æ

æ

PROYECTO DOCENTE

Análisis Funcional

Ginés López Pérez.

Granada, 1.998

Contenido.

Introducción.

Antes de comentar el contenido de esta memoria, procuraremos expresar nuestra idea de lo que debe ser un curso de Análisis Funcional, materia a la que se dedica en el actual plan de estudios de la Universidad de Granada la asignatura de Análisis V. Suscribimos la idea del libro de Conway: es posible que dos investigadores de Análisis Funcional, tengan serias dificultades para comunicarse sus respectivos descubrimientos. Es decir, lo que se entiende por Análisis Funcional es, hoy en día, algo tan amplio que es imposible de abarcar. No obstante, es posible definir los objetos abstractos que estudia el Análsis Funcional, como dice Dieudonné: los espacios vectoriales topológicos y las aplicaciones entre ellos, con ciertas propiedades algebraicas y topológicas. Podemos añadir que, además, no se pueden perder de vista las aplicaciones, que el estudio abstracto de dichas estructuras trae consigo.

En el actual plan de estudios, el Análisis Funcional se imparte en el último curso de la licenciatura en Matemáticas, dentro de la asignatura anual Análisis Matemático V, que es obligatoria en tres de las especialidades, y optativa en otra. Como, en breve, estará vigente el nuevo plan de estudios, que tendrá una estructura cuatrimestral, hemos elaborado un proyecto docente adecuado con la situación entrante, que creemos además apropiado para el poco tiempo que se mantenga la situación actual. Al final de esta introducción, se dará una idea de cómo adaptar este programa en cualesquiera de las dos situaciones.

Los requisitos previos para este programa son dos cursos de Algebra

Lineal y Topología, que se imparten en los dos primeros cursos de la licenciatura y que, en cualquier caso, creemos que un nuevo plan de estudios cuatrimestral está obligado a impartirlos en los primeros cursos de la carrera. Por otro lado, hemos incluido algunas aplicaciones en nuestro programa que requieren conocimientos de Variable compleja y de Teoría de la Medida. La primera se imparte actualmente en el cuarto curso de la licenciatura, aunque para nuestras aplicaciones bastaría con un cuatrimestre. Respecto a la segunda, que se imparte en el último curso, hemos creído conveniente no utilizar más que la integral de Lebesgue, que sí debe ser conocida por el alumno, hasta mediado el curso, para tener de esta manera cubiertos los conocimientos necesarios para nuestras aplicaciones.

Pasamos ya a describir el contenido de nuestro programa, que se dedicará exclusivamente de los espacios normados en los primeros cinco capítulos, para pasar al estudio de los espacios vectoriales topológicos en el resto.

Nos parece conveniente comenzar con un primer capítulo dedicado a las propiedades básicas de los espacios normados, puesto que el conocimiento de éstos varía mucho de una promoción a otra. Piénsese que el conocimiento del alumno de los espacios normados, antes de llegar a este curso, se imparte en un año junto con el cálculo diferencial en varias variables y la integral de Lebesgue.

Empezamos, ya dentro de nuestro primer capítulo, definiendo la estructura de espacio normado y exponiendo una larga lista de ejemplos, para familiarizar al alumno con los conceptos básicos, y posibilitando una primera toma de contacto mediante la comprobación de detalles que se dejan al alumno en la lista de ejemplos. En el segundo tema, presentamos las formas posibles que puede adoptar la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados y definimos el espacio de operadores, dando entrada al espacio dual. El último tema se dedica al estudio de los espacios normados de dimensión finita, destacando el teorema de Tihonov, que nos garantiza la equivalencia entre dos cualesquiera normas en un espacio vectorial de dimensión finita, y el teorema de Riesz, que caracteriza la dimensión finita de un espacio normado a través de su compacidad local, poniendo de manifiesto la *"escasez"* de conjuntos compactos en dimensión infinita.

Nuestro segundo capítulo está dedicado al teorema de Hahn-Banach, que motivamos con el problema de extensión de funcionales continuos. El primer tema de este capítulo está dedicado a la versión analítica del teorema, que nos asegura la no trivialidad del dual de un espacio normado. Esto nos permite ya tener un primer contacto con la teoría de dualidad. En nuestro segundo tema nos dedicamos a las aplicaciones, para poner de manifiesto la gran versatilidad del teorema de Hahn-Banach, uno de los más importantes principios del Análisis Funcional. Destacamos la existencia de medias invariantes en todo semigrupo abeliano, como consecuencia de una reformulación equivalente a la versión analítica del teorema de Hahn-Banach, el clásico problema de los momentos y el teorema de Markov-Kakutani, un resultado de punto fijo que deducimos de la versión geométrica del teorema que nos ocupa. Por último, obtenemos la versión geométrica, dejando patente su equivalencia con la analítica, y dando entrada a los teoremas de separación.

Nuestro tercer capítulo está dedicado a la teoría de dualidad en espacios normados, que puede ser considerada como una prolongación del teorema de Hahn-Banach. Comenzamos en el primer tema definiendo la topología débil de un espacio normado y la débil-* de su dual, estudiando sus propiedades más importantes. La motivación para ello es la carencia de subconjuntos compactos para la topología de la norma.

El segundo tema se dedica al teorema del bipolar en espacios normados, que se presenta sólo para subespacios. Se echará en falta el resultado general para subconjuntos, sin embargo ello no dificulta la presentación de los teoremas de Goldstine y Banach-Alaoglú en nuestro tercer tema, mostrando la *"abundancia"* de compactos para la topología débil, en espacios reflexivos y para la topología débil-*, en espacios duales. Como aplicaciones destacamos el teorema de Milman-Pettis (convexidad uniforme implica reflexividad), el teorema de Mazur que muestra la universalidad del espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$, entre la clase de los espacios de Banach separables, la complementación de c_0 en cualquier espacio de Banach separable y la complementación de ℓ_∞ en cualquier espacio de Banach.

Como ya hemos comentado, se echará en falta un enunciado general del teorema del bipolar y también entre las aplicaciones, las que precisan del teorema de Krein-Milman. No obstante, la teoría de dualidad encontrará su ambiente más general con los pares duales a desarrollar en el octavo capítulo, que encontrará su motivación en el presente.

Nos dedicamos en el cuarto capítulo a presentar otros dos principios del Análisis Funcional: los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss. Comenzamos presentando una herramienta imprescindible en un curso de Análisis Funcional, el teorema de Baire. En nuestro segundo tema se demuestra el teorema de la aplicación abierta, junto con sus formulaciones equivalentes: teoremas de la gráfica cerrada e isomorfismos de Banach. Aparte de las aplicaciones al mundo del Análisis Funcional, presentamos otra en el mundo de las ecuaciones diferenciales, mostrando la dependencia continua respecto de los datos y valores iniciales de cualquier sistema de ecuaciones lineales. El tercer tema se dedica al teorema de Banach-Steinhauss, que deducimos del teorema de la gráfica cerrada, si bien la herramienta principal vuelve a ser el teorema de Baire, del que se desprende un resultado más profundo de naturaleza estrictamente topológica: el principio de acotación uniforme. Entre las aplicaciones destacan la abundancia de funciones continuas cuya serie de Fourier asociada no converge puntualmente y la caracterización de las matrices conservativas mediante las llamadas condiciones de Siverman-Toeplitz.

Dedicamos el cuarto tema al apasionante mundo de las bases de Schauder en espacios de Banach, mostrando el teorema de la base de Banach-Schauder, una caracterización intrínseca de las bases, que es otra brillante aplicación del teorema de la aplicación abierta. El concepto de bases equivalentes nos sirve de excusa para motivar el teorema de Bessaga-Pelczynski, que presentamos en el último tema tras el principio de selección. Como aplicaciones, destacan el teorema de Orlicz-Pettis y el hecho de que todo operador de c_0 en un espacio de Banach que no contenga subespacios isomorfos a c_0, se pueda aproximar por operadores de rango finito, es decir dicho operador es compacto.

Nuestro quinto capítulo se dedica al estudio de los espacios de Hilbert. Varios resultados básicos muestran el gran parecido geométrico con los espacios euclídeos. Tras una visión del Análisis Funcional en el mundo de los espacios normados nos parece adecuado terminar con los espacios de Hilbert, que poseen la más rica estructura.

Los principales resultados del primer tema son los teoremas de la aproximación óptima, proyección ortogonal y Riesz-Fréchet. También hemos incluido una consecuencia de éste último, el teorema de Lax-Milgram, que resulta de utilidad en ecuaciones diferenciales.

En el segundo tema abordamos la descripción de los espacios de Hilbert, como los del tipo $\ell_2(\Gamma)$. Tras el concepto de familia sumable, se da entrada a las bases ortonormales en espacios de Hilbert, motivadas por el hecho de que con la base de ℓ_2, se puede reconstruir toda la estructura del espacio.

Nuestro tercer tema pretende ser una introducción a la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Se prueba la densidad de los operadores de rango finito, en el espacio de los operadores compactos, y se presentan algunos ejemplos interesantes, algunos de ellos relacionados con ecuaciones integrales. Dedicamos nuestro último tema al teorema espectral, para operadores compactos normales, que se da en sus diferentes versiones.

Los cinco últimos capítulos de nuestro proyecto están dedicados a los espacios vectoriales topológicos y una introducción a las álgebras de Banach, en el último de ellos. Cada uno de estos capítulos encontrará su antecedente en alguno de los cinco primeros, y esto conllevará ventajas e inconvenientes. Respecto a las ventajas, conviene decir que empezaremos cada uno de los capítulos con una motivación previa, ya estudiada en el ambiente de los espacios normados, lo que hará que muchos de los resultados que tengamos que presentar sean meros ejercicios para el alumno, que tendrá que resolver con un mínimo de indicaciones por parte del profesor. Además, el alumno agradecerá sin duda que el paso a la abstracción sea gradual, con referentes en ambientes anteriores. Repecto a los inconvenientes, es inevitable la repetición de argumentos en dos ambientes diferentes. No obstante, estamos seguros de que la reincursión en cuestiones consideradas previamente, en situaciones más privilegiadas, permite arrojar nueva luz sobre ellas. Por otro lado, si logramos despertar en el alumno el instinto matemático, es probable que éste mismo sea quien sugiera eliminar los privilegios del ambiente, en determinados temas.

Nuestro sexto capítulo se dedica a la presentación de las nociones básicas del mundo de los espacios vectoriales topológicos (EVT). Comenzamos definiendo tales espacios, y caracterizamos algebraicamente las familias de subconjuntos que pueden ser bases de entornos de cero, para una topología vectorial. La tarea ejemplificadora se facilita ahora introduciendo ciertas funciones en un espacio vectorial, que comparten algunas propiedades con una norma: casinorma y pseudonorma, cuyas topologías asociadas son siempre vectoriales. El segundo tema se dedica al estudio de los EVT de dimensión finita, que a estas alturas debe ser un mero ejercicio para el alumno. Aprovechamos este momento para introducir el concepto de acotación en EVT, así como los conceptos puramente uniformes, sólo para la uniformidad de un EVT. Finalizamos este capítulo, presentando en nuestro último tema los teoremas de seminormabilidad de Kolmogorov y semimetrizabilidad de Birkhof-Kakutani, lo que nos lleva a la consideración de dos clases de EVT: espacios localmente acotados (ela) y espacios localmente convexos (elc). Estudiando propiedades de estabilidad de dichos espacios, se obtienen caracterizaciones interesantes de los mismos, lo que aclara considerablemente el panorama que tenemos en este nuevo ambiente para el alumno.

En el capítulo VII se obtienen nuevos enunciados de los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss, así como nuevos teoremas de separación en nuestro nuevo ambiente. Deberá ser trabajo del alumno lo que respecta a los dos primeros temas, puesto que con un mínimo de indicaciones, sólo precisa del estudio ya realizado en el ambiente de los espacios normados.

En el tercer tema, tras obtener nuevos teoremas de separación en evt y elc, presentamos el teorema de Krein-Milman en el marco de los elc separados, lo que nos libera de tener que hacer tres enunciados, uno para cada una de las topologías que podemos considerar en un espacio normado, forma irremediable de hacerlo, si lo hubiéramos presentado en nuestro tercer capítulo.

El capítulo VIII se dedica al estudio de la teoría de dualidad en su marco adecuado: pares duales. A este concepto dedicamos nuestro primer tema, hasta llegar a la forma general del teorema del bipolar, el primer invariante de dualidad. En el segundo tema obtenemos el teorema de Alaoglú-Bourbaki, generalización del ya conocido teorema de Banach-Alaoglú en espacios normados. En este momento obtenemos aplicaciones de éste último con el teorema de Krein-Milman, partiendo de la caracterización de los puntos extremos de la bola unidad de los espacios $C(K)$, hasta llegar a obtener como consecuencia, el teorema de Banach-Stone, la compactificación de Stone-Cech y el teorema de Stone-Weierstrass.

