

Geometría de Finsler y Geometría de Espaciotiempos (I)

Miguel Sánchez Caja

(conjunto con

Miguel Angel Javaloyes Victoria)

9 de Diciembre de 2009.

Objetivos globales

Geometría de Finsler: variedad con una norma (de Minkowski) puesta diferenciablemente en cada espacio tangente.

- Idea atractiva ya considerada por el propio Riemann aunque...
- Berger en su “Panorama de la Geometría Riemanniana” no le da mucha importancia

Según MathSciNet: (Finsler + Spain) dondequiera \Rightarrow 8 artículos

- Reciente impulso: clasificación (correcta) de las variedades de curvatura bandera constante, libros como el de Bao, Chern y Shen... y relación con la Geometría Lorentziana

Mi charla

- Parte I: Normas usuales y de Minkowski.
- Parte II: Generalidades sobre variedades de Finsler.
- Parte III: Relación con e.t. estacionarios.

PARTE I: NORMAS USUALES Y DE MINKOWSKI

1.- Normas en e.v. dimensión finita

Definición 0.1 Norma $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$

- $\| v \| \geq 0$ con igualdad $\Leftrightarrow v = 0$ (positividad)
- $\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \|$ (homogeneidad)
Si sólo para $\alpha \geq 0$ “no (necesariamente) reversible” (homog. posit.)
- $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ (des. triangular)

Observaciones

- En general, si se cumple la igualdad en la desigualdad triangular NO tiene por qué ocurrir que sean v, w colineales (como en el caso de normas que proviene de un prod. esc.)
- En general, las normas son continuas (para la topología natural de V) pero no son diferenciables ni en 0 ni tal vez en otros puntos.
- La norma determina una distancia $d(x, y) = \| v - w \|$, que es no simétrica si $\| \cdot \|$ es no reversible.

2.- Perspectiva desde la bola y esfera unidad

$B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ (cerrada), $S = \partial B$.

Teorema 0.2 (1) Para cualquier norma, B verifica:

1. *convexa*
2. *compacta*
3. *0 es un punto interior*
4. *B simétrica respecto al origen (dispensable para incluir no reversibles).*

(2) *Recíprocamente*, si un subconjunto $B \subset V$ satisface las condiciones anteriores, entonces es la bola unidad de una norma (reversible o no, según se imponga la última) definida como:

$$\|v\|_B := \text{Inf}\left\{\xi \in \mathbb{R}^+ : \frac{v}{\xi} \in B\right\}$$

Observación 1. Desde esta perspectiva, requisitos adicionales para una norma:

1. Diferenciabilidad (fuera de 0) de $\| \cdot \|$: S es diferenciable
2. Convexidad estricta: B es estrictamente convexa
3. Convexidad fuerte: S (es diferenc. y) con segunda forma fundamental σ definida positiva.

Seg. forma fund. $\sigma_p, p \in V$: para la conexión afín de V y cualquier dirección transversa interior (canónicamente, $-p$)

[Si se prefiere, puede tomarse un prod. escalar auxiliar].

\rightsquigarrow Condición más fuerte, se exigirá en Geom. Finsler.

(Y parece natural considerar también normas no reversibles.)

Observación 2. Elementos recuperables de los prod. escalares bajo convexidad fuerte (basta diferenciabilidad y convexidad estricta):

1. La desigualdad triangular es “estricta”: igualdad en $\Leftrightarrow v, w$ dependientes y no apuntan en sentidos contrarios.
2. Cada $v \in S$ determina un único plano H por v que es “ortogonal” a v (por diferenciabilidad):

$H = T_v S$. \rightsquigarrow forma lineal asociada.

[Plano vectorial P ortogonal a $v \in V$: $d(v, P) = \|v\|$]

Además, $v \neq w \Rightarrow T_v S \neq T_w S$ (por conv. estricta)

3. Otros elementos: elemento de volumen (asociado a cualquier norma y una orientación), ortogonalidad entre vectores (relación binaria no necesariamente simétrica), bases ortonormales.

3.- Normas de Minkowski

Definición 0.3 *Norma de Minkowski sobre \mathbb{R}^n : aplicación $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:*

1. $F \geq 0$ (no negat)
2. F es C^∞ sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (suavidad)
3. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\forall \lambda > 0$ (homogeneidad positiva)
4. La matriz hessiana $g_{ij} = (1/2)(F_{y^i y^j}^2)(y)$ es definida positiva $\forall y \neq 0$ “métrica fundamental” [y^i coordenadas usuales para $y \in \mathbb{R}^n$] (convexidad fuerte)

Como Hess sólo depende de la conexión afín, la definición se extiende a cualquier e.v. V (dim. finita)

Teorema 0.4 *Una aplicación $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma de Minkowski si y sólo si verifica: F es una norma (no neces. reversible) suave y con esfera unidad fuertemente convexa.*

Observaciones:

- La convexidad fuerte permite demostrar la positividad y la desigualdad triangular (“estricta”)

- También la *Desigualdad Fundamental*:

$$dF_y(w) (= w^i F_{y_i}(y)) \leq F(w) \text{ con igualdad si } w = \alpha y, \alpha \geq 0.$$

- La homogeneidad positiva es equivalente (T. Euler) a:

$$dF_y(y) (= \sum_i y^i F_{y_i}(y)) = F(y)$$

Por tanto, $\text{Hess}F(y)[y, \cdot] \equiv 0$.

