana si y sólo si u satisface $|Du| < f(u)$, donde Du denota el gradiente de u en (F, g_F).

Determinaremos, en varios casos de interés, todas las soluciones enteras (esto es, definidas sobre todo F) del siguiente problema,

$$\mathrm{div}\left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - \mid Du \mid^2}}\right) = -\frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 - \mid Du \mid^2}}\left(n + \frac{\mid Du \mid^2}{f(u)^2}\right), \tag{E.1}$$

$$\mid Du \mid < \lambda f(u), \quad 0 < \lambda < 1. \tag{E.2}$$

Nuevos resultados de tipo Calabi-Bernstein

Teorema 4

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable positiva no-localmente constante. Supongamos que* f *satisface* $(\log f)'' \leq 0$, $\sup f < \infty$ *e* $\inf f > 0$. *Las únicas soluciones enteras a la ecuación (E) sobre una variedad parabólica* F *son las funciones constantes* $u = c$, *con* $f'(c) = 0$.

Teorema 5

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable positiva. Supongamos que* f *satisface* $(\log f)'' \leq 0$, $\sup f < \infty$ *e* $\inf f > 0$. *Las únicas soluciones enteras y acotadas a la ecuación (E) sobre una variedad parabólica* F *son las funciones constantes* $u = c$, *con* $f'(c) = 0$.

Nuevos resultados de tipo Calabi-Bernstein

Teorema 4

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable positiva no-localmente constante. Supongamos que* f *satisface* $(\log f)'' \leq 0$, $\sup f < \infty$ *e* $\inf f > 0$*. Las únicas soluciones enteras a la ecuación (E) sobre una variedad parabólica* F *son las funciones constantes* $u = c$*, con* $f'(c) = 0$*.*

Teorema 5

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable positiva. Supongamos que* f *satisface* $(\log f)'' \leq 0$, $\sup f < \infty$ *e* $\inf f > 0$*. Las únicas soluciones enteras y acotadas a la ecuación (E) sobre una variedad parabólica* F *son las funciones constantes* $u = c$*, con* $f'(c) = 0$*.*

Nuevos resultados de tipo Calabi-Bernstein

Teorema 6

Las únicas soluciones enteras a la ecuación

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right)=0$$

$$|Du|<\lambda\,,\quad 0<\lambda<1\,,$$

sobre $(\mathbb{S}^{2m}\times\mathbb{R}, g+ds^2)$*, donde* g *es una métrica Riemanniana sobre* $\mathbb{S}^{2m}$ *con curvatura de Ricci no-negativa, son las funciones* $u(x,s)=a\,s+b$*, con* $a,b\in\mathbb{R}$*,* $a^2<1$*.*

M. Caballero, A. Romero and R.M. Rubio
Uniqueness of maximal surfaces in Generalized Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems
J. Geom. Phys., **60** (2010), 394–402.

A. Grigor'yan
Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the brownian motion on Riemannian manifolds
Bull. Amer. Math. Soc., **36** (1999), 135–249.

J.M. Latorre and A. Romero
examples of Calabi-Bernstein problems for some nonlinear equations
Diff. Geom. Appl., **15** (2001), 153–163.

S. Nishikawa
On maximal spacelike hypersurfaces in a Lorentzian manifold
Nagoya Math. J., **95** (1984), 117–124.

¡Gracias por su atención!