Los dos últimos temas de este capítulo pueden muy bien servir para que el alumno que lo desee tenga material sobre el que profundizar. En ellos se describen las topologías compatibles con un par dual, llegando a un nuevo invariante de dualidad: la acotación (teorema de Mackey). Se presenta también el teorema de complitud de Grothendiek. Terminamos con el teorema de Krein-Smulian que da información nada despreciable, aún en el caso de los espacios de Banach. Como aplicación, se ofrece una visión completa de las propiedades de trasposición de operadores entre espacios de Banach.

Dedicamos el noveno capítulo a hacer una breve incursión en el espacio de las distribuciones, que desde el punto de vista de las aplicaciones proporciona probablemente, la forma más convincente de justificar la utilidad de los elc. Por otro lado, dadas sus aplicaciones en el mundo de las ecuaciones diferenciales, es conveniente decir que precisamente se dedica a este asunto una asignatura anual del último curso de la licenciatura. Empezamos definiendo el espacio de las funciones test, cuya topología se presenta sin pasar por el esquema abstracto de límite inductivo, que aunque sin duda aclarador, nos parece excesivo para utilizarlo sólo en el ambiente de este capítulo. Obtenemos algunas propiedades interesantes del espacio de las funciones test: es un elc separado, no metrizable y completo que verifica la propiedad de Heine-Borel (cerrado y acotado implica compacto). Tras el estudio de la continuidad de aplicaciones lineales que salen del espacio de las funciones test, (continuidad secuencial implica continuidad) presentamos el espacio de las distribuciones, como el dual del espacio de las funciones test. Definimos la derivada de una distribución y estudiamos algunas propiedades del producto de convolución, de una función test con una distribución. En el segundo tema nos dedicamos a dar dos aplicaciones interesantes. La primera de ellas es el célebre teorema de Malgrange-Ehrenpreis, sobre existencia de solución fundamental para una ecuación diferencial en derivadas parciales. lineal y de coeficientes constantes. Indicamos cómo se puede llegar a este resultado de una forma bastante directa, que hemos tomado de un bonito trabajo de J. P. Rosay. Finalizamos el tema probando la existencia de geodésicas, en el sentido más amplio posible, en cualquier subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ en el que existan curvas rectificables.

Terminamos nuestro programa haciendo una introducción a una de las partes más importantes del Análisis Funcional, la teoría espectral, a la que se dedica actualmente una asignatura anual, en el último curso de la licenciatura. El concepto de álgebra de Banach ha aparecido ya implícitamente en nuestro proyecto, y dedicamos el primer tema del último capítulo al estudio de este concepto. El segundo tema combina resultados de variable compleja y Análisis Funcional, para obtener la no vaciedad del espectro para un elemento de un álgebra normada compleja con unidad, de donde se deduce el teorema de Gelfand-Mazur. Dedicamos el tercer tema al teorema de Gelfand-Naimark conmutativo, tras presentar la transformación de Gelfand y concluir que dicha identificación es perfecta para C^*-álgebras. Dedicamos nuestro último tema a la teoría de Riesz-Schauder, sobre el estudio del espectro de operadores compactos en espacios de Banach. Hasta ahora no habíamos encontrado el lugar apropiado para ella, que encuentra aquí su marco apropiado, teniendo como referente lo hecho en el mundo de los espacios de Hilbert.

Se incluyen también dos apéndices sobre redes y filtros y sobre teoría de la medida que cubren los conocimientos que hayamos podido necesitar. Para el primero de ellos, bastaría con dos horas y el segundo se puede utilizar a título informativo con la seguridad de que encontrará su lugar apropiado en la asignatura de Teoría de la Medida, que actualmente se imparte en el último curso de la licenciatura.

Ya hemos indicado nuestra opinión de cómo desarrollar el curso, en el caso de que la asignatura siga anual, como hasta el momento. En cuanto a la distribución de los temas digamos que actualmente se cuenta con 150 horas, lo que permite dar la mayoría de los temas presentados. El ritmo medio sería de tres horas por tema, aunque por supuesto hay temas a los que se les debe dedicar más tiempo. Por otro lado, ya hemos expresado la opinión de que, muchas cuestiones tratadas en los últimos cinco capítulos, deben ser trabajo del alumno, quien debe contar con abundantes problemas que resolver. En cualquier caso, la experiencia nos dice que la parte del programa que se puede llegar a dar, varía de unas promociones a otras. Aunque no descartamos impartir la totalidad del programa, en el caso de vernos obligados a una reducción, optaríamos por suprimir los dos últimos temas del capítulo VII y dejaríamos sólo la teoría de Riesz-Schauder en el capítulo X, siguiendo la filosofía de no suprimir aplicaciones en los temas impartidos.

En el más que previsible caso de que el nuevo plan de estudios entre en vigor, apostaríamos por impartir los primeros cinco capítulos en un cuatrimestre y el resto en otro. De esta forma, el alumno que cursase sĺo el primer cuatrimestre tendrá la posibilidad de tener una visión bastante apropiada del Análisis Funcional, aunque sea sólo en el ambiente de los espacios normados.

En cuanto a la bibliografía, se incluye de forma específica al final de cada capítulo, así como un resumen de cada uno al inicio, que permite tener una visión bastante completa de los asuntos que se van a tratar.

Capítulo I

ESPACIOS NORMADOS.

Como no podía ser de otra forma, el objetivo de este capítulo es presentar los dos objetos matemáticos que estudia el Análisis Funcional en esta primera parte del proyecto. Empezamos por la definición de norma, topología de la norma y espacio de Banach, conceptos que no necesitan motivación para un alumno de segundo ciclo, y seguimos con una lista abundante de ejemplos, en los que hay ya bastantes detalles para comprobar y, por tanto, la posibilidad de una primera toma de contacto práctico. En el segundo tema se presentan las formas posibles que puede adoptar la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados, definiendo el espacio de operadores y dando entrada al espacio dual, donde ya echamos de menos algún resultado que nos garantice la no trivialidad de aquél. El último tema se dedica al estudio de los espacios normados finito dimensionales, destacando el resultado de Tihonov (1.935), que nos garantiza la continuidad de toda aplicación lineal que sale de un espacio normado finito dimensional (por tanto la equivalencia de dos cualesquiera normas en tal espacio) y el teorema de Riesz (1.918) que pone en equivalencia la dimensión finita de un espacio normado y la compacidad local de dicho espacio. Este último resultado sirve para definir a los alumnos la filosofía que seguirá en adelante (la buena avenencia entre las estructuras algebraica y topológica), así como para poner de manifiesto la "escasez" *de conjuntos compactos en dimensión infinita.*

I.1 Espacios normados y espacios de Banach. Ejemplos

En lo que sigue $\mathbb{K}$ denotará indistintamente al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Todos los espacios vectoriales considerados lo serán sobre $\mathbb{K}$.

Definición I.1.1 . *Sea X un espacio vectorial. Una* **norma** *en X es, por definición, una función $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:*

(i) $\|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *para cualesquiera* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $x \in X$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.

Un **espacio normado** *será un par $(X, \|.\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|.\|$ es una norma en X. Cuando no haya lugar a confusión omitiremos la segunda componente del par, con el fin de simplificar la notación. Notaremos $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, conjuntos que llamaremos bola y esfera unidad, respectivamente del espacio normado X.*

Si en un espacio normado X definimos $d(x, y) = \|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in X$, tendremos gracias a la definición de norma que d es una distancia en X, lo que hace que podamos dotar a X de estructura de espacio topológico con la topología generada por la distancia d, usualmente llamada **topología de la norma**. Nótese además que las aplicaciones $\sigma : X \times X \longrightarrow X$ y $\tau : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$ definidas mediante $\sigma(x, y) = x + y$, $\tau(\lambda, x) = \lambda x$ son continuas para las topologias naturales que obviamente estamos considerando. Como consecuencia inmediata se obtiene que el cierre de cualquier subespacio vuelve a ser un subespacio. (Por supuesto la buena avenencia entre las estructuras topológica y algebraica no es sólo deseable sino imprescindible, filosofía que será constante a lo largo del curso y que se pondrá más de manifiesto en poco tiempo.)

Diremos que una norma $\|.\|$ en un espacio vectorial X es **completa** cuando lo sea la distancia asociada a ella, y en tal caso diremos que X es un espacio de **Banach** (para la norma $\|.\|$), concepto que obviamente depende de la norma considerada en X. Quizá sea conveniente recordar en este momento que el espacio normado $\mathbb{K}$ con el valor absoluto o módulo como norma, es un espacio de Banach.

Si Y es un subespacio (vectorial) de un espacio normado X, podemos dotar a Y de estructura de espacio normado considerando la norma de X restringida a Y. Es un sencillo ejercicio ver que si Y es completo ha de ser cerrado en X. De hecho, si X es además un espacio de Banach, se comprueba fácilmente que Y, con la norma de X restringida, es de Banach si, y sólo si, Y es cerrado en X.

Parece indiscutible que es el momento de exponer una lista de ejemplos, lista que además de ejemplificadora será utilizada como fuente de los primeros ejercicios para proponer a los alumnos. Creemos además que debemos recoger la más amplia gama de espacios normados que llevan atribuído el adjetivo *"clásico"*, que para nosotros son los que aparecen con frecuencia en la literatura y que, por supuesto, se puedan presentar en estos comienzos.

Ejemplos de espacios normados y espacios de Banach

(i) Si n es un número natural, la norma euclídea en $\mathbb{K}^n$ es sin duda la mejor conocida por el alumno, sin embargo no es más que un caso particular de una familia de normas *"clásicas"* que definiremos a continuación.

La desigualdad
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
(válida para cualesquiera números reales no negativos a, b y números reales positivos p, q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), se puede obtener inmediatamente de la convexidad de la función exponencial.

La desigualdad anterior permite demostrar la **Desigualdad de**

Hlder:
$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{1/q}$$
donde a_i, b_i son escalares arbitrarios para $1 \leq i \leq n$ y $p > 0$.

A partir de aquí se llega, por fin, a la **Desigualdad de Minkowski**:

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{1/p}$$

válida también para cualesquiera escalares a_i, b_i y $p \geq 1$.

Si ahora definimos, para $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ y $p \geq 1$,

$$\|(t_1, \ldots, t_n)\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |t_i|^p)^{1/p}$$

la desigualdad de Minkowski es el único ingrediente necesario no trivial para comprobar que $\| \,.\, \|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^n$.

La complitud del módulo o valor absoluto en $\mathbb{K}$, permite comprobar que $(\mathbb{K}^n, \| \,.\, \|_p)$ es un espacio de Banach, usualmente denotado por ℓ_p^n.

Si definimos, para $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|(t_1, \ldots, t_n)\|_\infty = max\{|t_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

es mucho más fácil comprobar que $\|.\|_\infty$ es una nueva norma en $\mathbb{K}^n$, que al igual que en el caso anterior, es completa. Ahora notaremos ℓ_∞^n al espacio de Banach $(\mathbb{K}^n, \| \,.\, \|_\infty)$ y dicha notación se puede justificar mediante la igualdad

$$\lim_{p \to +\infty} \|(t_1, \ldots, t_n)\|_p = \|(t_1, \ldots, t_n)\|_\infty \ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n.$$

(ii) Los ejemplos presentados anteriormente son todos de dimensión finita. Gracias al pequeño trabajo realizado hasta ahora nos costará poco generalizar los espacios del punto anterior a la dimensión infinita.

Si $1 \leq p < +\infty$, el conjunto

$$\ell_p = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p < +\infty\}$$

es un espacio vectorial, con las operaciones definidas coordenada a coordenada.

Si definimos

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p)^{1/p}$$

obtenemos que $\|.\|_p$ es una norma en ℓ_p, gracias a la desigualdad de Minkowski, pasando al límite. Es un proceso rutinario comprobar que la nueva norma recién definida en ℓ_p es completa, proceso que una vez visto es fácilmente aplicable en otros muchos casos, y que se basa otra vez en la complitud de $\mathbb{K}$.

La mera intuición permite ahora adivinar quién debe ser la norma completa que podemos definir en el espacio vectorial

$$\ell_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty\}$$

Por supuesto,

$$\|x\|_\infty = sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

Presentamos ahora dos subespacios destacados de ℓ_∞. Nos referimos al espacio c_0 de las sucesiones de escalares con límite cero y al espacio c de las sucesiones de escalares convergentes, por supuesto con la norma del supremo restringida. Es un ejercicio sencillo comprobar que ambos son cerrados en ℓ_∞ y, por tanto, tenemos dos nuevos espacios de Banach.