- La **relación entre la convexidad fuerte de F^2 y de S** : se deriva de

$$\text{Hess}F^2(y)[X, Y] = -\nabla_X^0 Y|_y(F^2) = -\sigma(X_y, Y_y)\xi_y(F^2)$$

donde X, Y extienden campos tangentes a S , σ es la segunda forma fundamental con respecto al normal interior $\xi_y \equiv -y$ y, por tanto $-\xi_y(F^2) = -2F dF_y(y) > 0$.

- Resultan equivalentes entonces, para F suave, positiva y posit homog.:
 - S es fuertemente convexa
 - Hess $F^2(y)$ def posit $\forall y \neq 0$
 - Hess $F(y)$ def posit sobre $T_y S$, $\forall y \in S$

- La métrica fundamental g_{ij} se interpreta de manera natural:
 - Sobre vectores tangentes a las esferas S_r de radio r : proporcional a la correspondiente σ_p de S_r
 - Sobre vectores normales: consecuente con la homog. positiva
 $\text{Hess } F^2(y)[y, y] = 2F^2(y)$

Resumen: para una norma de Minkowski F (norma no neces. revers., suave, fuert. convexa) se tienen como elementos característicos:

- **Homogeneidad positiva, codificada en las relaciones de Euler:**

$$y^i F_{y^i} = F, y^i F_{y^i y^j} = 0 \dots, \text{ (válidas para toda norma)}$$

- **La convexidad fuerte, codificada en:**

- **Métrica fundamental:** $g_{ij} = (1/2) \text{Hess} F_{y^i y^j}^2$ (definida positiva)
- **Desigualdad fundamental:** $dF_y(w) = w^i F_{y^i}(y) \leq F(w)$,
con igualdad sii $w = \alpha y$, $\alpha \geq 0$.

PARTE II: GENERALIDADES SOBRE VARIEDADES DE FINSLER

1.- Variedades de Finsler

Definición 0.5 Una métrica de Finsler sobre una variedad M es una aplicación continua $F : TM \rightarrow [0, +\infty)$ que verifica:

1. F es C^∞ in $TM \setminus 0$,
2. F es posit. homog. punto a punto:
 $F(x, \lambda v) = \lambda F(x, v)$ para todo $(x, v) \in TM$, $\lambda > 0$,
3. F^2 es fuertemente convexo punto a punto: la métrica fundamental

$$g_{ij}(x, v) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial v^i \partial v^j} (x, v) \right] \quad (0.1)$$

es definida positiva $\forall (x, v) \in TM \setminus 0$.

Consecuentemente se tiene:

- Des. triangular “estricta”:

$F(x, v_1 + v_2) \leq F(x, v_1) + F(x, v_2)$, con igualdad sii $v_2 = \alpha v_1$ o $v_1 = \alpha v_2$, para algún $\alpha \geq 0$,

- Des. fundamental:

$\sum_{ij} g_{ij}(x, v) w^i v^j \leq F(x, w) F(x, v)$, para $v \neq 0$, y con igualdad sii $w = \alpha v$ para algún $\alpha \geq 0$.

- F puede no ser reversible: se define la métrica revertida $\tilde{F}(x, v) = F(x, -v)$

CUIDADO. A diferencia del caso riemanniano, (aparte de que la norma no proviene de un producto escalar) se tiene:

- No reversibilidad
- No diferenciabilidad en 0
- Enorme multiplicidad con respecto a los productos escalares:
 - las normas sobre espacios vectoriales de la misma dimensión no son isométricas en general
 - en particular, tampoco las normas de distintos espacios tangentes de una variedad de Finsler
(Variedades de Berwald: todas las normas isométricas)

2.- Longitudes y distancias

- Longitud de $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\ell_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

- Distancia de p a q : (no necesariamente simétrica)

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in C(p, q)} \ell_F(\gamma)$$

$C(p, q)$: conj. curvas dif. de p a q

- Distancia simetrizada: $d_s(p, q) = (d(p, q) + d(q, p))/2$

- Bolas métricas (abiertas):

- hacia adelante $B^+(p, r) = \{x \in M : d(p, x) < r\}$,

- hacia atrás $B^-(p, r) = \{x \in M : d(x, p) < r\}$

- con la distancia simetrizada d_s , $B_s(p, r) = \{x \in M : d_s(p, x) < r\}$

(generan la topología como en el caso riemanniano)

- Sucesiones de Cauchy $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset M$
 - adelante: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$:
 $i, j > N \Rightarrow d(x_i, x_j) < \varepsilon$ cuando $i \leq j$
 - atrás: idem cuando $i \geq j$.
- Completitud adelante y atrás

3.- Geodésicas.