Aunque pudimos haber presentado antes un ejemplo de espacio normado no completo, hemos reservado ese privilegio al que clásicamente se considera prototipo en las presentaciones. Nos referimos al espacio de las sucesiones de escalares con un número finito de términos no nulos, que denotaremos por c_{00}, por supuesto con la norma del supremo. Otro de los deberes para el alumno es probar que c_{00} es denso en c_0.

Si en la definición de los espacios ℓ_p, para $1 \leq p \leq +\infty$, sustituimos $\mathbb{N}$ por un conjunto arbitrario no vacío Γ, obtenemos los espacios de Banach $\ell_p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq +\infty$. La única salvedad necesaria es sustituir:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p < +\infty \text{ por } sup\{\sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)|^p : F \subset \Gamma, \ F \text{ finito}\} < +\infty$$

(iii) Si L es un espacio topológico localmente compacto y de Haussdorff, el espacio de las funciones definidas en L, continuas y de soporte compacto, con valores a $\mathbb{K}$, es un subespacio de $\ell_\infty(L)$, denotado por $C_{00}(L)$. Por supuesto, consideramos en $C_{00}(L)$ la norma $\| \ . \ \|_\infty$.

El cierre de $C_{00}(L)$ en $\ell_\infty(L)$ es el espacio de Banach $C_0(L)$, de las funciones continuas que se anulan en el infinito. Si $x \in \ell_\infty(L)$ es una función continua, decimos que se anula en el infinito si el conjunto $\{t \in L : |x(t) \geq > \varepsilon\}$ es compacto en L para todo $\varepsilon > 0$. (Supuesta conocida la compactificación por un punto, la notación se hace coherente).

Si ahora K es un espacio topológico compacto y de Haussdorff, los espacios $C_{00}(K)$ y $C_0(K)$ coinciden con el de todas las funciones continuas en K, denotado por $C(K)$.

En el caso de que $L = \mathbb{N}$ y K sea la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$ obtenemos $C_{00}(L) = c_{00}$, $C_0(L) = c_0$ y $C(K) = c$.

Conviene recordar que la convergencia de una sucesión en los espacios anteriores no es más que la convergencia uniforme, concepto que el alumno ya conoce desde el primer curso de la licenciatura.

(iv) Si $1 \leq p < +\infty$, denotaremos $\mathcal{L}_p[0,1]$ al espacio vectorial de todas las funciones medibles Lebesgue en $[0,1]$ tales que $\int_0^1 |f(t)|^p dt < +\infty$.

Al igual que hicimos con el hermano menor ℓ_p, definimos

$$\phi(f) = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{1/p}$$

Gracias a la versión de la desigualdad de Minkowski para integrales, obtenida análogamente a la ya expuesta, ϕ verifica las condiciones ii) y iii) de la definición de norma, sin embargo, $\phi(f) = 0$ siempre que f sea nula c. p. d. (casi por doquier). Por tanto ϕ no es una norma en el espacio que estamos considerando.

No obstante, si identificamos las funciones que son iguales c. p. d. obtenemos inmediatamente que ϕ es una norma.

En consecuencia, notemos $L_p[0,1]$ al espacio vectorial cociente de $\mathcal{L}_p[0,1]$ por el subespacio $N = \{f \in \mathcal{L}_p[0,1] : f = 0 \text{ c.p.d.}\}$. Un elemento del cociente será una clase de la forma

$$f + N = \{f + g : g \in N\},$$

y es claro que el valor de ϕ sobre una clase no depende del representante elegido. Por tanto, haciendo $\|f + N\|_p = \phi(f)$, damos la bienvenida al espacio normado $L_p[0,1]$, que en la práctica se maneja como $\mathcal{L}_p[0,1]$, entendiendo las igualdades c. p. d.

La complitud de la norma $\|.\|_p$ se puede hacer basándose en resultados clásicos de la integral de Lebesgue, más concretamente, en el lema de Fatou, y en el siguiente hecho, totalmente inocente que puede volver a ser un ejercicio para los alumnos: Un espacio normado X es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente es convergente en X. (Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X, decimos que la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es absolutamente convergente si la serie de escalares $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ converge). Recordar el criterio de comparación para series de escalares es toda la motivación que se necesita.

Diremos que una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ medible Lebesgue es **esencialmente acotada** si existe $M > 0$ tal que $\mu(\{t \in [0,1] : |g(t)| > M\}) = 0$, donde μ representa la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Al número M se le llama **cota esencial** de la función f.

Denotando $\mathcal{L}_\infty[0,1]$ al espacio vectorial de las funciones esencialmente acotadas en $[0,1]$, podemos definir el supremo esencial como

$$ess\ sup(f) = min\{M : M \text{ es cota esencial de } f\}$$

Al igual que en los espacios $\mathcal{L}_p[0,1]$, el **supremo esencial** no es una norma, ya que $ess\ sup(f) = 0$ si $f = 0$ c. p. d. Ya sabemos cómo arreglar esto: basta considerar el cociente de $\mathcal{L}_\infty[0,1]$ por el subespacio $N = \{f \in \mathcal{L}_\infty[0,1] : f = 0 \text{ c.p.d}\}$, que denotaremos $L_\infty[0,1]$, y definir $\|f + N\| = ess\ sup(f)$ para $f + N \in L_\infty[0,1]$, es decir, otra vez lo que se hace es identificar las funciones que son iguales c. p. d.

La complitud de la norma $\| .\|$ se desprende fácilmente de la definición de supremo esencial, puesto que la condición de Cauchy en $L_\infty[0,1]$ se convierte en la condición de Cauchy uniforme sobre un subconjunto de $[0,1]$ de medida de Lebesgue 1.

Conviene señalar que, dependiendo de los conocimientos de teoría de la medida, se puede optar por presentar los espacios $L_p(\mu)$ para cualquier medida μ, sin embargo, nos parece conveniente limitarnos en esta primera parte del proyecto a la integral de Lebesgue, que sí es conocida por el alumno con toda seguridad. Por otra parte, el caso general se presentará, sin duda, en la asignatura de Teoría de la Medida. No obstante, incluimos un apéndice cubriendo estos tópicos.

(v) Aunque ya hemos definido normas en espacios vectoriales cocientes, nos parece oportuno presentar el caso general.

Sea X un espacio normado y consideremos algún subespacio cerrado Y de X. Definiendo $\|x + Y\| = inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$ (distancia de x a Y) para cada clase $x + Y$ en el cociente de X por Y, obtenemos una norma en dicho cociente X/Y. Además es fácil comprobar que si X es un espacio de Banach, entonces el cociente X/Y con la norma recién definida es también un espacio de Banach. Merece la pena presentar una especie de recíproco de este último hecho, que puede ser considerado como una pequeña incursión en las propiedades tipo tres espacios, y es el siguiente: Si X es un espacio normado con un subespacio completo Y, de tal forma que el cociente X/Y es completo, entonces X es también un espacio de Banach.

Quizá merezca la pena decir que si se parte de un espacio vectorial X con una seminorma, (concepto que aunque no definido explícitamente, encuentra dos ejemplos en la función ϕ o en el supremo esencial definidos en el punto anterior), y se considera como Y el subespacio formado por los elementos de X sobre los que la seminorma se anula, el cociente X/Y se dota de estructura de espacio normado de igual forma a como lo hicimos en el párrafo anterior. Este proceso fue el que seguimos para presentar los espacios $L_p[0,1]$.

(vi) Pasamos ahora a presentar el espacio producto de espacios normados. Consideremos $X_1, X_2, \dots, X_n$, ($n \in \mathbb{N}$) espacios normados y denotamos $\|.\|$ a la norma de todos ellos. En el espacio vectorial producto $\Pi_{i=1}^n X_i$ podemos definir para cada $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \|(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)\|_p,$$

obteniendo una nueva norma. No fue más que esto lo que hicimos para definir las normas $\|.\|_p$ en $\mathbb{K}^n$. De hecho para cada $1 \leq p \leq +\infty$, obtenemos una norma en el producto $\Pi_{i=1}^n X_i$.

No conlleva dificultad alguna comprobar que el producto, con cualquiera de las normas definidas, es un espacio de Banach si, y sólo si, cada X_i lo es.

(vii) Para cerrar esta lista de ejemplos, nos parece oportuno decir que la estructura algebraica de un espacio vectorial no debe satisfacer ninguna propiedad especial para poder definir una norma. En efecto, si X es un espacio vectorial y $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base de X, cualquier elemento $x \in X$ se expresa, de forma única, como combinación lineal de un subconjunto finito de la base: digamos $x = \sum_{i=1}^{n} t_i e_{\lambda_i}$. Podemos entonces definir, por ejemplo $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |t_i|$, obteniendo así una norma en X.

La lista de detalles a comprobar en los ejemplos presentados puede servir de fuente para los primeros ejercicios de los alumnos, así como una primera toma de contacto.

I.2 Continuidad de aplicaciones lineales

Pasamos ahora a estudiar el segundo ingrediente básico de un curso de Análisis Funcional. Nos referimos a las aplicaciones lineales continuas, que en esta primera parte de nuestro proyecto, se considerarán entre espacios normados.

El siguiente resultado, cuya demostración no tiene comentario, caracteriza la continuidad de una aplicación lineal.

Proposición I.2.2 . *Sean X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T *es continua en* 0.

(ii) *Existe una constante $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in X$.*

(iii) T *es Lipschitziana, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|$ $\forall x, y \in X$. (Por tanto T es continua en todo punto).*

(iv) $T(B_X)$ *es un subconjunto acotado de Y.*

(v) $T(A)$ *es un subconjunto acotado de Y, para cualquier subconjunto acotado A de X.*

Por tanto, los conceptos de continuidad, continuidad uniforme y lipschitzianidad coinciden para aplicaciones lineales.

Diremos que dos normas en un espacio vectorial X son **equivalentes** si generan la misma topología en X. Como consecuencia de la caracterización anterior obtenemos la siguiente equivalencia.

Corolario I.2.3. *Sea X un espacio vectorial y consideremos $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ dos normas en X. Entonces dichas normas son equivalentes si, y sólo si, existen dos constantes positivas m y M tales que*

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \ \forall x \in X.$$

Como aplicación, obsérvese que todas las normas definidas en $\mathbb{K}^n$, hasta el momento, son equivalentes, según se desprende de las desigualdades obvias:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \ x \in \mathbb{K}^n, \ 1 \leq p < +\infty.$$

Igualmente se obtiene la equivalencia entre las normas anteriores, cuando son consideradas para dotar de estructura de espacio normado a un producto de espacios normados.

Para dos espacios normados X, Y denotaremos por $L(X,Y)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de X en Y, también llamado espacio de **operadores**. Es inmediato que definiendo,

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\}$$

se obtiene una norma en $L(X,Y)$ que llamaremos norma de operadores. Debe ser ya una rutina para los alumnos comprobar la complitud de dicha norma, siempre que Y sea completo, obteniendo así un nuevo espacio de Banach. Además es fácil obtener las siguientes expresiones equivalentes de la norma recién definida:

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\} = sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} =$$

$$= Min\{M > 0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}$$

Los elementos del espacio vectorial $L(X,Y)$ se pueden componer con los de $L(Y,Z)$, si Z es otro espacio normado. Dicha composción nos da la estructura de álgebra en $L(X,X)$, que por simplicidad notaremos $L(X)$, si $X = Y = Z$. Pues bien, la buena avenencia de la composición con la norma de operadores se desprende de la desigualdad inmediata $\|S \circ T\| \leq \|S\| \ \|T\|$, válida para $T \in L(X,Y), \ S \in L(Y,Z)$.

Como consecuencia, otra vez de I.2.2, toda aplicación lineal continua entre espacios normados es Lipschitziana y, por tanto, uniformemente continua, lo que nos da la posibilidad de extender aplicaciones lineales continuas, como muestra el siguiente hecho.

Corolario I.2.4. *Sean X un espacio normado, Y un espacio de Banach y M un subespacio denso en X. Si $T \in L(M,Y)$, entonces existe $\overline{T} \in L(X,Y)$, única aplicación lineal y continua, extendiendo a T, esto es, $\overline{T}(m) = T(m)\ \forall m \in M$.*

Introducimos ahora dos conceptos de *"igualdad"* naturales entre espacios normados.

Diremos que dos espacios normados, X, Y, son **isomorfos** si existe $T \in L(X,Y)$ tal que T es biyectiva y su inversa es continua. Al operador T lo llamaremos **isomorfismo**. También diremos que X e Y son **isométricos** si además de ser isomorfos, el isomorfismo T es también una **isometría**, esto es $\|T(x)\| = \|x\|$ para cualquier $x \in X$. Obsérvese que, como consecuencia de I.2.2, una aplicación lineal T de X en Y es un isomorfismo entre X y su imagen si, y sólo si, existen dos constantes positivas M, m tales que:

$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|\ \forall x \in X.$$

Con esta terminología, el corolario anterior nos dice que $L(M,Y)$ y $L(X,Y)$ son espacios de Banach isométricos.

Si queremos justificar categóricamente el concepto de isomorfismo, recién definido entre espacios normados, estamos obligados a decir que un **homomorfismo** entre dos objetos X, Y de la categoría de los espacios normados ha de ser un operador $T \in L(X,Y)$, que además es abierto en su imagen, esto es, lleva abiertos de X en abiertos de $T(X)$. Así, si T es un homomorfismo, $X/Ker(T)$ y $T(X)$ serán espacios normados isomorfos, mediante el isomorfismo $\overline{T}(x + Ker(T)) = T(x)$. (Por supuesto, estamos considerando la norma cociente de la de X en $X/Ker(T)$ y la restringida de Y en $T(X)$). Se generaliza así el primer teorema de isomorfía de espacios vectoriales, familiar para los alumnos.

Particularizamos el estudio hasta ahora hecho del espacio de operadores $L(X, Y)$, cuando $Y = \mathbb{K}$, introduciendo el espacio dual.

Si X es un espacio normado, llamaremos espacio **dual** o **dual topológico** de X, y lo denotaremos X^*, al espacio de Banach $L(X, \mathbb{K})$. De esta forma, X^* es un subespacio del dual algebraico de X, denotado por $X^\sharp$, que no es más que el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{K}$, también llamadas **funcionales lineales**.

Es sabido que dos funcionales son linealmente dependientes si, y sólo si, sus núcleos coinciden. Por tanto, un funcional está determinado, salvo múltiplos escalares, por su núcleo. Recogemos ahora un hecho exclusivo de los funcionales, donde el núcleo juega un papel protagonista.

Proposición I.2.5 . *Sea X un espacio normado y f un funcional en X. Entonces son equivalentes:*

(i) f es un homomorfismo (de espacios normados).

(ii) f es continua.

(iii) $Ker(f)$ es cerrado.

Las dos implicaciones hacia abajo son inmediatas. Para la otra implicación basta observar que un funcional siempre es una aplicación abierta sobre su imagen, que es $\{0\}$ si el funcional es idénticamente nulo y $\mathbb{K}$ en caso contrario. Por otro lado, la continuidad de f se deduce fácilmente del hecho de que el núcleo sea cerrado.

El siguiente enunciado generaliza la expresión familiar de la distancia de un punto a un plano de ℓ_2^3.

Proposición I.2.6 . *Sea X un espacio normado y $f \in X^*$ no idénticamente nulo. Si $x \in X$, entonces $dist(x, Ker(f)) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.*

Si consideramos un espacio normado complejo X, podemos también ver a X como espacio real, olvidándonos de la estructura compleja. Denotaremos a este espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$. Ahora nos podemos preguntar sobre la relación existente entre los espacios reales $(X_{\mathbb{R}})^*$ y $(X^*)_{\mathbb{R}}$. El siguiente hecho nos dice, como no podía ser de otra forma, que ambos espacios son el mismo.

Proposición I.2.7 . *Sea X un espacio normado complejo. Entonces la aplicación de $(X^*)_{\mathbb{R}}$ en $(X_{\mathbb{R}})^*$, que a cada f le hace corresponder su parte real Re f, es una biyección $(\mathbb{R}-)$lineal isométrica.*

Aunque el estudio que hagamos del espacio dual carece de contenido, por ahora, obsérvese que hasta el momento no podemos probar que $X^* \neq 0$ para un espacio normado arbitrario X, nos parece conveniente acabar este tema identificando los duales de ciertos espacios de Banach clásicos, dada su elementalidad.

Proposición I.2.8. *Sean Γ un conjunto no vacío, $p \geq 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (entendiendo que $q = \infty$ si $p = 1$). Entonces la aplicación $\Phi : \ell_q(\Gamma) \longrightarrow \ell_p(\Gamma)^*$ definida por*

$$\Phi(y)(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x(\gamma)y(\gamma), \ x \in \ell_p(\Gamma), y \in \ell_q(\Gamma),$$

es una isometría sobreyectiva.

Proposición I.2.9 . *Las aplicaciones $\Phi : \ell_1 \longrightarrow c_0^*$ y $\Psi : \ell_1 \longrightarrow c^*$ definidas por:*

$$\Phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)y(n), \ x \in c_0, y \in \ell_1,$$

$$\Psi(y)(x) = y(1) \lim_{n \to +\infty} x(n) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)y(n+1), \ x \in c, y \in \ell_1$$

son ambas isometrías sobreyectivas.

Teorema I.2.10. *(**Representación de Riesz.**) Sean $p \geq 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (entendiendo que $q = \infty$ si $p = 1$). Entonces la aplicación $\Phi : L_q[0,1] \longrightarrow L_p[0,1]^*$ definida por:*

$$\Phi(g+N)(f+N) = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \ f \in \mathcal{L}_p[0,1], g \in \mathcal{L}_q[0,1],$$

es una isometría sobreyectiva.

Dependiendo de los conocimientos de los alumnos sobre Teoría de la Medida, podremos optar por presentar el dual de los espacios $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$. En el caso de que $1 < p < +\infty$, dicha identificación se puede hacer para medidas arbitrarias como podrá verse más adelante, con muy pocos conocimientos de la Teoría de la Medida. Si $p = 1$ ó $p = \infty$, es preciso adentrarse más en el mundo de las medidas, por lo que hemos elaborado un apéndice sobre ello. El mismo comentario merece la identificación del dual del espacio $C_0(L)$, para un espacio topológico localmente compacto y Haussdorff L, que también queda presentado en dicho apéndice.

I.3 Espacios normados de dimensión finita

Nos ocuparemos en este tema del estudio particular de los espacios normados más sencillos que conocemos, los de dimensión finita. Conviene llamar la atención sobre el hecho de que todas las normas consideradas hasta el momento en $\mathbb{K}^n$ han resultado ser equivalentes y generan la topología usual en $\mathbb{K}^n$.

Comenzamos por aprovechar la continuidad de la suma y el producto por escalares en cualquier espacio normado para obtener el siguiente hecho.

Lema I.3.11 . *Toda aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$, con la topología usual, en cualquier espacio normado es continua.*

El caso $n = 1$ del lema anterior no es más que la continuidad del producto por escalares en cualquier espacio normado. Se concluye con una sencilla inducción, en la que se vuelve a utilizar la continuidad del producto por escalares, así como la continuidad de la suma de vectores en cualquier espacio normado.

Teorema I.3.12 . *(***Tihonov***) Sea X un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Entonces toda biyección lineal de $\mathbb{K}^n$ en X es un isomorfismo (considerando la topología usual en $\mathbb{K}^n$ y la de la norma en X).*

Para su demostración, consideramos $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow X$ una biyección lineal. El lema anterior nos da la continuidad de f, por tanto es suficiente probar que f es abierta. Para ello, dada la linelidad de f, basta ver que el origen del espacio vectorial X es un punto interior del conjunto $f(B)$, donde $B = B_{\ell_2^n}$.

Como $S = S_{\ell_2^n}$ es compacto en $\mathbb{K}^n$, la continuidad de f nos dice que $f(S)$ es compacto y, por tanto, cerrado en X. Dado que $0 \notin f(S)$, por la inyectividad de f, obtenemos un $\delta > 0$ tal que $\delta B_X \cap f(S) = \emptyset$. Concluiremos viendo que $\delta B_X \subset f(B)$.

En efecto, si $x \in \delta B_X \setminus f(B)$, encontramos $z \in \mathbb{K}^n$, con $f(z) = x$ y $\|z\|_2 > 1$. Entonces $f(\frac{z}{\|z\|_2}) \in f(S) \cap \delta B_X$, contradiciendo el hecho de que dicha intersección es vacía.

Destacamos a continuación una serie de consecuencias importantes del teorema anterior.

Corolario I.3.13 .

(i) *Si X es un espacio normado de dimensión finita, toda aplicación lineal de X en otro espacio normado Y es continua.*

(ii) *Toda biyección lineal entre dos espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo. En consecuencia, dos espacios normados de dimensión finita son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.*

(iii) *Todas las normas sobre un mismo espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

(iv) *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

(v) *Todo subespacio finito dimensional de un espacio normado es cerrado.*

(vi) *Un subconjunto de un espacio normado de dimensión finita es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

Como muestra de la exclusividad, para los espacios de dimensión finita, del resultado anterior, mostraremos que en cualquier espacio normado de dimensión infinita se pueden definir funcionales no continuos.

Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Existe entonces $\{e_n\}$, sucesión de vectores linealmente independientes en X. Sea B una base algebraica de X, conteniendo la sucesión $\{e_n\}$, y consideremos el funcional lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, definido sobre los elementos de B mediante:

$$f(e_n) = n\|e_n\|, n \in \mathbb{N} \text{ y } f(x) = 0 \text{ si } x \in B \setminus \{e_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $\lim_{n\to+\infty} \frac{e_n}{n\|e_n\|} = 0$, mientras que $f(\frac{e_n}{n\|e_n\|}) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, lo que nos da la no continuidad de f.

Como consecuencia del corolario anterior, la bola unidad de un espacio normado finito dimensional es un subconjunto compacto o, si se quiere, la topología de la norma es localmente compacta. Cabe preguntarse si esta propiedad es también exclusiva de los espacios normados de dimensión finita. La respuesta es afirmativa y la recoge el clásico Teorema de Riesz.

Teorema I.3.14 . (**Riesz**) *Sea X un espacio normado. Entonces son equivalentes:*

(i) X es localmente compacto.

(ii) B_X es compacto.

(iii) X es finito dimensional.

Antes de comentar la demostración del teorema de Riesz, necesitamos un lema previo, que nos dice que en cualquier espacio normado se puede encontrar una dirección casi *"perpendicular"* a cualquier subespacio cerrado y propio.

Lema I.3.15 . *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado y propio ($M \neq X$) de X. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un vector $x_\varepsilon \in S_X$ verificando que $dist(x_\varepsilon, M) > 1 - \varepsilon$.*

Fijado $\varepsilon > 0$, la demostración del lema consiste en tomar un vector $x_0 \in X \setminus M$ y considerar $m_0 \in M$ tal que $\|x_0 - m_0\|$ esté suficientemente, dependiendo de ε, próximo a $dist(x_0, M)$. Bastará entonces hacer $x_\varepsilon = \frac{x_0 - m_0}{\|x_0 - m_0\|}$.

Para demostrar la implicación $ii) \Rightarrow iii)$ del teorema de Riesz, comenzaremos observando que la familia de bolas abiertas de centro arbitrario, y por ejemplo, radio $\frac{1}{2}$ forman un recubrimiento por abiertos de B_X. La compacidad de éste último nos dice que existe un subrecubrimiento finito, digamos que por bolas abiertas centradas en los puntos $x_i, 1 \leq i \leq n$.

Sea M el subespacio vectorial de X generado por los $\{x_i\}$, que desde luego es finito dimensional, y por tanto cerrado, por I.3.13. Podemos aplicar entonces el lema anterior para encontrar un vector $z \in S_X$ cuya distancia a cualquier x_i sea estrictamente mayor que $\frac{1}{2}$, llegando así a contradicción con la existencia del subrecubrimiento finito.

Conviene poner de manifiesto la distinta naturaleza de las afirmaciones del teorema de Riesz, mientras las dos primeras son topológicas, la tercera es puramente algebraica, filosofía de la que está impregnado lo que damos en llamar Análisis Funcional.

Como consecuencia inmediata, todo subconjunto compacto en un espacio normado de dimensión infinita ha de tener interior vacío, lo que nos expresa claramente que la abundancia de compactos, tal y como se entiende en el caso finito dimensional, es imposible cuando la dimensión es infinita. Es indiscutible la desventaja de este hecho, sin embargo no todo está perdido, ya que sí es posible tener conjuntos compactos, aún siendo la dimensión infinita, que no *"vivan"* en dimensión finita. En efecto, si X es un espacio normado infinito dimensional, podemos considerar una sucesión $\{e_n\}$ de vectores linealmente independientes en X con límite cero, como ya lo hicimos con anterioridad. Entonces el conjunto $K = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es compacto y no *"vive"* en ningún subespacio finito dimensional.

Si los espacios finito dimensionales son los espacios normados más *"pequeños"*, algebraicamente hablando, introducimos ahora los espacios normados separables, que se pueden entender como los más *"pequeños"*, desde el punto de vista topológico o, si se quiere, el siguiente paso en *"grandeza"*, después de los finito dimensionales.