Concepto:

- Geodésicas (afínmente param.): puntos críticos del funcional energía

$$E_F(\gamma) = \int_a^b F^2(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds, \quad (0.2)$$

(curvas con puntos extremos fijos)

- Afínmente parametrizadas, pero una reparametrización afín que no conserve la orientación no produce una nueva geodésica (en general)
- Dos aplicaciones exponenciales en cada punto

- Algunas diferencias remarcables con el caso riemanniano:
 - Cuando se calcula la segunda derivada del funcional E , la falta de diferenciabilidad en 0 da sus propios problemas.
 - En el caso M compacta:
 - Existen métricas de Finsler con sólo un número finito de geodésicas cerradas (Katok '73, Ziller '82)—abierto en el caso riemanniano.
 - Son genéricas en la topología C^2 las métricas de Finsler cuyas direcciones tangentes a geodésicas cerradas son densas (sist. hamiltonianos, coment. Ziller '82).

Teoremas de Hopf-Rinow:

- Para la distancia no simetrizada (esencial la desigualdad fundamental).
[Versión “adelante”]. Equivalen en toda (M, F) (conexa):
 - (a) (M, d) es completo hacia adelante (convergencia de suc. Cauchy).
 - (b) (M, F) es geodésicamente completo hacia adelante.
 - (c) Para todo $p \in M$, la exponencial hacia adelante \exp_p está definida en todo T_pM .
 - (d) Idem para algún $p \in M$.
 - (e) Heine-Borel: los conjuntos cerrados y acotados hacia adelante son compactos

En este caso, (M, F) es convexa (cada par de puntos conectable por una geodésica hacia adelante y, por tanto, también por una hacia atrás -posiblemente con distinta imagen)

- *Para la distancia simetrizada* (¡cuidado! no es un espacio de longitudes).

Equivalen:

(a) Heine-Borel: las bolas simetrizadas cerradas son compactas.

(b) $\bar{B}^+(x, r) \cap \bar{B}^-(x, r)$ es compacta, para todo $x \in M$, $r > 0$.

(c) $\bar{B}^+(x, r_1) \cap \bar{B}^-(y, r_2)$ es compacta, $\forall x, y \in M$, $r_1, r_2 > 0$.

En este caso, (M, d_s) es completo.

4.- Métricas de Randers

Ejemplo más típico de métrica de Finsler no reversible. Sean:

- (M, h) var. riemanniana
- ω 1-forma sobre M con h -norma $|\omega|_x < 1, \forall x \in M$

Definición 0.6 Métrica de Randers asociada a (M, h, ω) :

$$R(x, v) = \sqrt{h_x(v, v)} + \omega_x(v),$$

Métrica revertida \tilde{R} : reemplácese ω por $-\omega$.

Observación 0.7 Con estas métricas es muy fácil comprobar que la completitud hacia adelante y hacia atrás no son equivalentes:

$$M = \mathbb{R}, \quad h = dx^2, \quad \omega = \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

PARTE III: RELACIÓN CON E.T. ESTACIONARIOS

1.- Correspondencia variedades de Randers /métricas estacionarias

Definición 0.8 *Espaciotiempo estacionario (estándar, normalizado):*

$$M = \mathbb{R} \times S, \quad g = -dt^2 + \omega \otimes dt + dt \otimes \omega + g_0,$$

- ω 1-forma, g_0 métr. riemanniana (sobre S)
- $K = \partial_t$ campo temporal Killing (conforme): normalización $g(K, K) \equiv -1$ (sólo nos interesan propiedades invariantes conformes)
- Incluso con K prescrito, el desdoblamiento en $\mathbb{R} \times S$ no es único:
Cualquier hipersuperficie espacial $S_f = \{(f(x), x) : x \in S\}$ obtenida como el grafo de alguna $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ genera uno nuevo.

Definición 0.9 La métrica de Fermat es la métrica de Randers asociada a (M, g, K, S)

$$R = \sqrt{h} + \omega, \quad \text{para } h = g_0 + \omega \otimes \omega.$$

Observación. Cambio S por S_f : nueva métrica de Randers

$$R_f = R + df = \sqrt{h} + \omega_f$$

- $\omega_f = \omega + df$ (igual cohomología)
- Condición $|df|_R < 1$: S_f espacial.
- Métrica h invariante: fibrado ortogonal a K .