Definición I.3.16 . *Sea X un espacio normado. Diremos que X es* **separable** *si existe un subconjunto numerable $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$, donde $\overline{A}$ denota el cierre de A en la topología de la norma.*

Por supuesto, los espacios normados finito dimensionales son separables. Precisamente, la separabilidad de $\mathbb{K}$ permite comprobar que un espacio normado X es separable si, y sólo si, existe un subconjunto numerable $A \subset X$ tal que $\overline{lin}(A) = X$, donde $\overline{lin}(A)$ denota el menor subespacio cerrado conteniendo al conjunto A.

Aparte de los espacios finito dimensionales, otros ejemplos de espacios separables son c_0 y $\ell_p,\ 1 \leq p < +\infty$, ya que el conjunto formado por las sucesiones con una única coordenada no nula e igual a 1 es numerable y genera cada uno de los espacios anteriores. Si al conjunto anterior le añadimos la sucesión constantemente igual a 1, deducimos la separabilidad del espacio c.

El primer ejemplo de espacio normado no separable es ℓ_∞. Para comprobarlo basta considerar para cada subconjunto no vacío $F \subset \mathbb{N}$, la sucesión $x_F \in \ell_\infty$ que toma el valor 1 en cada elemento de F y es nula en el resto. El conjunto formado por dichas sucesiones es no numerable y $\|x_F - x_S\|_\infty = 1$ siempre que $F \neq S$, lo que muestra la imposibilidad de la existencia de un conjunto numerable y denso en ℓ_∞. Análogamente se puede comprobar la no separabilidad de $L_\infty[0,1]$ y $\ell_p(\Gamma),\ 1 \leq p \leq +\infty$, si Γ no es numerable.

Por último, la separabilidad de los espacios $C[0,1]$ y $L_p[0,1],\ 1 \leq p < +\infty$ se debe a la densidad de los polinomios (Teorema de Stone-Weierstrass) y de las funciones continuas, respectivamente.

BIBLIOGRAFIA: Por supuesto, en cualquier texto de Análisis Funcional se puede encontrar más de lo aquí expuesto. Si hubiera que elegir algunos al nivel de nuestro programa, optaríamos por [18], [23] y [28]. El teorema de Tihonov se puede ver, por ejemplo, en [26].

Capítulo II

EL TEOREMA DE HAHN-BANACH.

Este capítulo está dedicado a uno de los grandes principios del Análisis Funcional: el Teorema de Hahn-Banach. Motivamos su presentación con el problema de la extensión de funcionales continuos y dedicamos el primer tema a sacar el partido posible a la versión analítica del teorema, que nos permite un primer contacto con la teoría de dualidad.

Si bien el teorema de Hahn-Banach, junto con los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss que más adelante abordaremos, son considerados los tres grandes principios del Análisis Funcional, el que nos ocupa en este capítulo debe ser considerado como el más versátil. Dedicamos el segundo tema a justificar este comentario, dando aplicaciones del teorema de Hahn-Banach a otros campos, aplicación que en muchos casos es consecuencia de una reformulación equivalente del teorema. Entre las aplicaciones incluimos los teoremas de separación. Nos parece obligado comentar la equivalencia entre los puntos de vista analítico y geométrico, así como incluir alguna reformulación equivalente más, para justificar esa versatilidad a la que aludíamos. Aunque las aplicaciones del Teorema de Hahn-Banach abundarán en el resto de nuestro proyecto, destacamos, en este capítulo, la existencia de medias invariantes en todo semigrupo abeliano, como consecuencia de una reformulación equivalente de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach, el clásico teorema de los momentos cuya solución equivale al hecho de que todo funcional continuo admita una extensión equinórmica y el teorema de Markov-Kakutani, un resultado de la teoría del punto fijo que deducimos de los teoremas de separación.

II.1 Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

En la introducción al espacio dual, hecha en el capítulo anterior, se echó ya en falta un resultado que nos garantizara la no trivialidad del dual topológico (para el algebraico no hay problema) de un espacio normado no nulo. Hasta ahora, eso lo tenemos garantizado sólo para los espacios normados que hemos dado en llamar *"clásicos"*, entre los que podemos incluir ya a los espacios finito dimensionales, gracias al teorema de Tihonov. Con esta motivación se puede ya plantear el problema de la extensión continua de un funcional continuo, definido sobre algún subespacio M al total X. Puesto que dicha continuidad equivale a que el funcional esté dominado por un múltiplo de la norma, el problema planteado consiste en partir de un tal funcional $f \in M^*$ y encontrar otro funcional $\overline{f}$ en X, extendiendo a f, y dominado todavía por un múltiplo de la norma.

Por su aplicación posterior, consideraremos el problema planteado sustituyendo la norma por funciones algo más generales.

Definición II.1.1. *Sea X un espacio vectorial. Un funcional* **sublineal** *en X es una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:*

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in X$.

(ii) $p(tx) = tp(x)\ \forall t \geq 0, x \in X$.

Si además se verifica que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$, diremos que p es una **seminorma**.

Por supuesto, una norma, de hecho también una seminorma, es un funcional sublineal. Aún más, cualquier funcional $\mathbb{R}-$lineal es sublineal.

Teorema II.1.2. *(***Hahn-Banach, versión analítica***) Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio (vectorial) de X y f es un funcional en M verificando:*

$$Re\ f(m) \leq p(m)\ \forall m \in M,$$

entonces existe $\overline{f}$*, funcional en* X*, tal que* $\overline{f}(m) = f(m)\ \forall m \in M$ *y*

$$Re\ \overline{f}(x) \leq p(x)\ \forall x \in X.$$

Si, además, p *es una seminorma entonces se tiene* $|\overline{f}(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X$.

En primer lugar, nos podemos limitar al caso real, según dijimos en I.2.7. Por otro lado, intentemos plantear un problema un poco más sencillo, que de hecho será la pieza clave. Supongamos, por el momento, que el espacio vectorial cociente X/M es de dimensión 1. Entonces existe $u \in X \setminus M$ tal que el espacio X se descompone como suma directa de M y $\mathbb{R}u$, que denota el espacio 1-dimensional generado por u.

En este ambiente, la definición del funcional $\overline{f}$ que queremos viene casi completamente obligada, pues lo que tenemos que hacer no es más que encontrar un escalar $r \in \mathbb{R}$ de forma que si definimos

$$\overline{f}(m + tu) = f(m) + tr\ \forall x = m + tu \in X,$$

se verifique la desigualdad $\overline{f}(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$.

En otras palabras, el problema es encontrar $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(m) + tr \leq p(m + tu)\ \forall m \in M, t \in \mathbb{R}.$$

Utilizando las propiedades de p y la linealidad de f, no es difícil comprobar que la afirmación anterior, que se puede ver como un doble enunciado distinguiendo los casos $t > 0$ y $t < 0$, equivale a la existencia de $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(m) - p(m - u) \leq r \leq p(n + u) - f(n)\ \forall m, n \in M$$

La veracidad de la última afirmación se debe a la linealidad de f, las propiedades de p y a la dominación de f por p en M, según la hipótesis, lo que resuelve el problema, siempre que el cociente X/M sea 1-dimensional.

Una inducción sencilla, permite resolver el problema en el caso de que la dimensión del cociente anterior sea finita, pero en caso contrario necesitamos una *"inducción"* un poco más sofisticada. La forma más elegante de resolverlo, que hoy en día es bien conocida, es aplicar el lema de Zorn.

Consideremos la familia $\mathcal{A}$ formada por los pares (N, g), donde N es un subespacio de X conteniendo a M y g es un funcional sobre N que extiende a f y está dominado por p. Definimos en $\mathcal{A}$ un orden parcial mediante:

$$(N_1, g_1) \leq (N_2, g_2) \text{ si } N_1 \subset N_2 \text{ y } g_2(n) = g_1(n) \ \forall n \in N_1.$$

No es difícil comprobar que el orden parcial recién definido es inductivo, esto es, todo subconjunto totalmente ordenado en $\mathcal{A}$ tiene una cota superior en $\mathcal{A}$. El lema de Zorn nos dice, entonces, que podemos encontrar un elemento maximal $(Y, \overline{f}) \in \mathcal{A}$. De hecho, si aplicamos toda la potencia del lema de Zorn, obtenemos que todo elemento de $\mathcal{A}$ es menor o igual que algún maximal.

La maximalidad del par y el hecho de que el enunciado del teorema sea cierto cuando X/M es finito dimensional, obliga a que $Y = X$ y, por tanto, obtenemos lo que queríamos.

En el caso adicional de que p sea una seminorma, basta girar convenientemente el escalar $Re\ f(x)$ para obtener que $|f(x)| \leq p(x)$.

Podemos extraer ya como consecuencia la no trivialidad del dual de un espacio normado no nulo.

Corolario II.1.3. *Sea X un espacio normado. Si M es un subespacio de X y $f \in M^*$, entonces existe $\overline{f} \in X^*$ con $\|f\| = \|\overline{f}\|$ tal que $\overline{f}(m) = f(m)$ para todo $m \in M$.*

Podemos aplicar lo anterior en el caso de que M sea el subespacio generado por un vector no nulo, obteniendo:

Corolario II.1.4. *Sea X un espacio normado no trivial. Entonces para cada $x \in X$ existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$.*

Es inmediato entonces que X^* **separa los puntos de** X, esto es, $x = 0$ siempre que $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$. Por otro lado obtenemos la siguiente expresión para la norma de X:

$$\|x\| = Max\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\}$$

Obsérvese que la igualdad anterior nos da la norma de X, a partir del espacio dual. Precisamente, el objetivo del estudio de los espacios duales, teoría de dualidad, es obtener propiedades de un espacio a través de las de su dual y tenemos ya garantía de la no trivialidad de éste. Pretendemos entonces ilustrar cómo el nuevo ingrediente que nos ha aparecido nos va a permitir desarrollar la teoría de dualidad que, no obstante, encontrará su ambiente apropiado con los espacios localmente convexos.

Como consecuencia importante del teorema de Hahn-Banach obtenemos la descripción del dual de un subespacio. Para ello, introducimos notación.

Si M es un subespacio de un espacio normado X, llamaremos **polar** de M al subespacio de X^* dado por

$$M^0 = \{f \in X^* : f(m) = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Es claro que M^0 es un subespacio cerrado de X^*

Corolario II.1.5 . *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Entonces la aplicación $\Phi : X^*/M^0 \longrightarrow M^*$ dada por $\Phi(g + M^0) = g_{|M}$ $\forall g + M^0 \in X^*/M^0$ es una isometría sobreyectiva.*

Por razones de complitud identificamos también el dual de un cociente, aunque para ello no se necesite el teorema de Hahn-Banach.

Proposición II.1.6 . *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Entonces la aplicación $\Phi : (X/M)^* \longrightarrow M^0$ dada por $\Phi(g) = g \circ \pi$ para todo $g \in (X/M)^*$ es una isometría sobreyectiva, donde π es la proyección de X al cociente X/M.*

Otra consecuencia de II.1.4, junto el corolario anterior, es la posibilidad de que el dual nos distinga cuándo un vector está en un subespacio cerrado.

Corolario II.1.7 . *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y x_0 un vector de X de forma que $dist(x_0, M) = \delta > 0$. Entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \delta$ y $f(m) = 0$ para todo $m \in M$.*

Aplicando ahora el hecho anterior, podemos decidir cuándo un subespacio es denso, en términos del dual.

Corolario II.1.8. *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Entonces*

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^0} ker\ f.$$

En particular, M es denso en X si, y sólo si, $M^0 = \{0\}$.

Deducimos ahora fácilmente otra ilustración de cómo algunas propiedades del dual pasan al espacio.

Corolario II.1.9 . *Sea X un espacio normado. Si X^* es separable, entonces X es separable.*

Otra consecuencia del teorema de Hahn-Banach, esta vez en el espacio de los operadores entre dos espacios normados es algo que quedó pendiente en el capítulo anterior.

Corolario II.1.10 . *Sean X e Y dos espacios normados. Si el espacio de operadores $L(X, Y)$ es completo entonces Y también es completo.*

Hasta el momento hemos obtenido una serie de consecuencias, con las que mostramos cómo el teorema de Hahn-Banach es útil para el desarrollo de la teoría de dualidad. Sin embargo, una teoría de dualidad que se precie no puede dejar de tocar el otro ingrediente básico, al margen de los espacios normados, que nos ocupa. A saber, las aplicaciones lineales continuas.

Definición II.1.11 . *Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Denominaremos operador* **adjunto** *de T, denotado por T^* a la aplicación lineal y continua $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ dada por $T^*(g)(x) = g(T(x))$ para todo $g \in Y^*, x \in X$.*

El teorema de Hahn-Banach permite comprobar que la adjunción de operadores, como aplicación de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$, es una isometría lineal. El siguiente enunciado, totalmente elemental recoge algunas propiedades más de los operadores adjuntos.

Proposición II.1.12. *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.*

(i) $Ker\ T^* = T(X)^0$

(ii) Si Z es otro espacio normado y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

(iii) Si T es un isomorfismo sobreyectivo, entonces también lo es T^*. Además, en tal caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(iv) Si T es una isometría sobreyectiva, entonces también lo es T^*.

Merece la pena observar que las implicaciones en iii) y iv) de la lista anterior no vuelven, en general. (Piénsese que el dual de un espacio y el de un subespacio denso de aquél son isométricos, mientras que los espacios no tienen por qué ser ni siquiera isomorfos). Sin embargo, la relación entre un operador y su adjunto es mejor en ambiente completo, como muestra la siguiente consecuencia de II.1.8.

Corolario II.1.13. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$.*

(i) T es un isomorfismo sobreyectivo si, y sólo si, lo es su adjunto.

(ii) T es una isometría sobreyectiva si, y sólo si, lo es su adjunto.

Si el operador del que partimos es un homomorfismo (de espacios normados), el teorema de Hahn-Banach nos ayuda a obtener más información de su adjunto.

Corolario II.1.14. *Sean X, Y dos espacios normados y $T \in L(X,Y)$.*

(i) Si T es un homomorfismo, entonces $T^*(Y^*) = (Ker\ T)^0$ y T^* vuelve a ser un homomorfismo.

(ii) Si T es un monomorfismo, entonces T^* es un epimorfismo.

(iii) Si T es un epimorfismo, entonces T^* es un monomorfismo.

En realidad, las dos últimas afirmaciones del resultado anterior son consecuencia de la primera y, aunque en la última de ellas no se precise el teorema de Hahn-Banach, nos parece que éste es su lugar apropiado.

Terminaremos el desarrollo de la teoría de dualidad que nos ha permitido el teorema de Hahn-Banach hasta el momento, introduciendo el bidual de un espacio normado.

Si X es un espacio normado, notaremos X^{**}, **bidual** de X, al espacio dual de X^*. Llamaremos **inyección canónica** de X a la aplicación $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ dada por

$$J_X(x)(f) = f(x) \ \forall x \in X, f \in X^*.$$

Es claro que J_X es lineal y continua. Aún más, el corolario II.1.4, nos permite deducir que J_X es isométrica, pudiendo así identificar perfectamente X como un subespacio de X^{**}. (Conviene observar que el cierre de $J_X(X)$ en X^{**} nos proporciona la completación de X). Con esta nueva visión, si $T \in L(X, Y)$, para otro espacio normado Y, el operador $T^{**} \in L(X^{**}, Y^{**})$, segundo adjunto de T, no es más que una extensión equinórmica de éste.

Debe ser familiar, en ambiente algebraico, la sobreyectividad de J_X si X es un espacio vectorial finito-dimensional. Sin embargo, la sobreyectividad de la inyección canónica de un espacio normado obliga a su complitud. Daremos enseguida nombre a los espacios cuya inyección canónica es sobreyectiva.

Definición II.1.15 . *Sea X un espacio de Banach. Diremos que X es* **reflexivo** *si J_X es sobreyectiva.*

Una observación obligada es el carácter topológico de la reflexividad, esto es, la imagen por un isomorfismo de un espacio reflexivo vuelve a ser reflexivo.

Aparte de los espacios finito-dimensionales, otros ejemplos sencillos de espacios reflexivos son ℓ_p y $L_p[0,1]$ (si se considera oportuno $L_p(\mu)$) si $1 < p < +\infty$.

Algunos ejemplos de espacios de Banach no reflexivos, cuya comprobación no debe ofrecer dificultad son, c_0, c, ℓ_1.

Parece natural que la reflexividad de un espacio de Banach, concepto que en algún sentido nos da idea de *"pequeñez"*, pase a sus subespacios cerrados. De hecho, como consecuencia de las identificaciones que conocemos para el dual de un subespacio y de un cociente, podemos obtener una caracterización que ya comentamos para la complitud.

Corolario II.1.16 . *Sea X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Entonces son equivalentes:*

(i) X es reflexivo.

(ii) M y X/M son reflexivos.

Como consecuencia, obtenemos nuevos ejemplos de espacios no reflexivos, sin necesidad de conocer la inyección canónica. Por ejemplo cualquier espacio de Banach que contenga un subespacio isomorfo a c_0, como es el caso de ℓ_∞ o $C[0,1]$, que de hecho contienen un subespacio isométrico a c_0.

Como ejemplo de caso *"patológico"*, digamos que existen espacios de Banach isométricos a su bidual cuya inyección canónica no es sobreyectiva y, por tanto, no son reflexivos. Un estudio completo de este tipo de espacios puede verse en [55].

Con el fin de llamar la atención sobre una propiedad característica de los espacios reflexivos, introducimos la siguiente notación.

Si X es un espacio normado y $f \in X^*$, diremos que f **alcanza** su norma si existe $x \in S_X$ tal que $f(x) = \|f\|$, en definitiva, cuando el supremo que define la norma de f es, de hecho, un máximo.

La manera más familiar que se tiene para que f alcance su norma es asegurarse de que B_X es compacta, cosa que ocurre sólo si el espacio es finito-dimensional. Sin embargo, como consecuencia, otra vez de II.1.4, se obtiene fácilmente lo que se quiere en ambiente reflexivo. (De hecho, el alumno tendrá oportunidad de ver más adelante que esto es debido a su esquema familiar, es decir, B_X sí que es compacta en una topología que no es la de la norma y en la que los funcionales del dual son continuos, la topología débil).

Corolario II.1.17. *Sea X un espacio reflexivo. Entonces todo funcional de X^* alcanza su norma.*

No es tan obvio el recíproco del corolario anterior. El resultado que caracteriza la reflexividad a través del hecho de que todo funcional del dual alcance su norma no es ni mucho menos trivial y se debe a R. C. James. Lo presentamos a título informativo.

Teorema II.1.18. *(James) Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, todo funcional de X^* alcanza su norma.*

II.2 Más teoremas de Hahn-Banach. Aplicaciones

Si el primer tema de este capítulo ha permitido una primera toma de contacto con la teoría de dualidad en espacios normados, gracias al teorema de Hahn-Banach; pretendemos en este segundo tema, como se quiere indicar en el título, mostrar la utilidad y variedad de aplicaciones de dicho teorema, que ha merecido ser denominado uno de los principios fundamentales del Análisis Funcional. De la cantidad de versiones equivalentes y aplicaciones del teorema de Hahn-Banach (véase [9], [12], [26], [33]) destacan las de carácter geométrico por su conocido uso y naturaleza diferente a la versión que hemos dado en el tema anterior. No obstante creemos que la filosofía debe ser considerar el teorema de Hahn-Banach como un *"comodín"*, que dependiendo del problema a tratar, tiene aplicaciones de aspecto muy diverso, que a veces no son más que reformulaciones equivalentes.

Nuestra intención ahora es, por tanto, ilustrar el comentario anterior con algunas aplicaciones.

1.- Subespacios complementados. Sea X un espacio normado. Como sabemos del álgebra lineal, si X es suma directa de los subespacios M y N tenemos una biyección lineal entre $M \times N$ y X que a cada par (m, n) lo lleva en la suma $m + n \in M \oplus N = X$. Desde un punto de vista topológico, parece deseable que, además, dicha biyección sea un isomorfismo de espacios normados, lo que motiva la siguiente definición.

Definición II.2.19. *Sea X un espacio normado y M, N dos subespacios de X. Diremos que X es suma* **topológico directa** *de M y N cuando la biyección lineal que lleva cada par (m, n) en $m+n$ sea un isomorfismo (de espacios normados) entre $M \times N$ y X. Igualmente diremos que M está* **complementado** *en X cuando exista un subespacio N de forma que X sea suma topológico directa de M y N. A tal subespacio N se le llama* **complemento topológico** *de M en X.*

Es claro que un subespacio complementado ha de ser necesariamente cerrado. Por otra parte, la siguiente caracterización no debe ofrecer dificultad alguna.

Proposición II.2.20 . *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Entonces equivalen:*

(i) M es un subespacio complementado en X.

(ii) Existe P una proyección ($P^2 = P$) lineal y continua $P : X \longrightarrow X$ de forma que $Ker\ P = M$.

(iii) Existe Q una proyección ($Q^2 = Q$) lineal y continua $Q : X \longrightarrow X$ de forma que $Q(X) = M$.

Además, en tal caso, los posibles complementos topológicos de X son todos espacios normados isomorfos al cociente X/M.

Quizá sea el momento de presentar los primeros ejemplos de espacios no complementados.

Teorema II.2.21. (**Phillips**) *No existe ninguna aplicación lineal y continua de ℓ_∞ en c_0 cuya restricción a c_0 sea la identidad. Equivalentemente, c_0 no está complementado en ℓ_∞.*

La demostración puede verse en [28], cuyo ingenio reside esencialmente en el siguiente hecho.

Lema II.2.22 . *Existe una familia no numerable $\{N_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, tales que, para cualesquiera $\lambda \neq \mu \in \Lambda$ se tiene que $N_\lambda \cap N_\mu$ es finito.*

No obstante, el teorema de Hahn-Banach nos va a proporcionar los primeros ejemplos de espacios complementados, nos referimos a los finito dimensionales.

Proposición II.2.23. *Todo subespacio finito dimensional de un espacio normado está complementado.*

Para su demostración, consideramos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base en el subespacio finito dimensional M del espacio normado X. Entonces cada $m \in M$ se expresa de manera única en la forma

$$m = \sum_{k=1}^{n} g_k(m) e_k,$$

donde $g_1, \ldots, g_n$ son elementos del dual algebraico $M^\sharp$. Entonces, el teorema de Tihonov nos dice que $g_i \in M^*$ para todo $1 \leq i \leq n$, gracias a la dimensión finita de M. El teorema de Hahn-Banach nos proporciona ahora funcionales $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ que extienden a $g_1, \ldots, g_n$, respectivamente.

Definiendo, entonces

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k \ \forall x \in X,$$

se obtiene que P es una proyección lineal continua con $P(X) = M$ y, por tanto, M está complementado en X.

Aunque no sea consecuencia del teorema de Hahn-Banach, sino del teorema de Tihonov, los subespacios cerrados de codimensión finita de un espacio normado también están complementados.

2.- El dual del espacio $C[0,1]$. Pretendemos, en este apartado, usar el teorema de Hahn-Banach para identificar, de alguna forma conocida, los elementos del dual de $C[0,1]$.

Recordamos que una función $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ es de **variación acotada** si

$$V(g) = sup \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| < +\infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones del intervalo [0,1] de la forma $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Las integrales que aparecerán son Riemann-Stieltjes. El conocimiento que necesitamos aquí de esta integral es bastante elemental y queda cubierto sobradamente en [20], por otra parte las propiedades que utilizaremos de esta integral no son más que las análogas para la integral de Riemann, un caso particular bien conocido por el alumno.

Teorema II.2.24 . *Equivalen:*

(i) $\Phi \in C[0,1]^*$.

(ii) Existe una función de variación acotada $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que*

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)dg(t) \ \forall f \in C[0,1].$$

Además, en tal caso, $\|\Phi\| = V(g)$.

La implicación $ii) \Rightarrow i)$ no es más que utilizar las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes, ya que si g es de variación acotada se tiene que

$$|\int_0^1 f(f)dg(t)| \leq \|f\|_\infty V(g),$$

de donde deducimos que $\Phi \in C[0,1]^*$ con $\|\Phi\| \leq V(g)$.

Para la implicación $i) \Rightarrow ii)$ consideraremos $C[0,1]$ como subespacio de $\ell_\infty[0,1]$, el espacio de Banach de las funciones acotadas en $[0,1]$ con la norma del supremo.

Si $\Phi \in C[0,1]^*$, por el teorema de Hahn-Banach podemos extender Φ a $\ell_\infty[0,1]$, es decir, existe $F \in \ell_\infty[0,1]^*$ tal que $F(f) = \Phi(f)$ para cada $f \in C[0,1]$ y con $\|F\| = \|\Phi\|$.

Si, para cada $t \in [0,1]$ denotamos por $\mathcal{X}_t$ a la función característica del intervalo $[0,t)$, podemos definir

$$g(t) = F(\mathcal{X}_t) \ \forall t \in [0,1].$$

Nótese que la extensión F hace aquí su trabajo, puesto que Φ no está definida sobre $\mathcal{X}_t$.