2.- Interpretación de la métrica de Fermat

Sea $\gamma(s) = (t(s), x(s))$ una curva en $\mathbb{R} \times S$

1. γ es causal y dirigida al futuro (resp. pasado)

$$\iff t'(s) \geq F(x(s), x'(s))$$

$$\text{(resp. } t'(s) \leq -\tilde{F}(x(s), x'(s))\text{)}$$

2. En este caso, si se reparametriza por $t \in [t_0, t_1]$:

$$t_1 - t_0 = \ell_F(x(s))$$

3. Con esta parametrización, γ es una pregeodésica luminosa dirigida al futuro $\iff x(t)$ es una geodésica unitaria para F .

[Idea: claramente γ luminosa sii $x(t)$ es F -unitaria. Entonces, γ es crítica para la g -longitud sii $x(t)$ lo es para la F longitud.]

Así:

- Las geodésicas luminosas (fut) que conectan el punto $p := (0, x_0)$ con la línea $L := \mathbb{R} \times \{x_1\}$ se corresponden con las F -geodésicas de x_0 a x_1
- el tiempo mínimo de llegada de p a L (más propiamente, el ínfimo de ese tiempo medido con la coordenada t , a través de curvas causales fut. conectantes) es la F -distancia: $d(x_0, x_1)$.

3.- Una aplicación a la Geom. Lorentziana

Teorema 0.10 *Fijados (M, g, K, S) como hasta ahora:*

(1) *S es una hipersuperficie de Cauchy sii F es completa (adelante y atrás)*

(2) *El espaciotiempo estacionario es:*

- *causalmente simple sii (S, F) es convexa.*
- *globalmente hiperbólico sii las bolas simetrizadas cerradas $\bar{B}_s(x, r)$ de (S, F) son compactas.*

Idea dem.

(1) $S \equiv \{0\} \times S$ es Cauchy \Leftrightarrow

cada $\{t\} \times S$ lo es \Leftrightarrow

cada geod. lum. $(t, x(t))$ corta toda $\{t\} \times S \Leftrightarrow$

toda F geodésica unitaria $x(t)$ está definida para todo valor de t .

(2) Computación de los $I^\pm(p), J^\pm(p)$ a partir de F .

4.- Una aplicación a la Geom. Finsleriana

- El resultado anterior implica que toda métrica de Randers con $\bar{B}_s(x, r)$ compactas es convexa (lo que se generaliza a toda métrica de Finsler): la convexidad, más que con la completitud, está relacionada con la compacidad de las $\bar{B}_s(x, r)$.

Teorema 0.11 *Sea (S, R) Randers y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que define una nueva métrica de Randers $R_f(x, v) = R(x, v) - df_x(v)$. Entonces:*

1. *Las pregeodésicas de R y R_f coinciden.*
2. *Puede escogerse f tal que R_f es geodésicamente completa sii las $\bar{B}_s(x, r)$ son compactas.*

Idea dem.

1. El término en df no influye para propiedades variacionales de curvas con extremos fijos.
2. Sea el e.t. estacionario (M, g) asociado a (R, F)

- $\bar{B}_s(x, r)$ compactas $\iff (M, g)$ es glob. hip.
- (M, g) es glob. hip. $\iff (M, g)$ admite una hip Cauchy espacial tipo grafo S_f
- Una hip. espacial tipo grafo S_f es Cauchy $\iff R_f$ es completa.

5.- Otras aplicaciones

1. Cálculo de los dominios de dependencia de un conjunto acausal.
2. Diferenciabilidad de la función distancia finsleriana a una subvariedad
3. Posible relación entre el tensor de Weyl del espaciotiempo y la curvatura bandera de la métrica de Fermat, apuntada por Gibbons (como conjetura en el caso conformemente llano).

6.- Un efecto colateral sobre la Geometría Riemanniana

Equivalencia entre los conceptos de convexidad “infinitesimal” y “local”, mejorando las hipótesis de diferenciabilidad de Bishop (Indiana, '74).

Referencias

- [1] D. BAO, S.-S. CHERN, AND Z. SHEN, *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, vol. 200 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [2] E. CAPONIO, M. A. JAVALOYES AND M. SÁNCHEZ, On the interplay between Lorentzian Causality and Finsler metrics of Randers type, arXiv:0903.3501
- [3] G. W. GIBBONS, C. A. R. HERDEIRO, C. M. WARNICK, AND M. C. WERNER, *Stationary Metrics and Optical Zermelo-Randers-Finsler Geometry*, Phys. Rev. D 79:044022,2009 arXiv: 0811.2877v1[gr-qc].
- [4] R. BARTOLO, E. CAPONIO, A. GERMINARIO AND M. SÁNCHEZ, Convex domains of Finsler and Riemannian manifolds arXiv: 0911.0360