La demostración se concentra entonces en probar que g es de variación acotada. Consideremos, pues, una partición del intervalo $[0,1]$ en la forma $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$ y sea λ_i un escalar de módulo uno de forma que

$$\lambda_i(g(t_i) - g(t_{i-1})) = |g(t_i) - g(t_{i-1})| \ \forall 1 \leq i \leq n.$$

Tenemos ahora

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = F(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\mathcal{X}_{t_k} - \mathcal{X}_{t_{k-1}})) \leq$$

$$\leq \|F\| \ \| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\mathcal{X}_{t_k} - \mathcal{X}_{t_{k-1}})\|_\infty = \|\Phi\|,$$

lo que nos dice que g es una función de variación acotada y $V(g) \leq \|\Phi\|$.

Si $f \in C[0,1]$ y definimos $f_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})(\mathcal{X}_{\frac{k}{n}} - \mathcal{X}_{\frac{k-1}{n}})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$F(f_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})(g(\frac{k}{n}) - g(\frac{k-1}{n})) = \int_0^1 f_n dg(t) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $\lim_{n\to+\infty} F(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n dg(t)$. Ahora la convergencia de $\{f_n\}$ a f en la norma $\| \ \|_\infty$ nos da que $F(f) = \int_0^1 f dg(t)$ y, por tanto, $\Phi(f) = \int_0^1 f dg(t)$, verificándose la desigualdad $V(g) \leq \|\Phi\|$.

Es obligado notar que la aplicación entre elementos de $C[0,1]^*$ y funciones de variación acotada, aunque lineal no es inyectiva, puesto que cualesquiera dos funciones de variación acotada g_1 y g_2 tales que

$$\int_0^1 f(t)dg_1(t) = \int_0^1 f(t)dg_2(t)\ \forall f \in C[0,1],$$

obviamente corresponden al mismo elemento de $C[0,1]^*$.

Con el fin de arreglar este *"desaguisado"*, es decir, el de tener una isometría lineal entre ambos espacios, se puede introducir la obvia relación de equivalencia en el espacio de las funciones de variación acotada, con la norma que nos da la variación, según se hace en [1], [31] o [52]. Un camino alternativo, es reconocer que es la medida dg determinada por g, y no la propia función g, la que se corresponde con el elemento de $C[0,1]^*$. Esta última vía, la adecuada en un curso de Teoría de la Medida, es la que permite generalizar el resultado anterior para el espacio $C_0(L)$, siendo L un espacio topológico localmente compacto y Haussdorff, resultado que será incluido en el apéndice.

3.- El problema de los momentos. Una versión del problema clásico de los momentos plantea la siguiente pregunta: Dada una sucesión de números reales $\{c_n\}$, ¿cuándo existe una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada de forma que

$$\int_0^1 t^n df(t) = c_n\ \forall n \in \mathbb{N}?$$

Este problema tiene una interpretación probabilística. Esencialmente se pregunta: ¿Cuándo los momentos no centrales de una distribución de probabilidad determinan dicha distribución?

En vista de la identificación del punto anterior, el problema de los momentos se convierte en el siguiente problema de Análisis Funcional: dadas una familia de escalares $\{c_i\} \subset \mathbb{K}$ y una familia de vectores $\{x_i\} \subset X$, ¿cuándo existe $\Phi \in X^*$ tal que $\Phi(x_i) = c_i$ para cada i?

Como era de esperar, el problema no siempre va a tener respuesta positiva, sin embargo fue Helly quien consiguió dar una condición necesaria y suficiente.

Teorema II.2.25 . *Sean X un espacio normado, $\{c_i\} \subset \mathbb{K}$ una familia de escalares y $\{x_i\} \subset X$ una familia de vectores. Entonces equivalen:*

(i) Existe $\Phi \in X^*$ tal que $\Phi(x_i) = c_i$ para todo i.

(ii) Existe una constante positiva M verificando

$$|\sum_{i\in F} a_i c_i| \leq M\| \sum_{i\in F} a_i x_i\|$$

para cada subconjunto finito de índices F y para cada $a_i \in \mathbb{K}$, $i \in F$.

Aparte de la motivación histórica, el enunciado anterior nos caracteriza de forma útil, cuándo un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas tiene solución.

Su demostración no debe ofrecer dificultad alguna a partir del teorema de Hahn-Banach. Por otra parte, parece obligado comentar la equivalencia entre este resultado y el corolario II.1.3.

También podemos plantearnos el problema al revés, es decir, supongamos ahora que los datos son una sucesión de vectores $\{x_i^*\} \subset X^*$ y una sucesión de escalares $\{c_i\} \subset \mathbb{K}$. La pregunta será cuándo existe $x \in X$ tal que $x_i^*(x) = c_i$ para cada i. La respuesta a dicha pregunta, otra vez consecuencia del teorema de Hahn-Banach se debe otra vez a Helly. Damos aquí el enunciado de dicha respuesta, para cuya demostración, basada en argumentos de separación, de los que nos ocuparemos en este tema, se puede consultar en [33].

Teorema II.2.26.*(***Helly***) Sea X un espacio normado y $M > 0$. Supongamos que $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Entonces equivalen:*

(i) Para cada ε existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $\|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$ y $x_k^*(x_\varepsilon) = c_k$ para $1 \leq k \leq n$.

(ii) $|\sum_{k=1}^n a_k c_k| \leq M\| \sum_{k=1}^n a_k x_k^*\|$ para cualesquiera escalares

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}.$$

Por último, parece necesario comentar que éste último resultado no es más que un caso particular del importante principio de reflexividad local, que no trataremos en este proyecto y que, informalmente hablando, introduce la importante observación de que, aunque no todos los espacios sean reflexivos, los subespacios finito dimensionales de un espacio son los mismos que los de su bidual.

4.- Límites de Banach y medias invariantes. Comenzamos por obtener un nuevo enunciado de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Si X es un espacio normado, llamaremos **semigrupo abeliano de aplicaciones lineales** en X a todo conjunto $\mathcal{G}$ formado por aplicaciones lineales de X en X verificando:

(i) $T \circ S \in \mathcal{G}$ siempre que $T, S \in \mathcal{G}$.

(ii) $T \circ S = S \circ T \ \forall S, T \in \mathcal{G}$.

Teorema II.2.27 . *Sea X un espacio vectorial, M un subespacio de X, p un funcional sublineal en X, $\mathcal{G}$ un semigrupo abeliano de aplicaciones lineales tal que $T(M) \subset M$, $p(T(x)) \leq p(x) \ \forall x \in X, T \in \mathcal{G}$. Sea $f \in M^\sharp$ verificando*

$$f(T(m)) = f(m) \text{ y } Re\ f(m) \leq p(m) \ \forall m \in M, T \in \mathcal{G}.$$

Entonces existe $\overline{f} \in X^\sharp$ extendiendo a f y verificando:

$$\overline{f}(T(x)) = \overline{f}(x) \text{ y } Re\ \overline{f}(x) \leq p(x) \ \forall x \in X, T \in \mathcal{G}.$$

Además, si p es una seminorma, entonces $|\overline{f}(x)| \leq p(x) \ \forall x \in X$.

Al funcional $\overline{f}$ se le llama **extensión invariante** de f.

La demostración, no falta de ingenio, consiste en aplicar la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Para ello, por supuesto nos limitamos al caso real, se define una nueva aplicación $p_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p_0(x) = inf\{\frac{p(T_1(x) + \ldots + T_n(x))}{n} : n \in \mathbb{N}, T_i \in \mathcal{G}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Obviamente $p_0(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$ y como p es sublineal $p(0) \geq 0$. Por otro lado, si $T \in \mathcal{G}$ tenemos

$$0 \leq p(T(x)) + p(T(-x)) \leq p(T(x)) + p(-x)\ \forall x \in X,$$

lo que nos dice que el conjunto donde tomamos el ínfimo que define p_0 está minorado por $-p(-x)$ para cada $x \in X$. Además, de la sublinealidad de p es claro que

$$p_0(tx) = tp_0(x)\ \forall x \in X, t \geq 0.$$

Nuestro objetivo ahora es comprobar la subaditividad de p_0. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existen entonces $T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m \in \mathcal{G}$ tales que

$$\frac{p[T_1(x) + \ldots + T_n(x)]}{n} < p_0(x) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ y}$$

$$\frac{p[S_1(y) + \ldots + S_m(y)]}{m} < p_0(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tendremos entonces $p_0(x+y) \leq \frac{p[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T_i S_j(x+y)]}{nm} \leq$

$$\leq \frac{\sum_{j=1}^m p[S_j(\sum_{i=1}^n T_i(x)/n)]}{m} + \frac{\sum_{i=1}^n p[T_i(\sum_{j=1}^m S_j(y)/m)]}{n} \leq$$

$$\leq \frac{p[\sum_{i=1}^n T_i(x)]}{n} + \frac{p[\sum_{j=1}^m S_j(y)]}{m} <$$

$$< p_0(x) + p_0(y) + \varepsilon,$$

donde hemos utilizado la conmutatividad de $\mathcal{G}$ y el hecho de que

$$p(T(x)) \leq p(x)\ \forall x \in X, T \in \mathcal{G}$$

.

La arbitrariedad de ε nos dice entonces que p_0 es ya un funcional sublineal en X.

Del hecho de que $f(T(m)) = f(m)$ y la desigualdad $Re\ f(m) \leq p(m)$ deducimos que $Re\ f(m) \leq p_0(m)\ \forall m \in M$.

Aplicamos ahora la versión analítica del teorema de Hahn-Banach para el nuevo funcional sublineal p_0 y obtenemos un funcional $\overline{f} \in X^\sharp$ que extiende a f y sigue estando dominado por p_0.

Las desigualdades

$$p_0(x - T(x)) \leq \frac{p[T(x) - T^{n+1}(x)]}{n} \leq \frac{p(x) + p(-x)}{n},$$

donde se ha vuelto a utilizar que $p(T(x)) \leq p(x)$, nos dicen que $p_0(x - T(x)) \leq 0$. Igualmente se tiene que $p_0(T(x) - x) \leq 0$. Pero la sublinealidad de p_0 hace que $p_0(x - T(x)) + p_0(T(x) - x) \geq p_0(0) \geq 0$, de donde $p_0(x - T(x)) = p_0(T(x) - x) = 0$ para cada $x \in X$. De las igualdades anteriores se deduce fácilmente que $\overline{f}$ es el funcional deseado.

En el caso de que p sea una seminorma la desigualdad $|\overline{f}(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X$, se resuelve girando convenientemente el escalar $Re\ \overline{f}(x)$.

Por supuesto, la versión analítica del teorema de Hahn-Banach se obtiene fácilmente del resultado anterior tomando como semigrupo de aplicaciones lineales el formado solamente por la aplicación identidad, quedando el resultado anterior como una formulación equivalente al teorema de Hahn-Banach.

La demostración del teorema anterior es hecha con detalle en [33], suponiendo además que $p(x) \geq 0\ \forall x \in X$, una falta de precisión si se comparan las nimias diferencias en las pruebas. El enunciado que hemos presentado viene en [9] donde se atribuye a Silverman y Klee.

Ya en su libro [2], Banach deduce del teorema de Hahn-Banach la existencia de límites de Banach. Nosotros comenzaremos por obtener esta aplicación clásica a partir del teorema II.2.27, viendo así cómo el enunciado del teorema de Hahn-Banach se puede adaptar, de forma equivalente, al problema que nos ocupa.

Empecemos motivando el problema de la existencia de los límites de Banach. La aplicación que a cada sucesión convergente le asigna su límite es una aplicación lineal y continua de norma uno, definida sobre el espacio de Banach c. El problema que nos planteamos es el siguiente:

¿Podemos definir un *"límite"* para sucesiones acotadas, no necesariamente convergentes?

La pregunta necesita, desde luego bastantes matizaciones. Por un *"límite"* para sucesiones acotadas entenderemos una aplicación lineal $f : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifique las siguientes propiedades naturales del límite:

(i) $f(x) = \lim_{n\to+\infty} x(n)\ \forall x \in c$.

(ii) f es continua con $\|f\| = 1$.

(iii) $f(x) = f(x^k)\ \forall x \in \ell_\infty$, donde para cada $x \in \ell_\infty$ definimos $x^k(n) = x(k+n)\ \forall n, k \in \mathbb{N}$.

Un **límite de Banach** es un funcional lineal en ℓ_∞ verificando las tres propiedades anteriores. La existencia de un tal funcional verificando las dos primeras propiedades anteriores está garantizada, gracias a la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Para probar la existencia de los límites de Banach basta aplicar el teorema II.2.27 tomando $X = \ell_\infty$, $M = c$, como f el funcional límite de c en $\mathbb{K}$ y $\mathcal{G} = \{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $T \in L(\ell_\infty)$ es el operador dado por $T(x)(n) = x(n+1)\ \forall x \in \ell_\infty, n \in \mathbb{N}$. Por supuesto, estamos considerando como funcional sublineal p la norma del supremo en ℓ_∞. Hemos obtenido entonces

Corolario II.2.28 . *Existen los límites de Banach, es decir, existe* $f \in S_{\ell_\infty^*}$ *tal que:*

(i) $f(x) = \lim_{n\to+\infty} x(n)\ \forall x \in c$.

(ii) $f(x) = f(x^k)\ \forall x \in \ell_\infty, k \in \mathbb{N}$, *donde para cada* $x \in \ell_\infty$ *definimos* $x^k(n) = x(k+n)\ \forall n, k \in \mathbb{N}$.

Si f es un límite de Banach y $\mathbf{1}$ denota la sucesión constantemente igual a uno de ℓ_∞, se obtiene para cada $x \in \ell_\infty$ con $0 \le x(n) \le 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ la desigualdad

$$|f(x) - 1| = |f(x - \mathbf{1})| \le \|x - \mathbf{1}\|_\infty \le 1,$$

de donde podemos deducir, en caso real a partir de ahora, que $f(x) \ge 0$ para cada $x \in \ell_\infty$ con $x(n) \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se obtiene ahora fácilmente

$$\underline{\lim}\, x(n) \le f(x) \le \overline{\lim}\, x(n)\ \forall x \in \ell_\infty. \tag{2.1}$$

De estas desigualdades volvemos a tener que un límite de Banach extiende al funcional límite. De hecho, en presencia de la propiedad ii) del corolario anterior, las desigualdades 2.1 equivalen a

$$inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leq f(x) \leq sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \ \forall x \in \ell_\infty.$$

Debe quedar claro entonces que la novedad que aporta la extensión que nos da el teorema de Hahn-Banach del funcional límite no es más que la propiedad ii) del corolario anterior. De hecho, una aplicación semejante a la que acabamos de hacer del teorema II.2.27 nos da la existencia de un funcional $f \in S_{\ell_\infty^*}$ tal que extiende al funcional límite definido en c y además verifica, por ejemplo,

$$f(\overline{x}^k) = f(x) \ \forall x \in \ell_\infty, k \in \mathbb{N},$$

donde, ahora, para cada $x \in \ell_\infty$ se define $\overline{x}^k(n) = x(2kn)$ para $k, n \in \mathbb{N}$.

Vamos a obtener una importante generalización del corolario anterior sustituyendo el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ por un semigrupo abeliano cualquiera.

Definición II.2.29 . *Sea* $(\Lambda, +)$ *un semigrupo abeliano y consideremos el espacio de Banach* $\ell_\infty(\Lambda)$ *de las funciones acotadas de* Λ *en* $\mathbb{R}$ *con la norma del supremo. Para cada* $\lambda \in \Lambda$ *y cada* $x \in \ell_\infty(\Lambda)$ *definimos*

$$x^\lambda(\mu) = x(\lambda + \mu) \ \forall \mu \in \Lambda.$$

Una **media invariante** *en* Λ *es un funcional* $\mathbb{R}-$*lineal* $f \in \ell_\infty(\Lambda)^\sharp$ *verificando:*

(i) $inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \ \forall x \in \ell_\infty(\Lambda).$

(ii) $f(x^\lambda) = f(x) \ \forall x \in \ell_\infty(\Lambda), \lambda \in \Lambda.$

Una nueva aplicación del teorema II.2.27, como lo hicimos para obtener la existencia de límites de Banach, tomando como semigrupo abeliano de aplicaciones lineales $\mathcal{G} = \{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, donde para cada $\lambda \in \Lambda$ $T_\lambda(x)(\mu) = x(\lambda + \mu)$ para cada $\mu \in \Lambda$, nos permite deducir

Corolario II.2.30 . *Todo semigrupo abeliano admite una media invariante.*

Para su demostración, tenemos que considerar el subespacio de $\ell_\infty(\Lambda)$ formado por aquellos elementos que tienen *"límite"* en el infinito, es decir, definimos en Λ la topología discreta que será entonces localmente compacta y Haussdorff para tener el infinito como punto con el que compactificar y dar sentido a la existencia de límite en infinito. En definitiva, se extiende gracias al teorema II.2.27 el funcional que a cada elemento $x \in \ell_\infty(\Lambda)$ con límite en infinito le hace corresponder dicho límite.

Los mismos comentarios que hicimos al obtener la existencia de límites de Banach se pueden hacer ahora sobre la positividad del funcional extensión obtenido.

Como consecuencia de la existencia de medias invariantes obtenemos medidas finitamente aditivas invariantes por traslaciones en cualquier semigrupo abeliano y en particular en $\mathbb{R}$, como muestra el siguiente hecho.

Corolario II.2.31 . *Sea* $(\Lambda, +)$ *un semigrupo abeliano. Entonces existe una función* $\mu : \mathcal{P}(\Lambda) \longrightarrow [0,1]$ *verificando:*

(i) μ *es finitamente aditiva, es decir,*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \ \forall A, B \in \mathcal{P}(\Lambda), A \cap B = \emptyset.$$

(ii) μ *es invariante por traslaciones, es decir,*

$$\mu(A + \lambda) = \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(\Lambda), \lambda \in \Lambda.$$

(iii) Si, de hecho, $(\Lambda, +)$ *es un grupo se puede conseguir que se verifique además*

$$\mu(-A) = \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(\Lambda).$$

La demostración de i) y ii) consiste en tomar una media invariante en Λ y definir $\mu(A) = f(\mathcal{X}_A)$ para cada $A \subset \Lambda$, donde $\mathcal{X}_A$ denota la función característica del conjunto A. Para la afirmación iii), supongamos que

$(\Lambda, +)$ es un grupo y sea g una media invariante en Λ. Podemos mejorar g definiendo

$$f(x) = \frac{1}{2}(g(x) + g(x^-)) \; \forall x \in \ell_\infty(\Lambda),$$

donde $x^-(\lambda) = x(-\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

Es claro ahora que f es una nueva media invariante en Λ verificando que $f(x^-) = f(x)$ para cada $x \in \ell_\infty(\Lambda)$. Si ahora definimos μ a partir de f, como lo hicimos anteriormente, obtenemos iii).

5.- Versión geométrica. Comenzaremos por presentar los teoremas de separación, al estilo de II.1.7. Hahn (1927) demostró una primera versión del teorema de Hahn-Banach, en el que aparecía una norma en vez de un funcional sublineal. La introducción de éste último por Banach (1929) fue la clave para obtener los teoremas de separación.

Comenzamos por encontrar funcionales sublineales. A modo de motivación, si uno intenta escribir la norma de un espacio normado X, conociendo sólo la bola unidad del mismo, se llega sin dificultad a la igualdad

$$\|x\| = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B_X\}.$$

Si en vez de una norma se tiene una seminorma, la igualdad es la misma.

La pregunta que nos planteamos es: ¿Qué propiedades debe reunir un subconjunto $A \subset X$ para que la expresión de la derecha, sustituyendo B_X por A, nos proporcione un funcional sublineal en X?

Si $A \subset X$ y damos por supuesta la buena definición del hipotético funcional sublineal dado por

$$p_A(x) = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \; x \in X,$$

es de comprobación inmediata que $p_A(tx) = tp_A(x)$ para cualesquiera $x \in X, t \geq 0$. Además, si A es convexo, se obtiene fácilmente que $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) \; \forall x, y \in X$.

Por tanto, para asegurarnos que p_A es un funcional sublineal basta la buena definición de éste, es decir, para cada $x \in X$ ha de existir $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición II.2.32. *Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto no vacío. Decimos que A es* **absorbente** *si $\mathbb{R}^+A = X$.*

Con esta nueva terminología, hemos demostrado

Lema II.2.33. *Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto absorbente y convexo de X. Entonces, la aplicación p_A de X en $\mathbb{R}$ dada por*

$$p_A(x) = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \; x \in X,$$

es un funcional sublineal en X, llamado funcional de **Minkowski** *de A.*

Podemos ofrecer ya un teorema de separación general.

Teorema II.2.34. *(Separación en espacios vectoriales) Sea X un espacio vectorial y $A, B \subset X$ subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos. Si existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente, entonces existe $f \in X' \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$Re \; f(a) \leq \alpha \leq Re \; f(b) \; \forall a \in A, b \in B.$$

Como siempre, en este tipo de resultados, nos podemos restringir al caso real. Para su demostración fijaremos un punto $b_0 \in B$ y consideraremos el conjunto $C = (A - a_0) - (B - b_0)$ que es obviamente convexo y absorbente, por contener a $A - a_0$. Además, $x_0 = b_0 - a_0 \notin C$, por ser los conjuntos A y B disjuntos.

Si p_C es el funcional de Minkowski de C, entonces p_C es un funcional sublineal en X y

$$\{x \in X : p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X : p_C(x) \leq 1\}.$$

Así, $p_C(x_0) \geq 1$. Consideramos ahora en el subespacio generado por x_0, $\mathbb{R}x_0$, el funcional dado por

$$g(\lambda x_0) = \lambda p_C(x_0) \; \lambda \in \mathbb{R}.$$

La versión analítica del teorema de Hahn-Banach nos permite encontrar un funcional $f \in X^\sharp$ tal que

$$Re\ f(x) \leq 1\ \forall x \in C,\ \ Re\ f(x_0) \geq 1.$$

Es claro que f es el funcional deseado, tomando $\alpha = sup\{Re\ f(a) : a \in A\}$.

En definitiva, los conjuntos A y B se *"separan"* mediante el hiperplano afín de ecuación $Re\ f(x) = \alpha$, en el sentido de que dicho hiperplano deja a un lado al conjunto A y al otro a B.

Por supuesto, este tipo de separación entre conjuntos no convexos no es posible, en general. Aún más, si en el espacio vectorial c_{00} consideramos los conjuntos convexos y disjuntos $A = \{0\}$ y B el formado por las sucesiones cuya última coordenada no nula es estrictamente positiva, resulta imposible separarlos, al estilo del teorema anterior.

La siguiente consecuencia dejará claro que el teorema anterior no es más que una formulación equivalente de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Corolario II.2.35 . *Sea X un espacio vectorial real, $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, esto es, $\Phi(tx + (1-t)y) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$ para cualesquiera $x, y \in X, t \in [0,1]$. Si M es un subespacio de X y $f \in M^\sharp$ son tales que*

$$f(m) \leq \Phi(m)\ \forall m \in M,$$

entonces existe $\overline{f} \in X^\sharp$ tal que $\overline{f}(m) = f(m)\ \forall m \in M$ y $\overline{f}(x) \leq \Phi(x)\ \forall x \in X$.

Su deducción del teorema anterior se hace a partir de los conjuntos

$$A = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \Phi(x) < t\},\ \ B = \{(m, f(m)) : m \in M\},$$

que son la epigráfica de Φ y la gráfica de f, respectivamente. Es fácil comprobar que ambos conjuntos son convexos, no vacíos y disjuntos. Además $A - a_0$ es absorbente, para cualquier $a_0 \in A$. Aplicando ahora el teorema anterior, se llega sin dificultad a obtener la tesis del corolario.

Por supuesto, cualquier funcional sublineal es una función convexa, con lo que a partir del corolario anterior, se obtiene la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

El teorema de separación que hemos obtenido es totalmente algebraico, al igual que la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. No obstante, el concepto de absorbencia, puede ser considerado como un concepto de *"interior"* algebraico, ya que, si el origen es un punto interior a un conjunto de un espacio normado, entonces dicho conjunto es absorbente. De esta observación obtenemos la primera consecuencia del teorema de separación en espacios normados.

Corolario II.2.36. *Sea X un espacio normado y A y B dos subconjuntos no vacíos y convexos de X. Si $int(A) \neq \emptyset$ y $B \cap int(A) = \emptyset$, entonces existe $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$Re\ f(a) \leq Re\ f(b)\ \forall a \in A, b \in B.$$

Además $Re\ f(x) < \alpha\ \forall x \in int(A)$.

Si ahora, en el resultado anterior, tomamos A cerrado y $B = \{x_0\}$ un punto de la frontera de A llegamos a:

Corolario II.2.37 . *(***Existencia de funcionales soporte***). Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que*

$$Re\ f(x_0) = max\{Re\ f(x) : x \in A\}.$$

Observemos que el hiperplano de ecuación $Re\ f(x) = \alpha$, donde $\alpha = Re\ f(x_0)$, pasa por x_0 y deja a un lado al conjunto A. Dicha situación suele describirse diciendo que f **soporta** al conjunto A en el punto x_0.

Por último, si pretendemos separar dos conjuntos convexos no sólo disjuntos, sino que además su distancia sea estrictamente positiva, se puede añadir alguna perfección adicional.

Corolario II.2.38. *Sea X un espacio normado y A y B dos subconjuntos convexos y no vacíos de X. Si $dist(A, B) = \delta > 0$, entonces existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que*

$$supRe\ f(A) + \delta \leq infRe\ f(B).$$

Es usual referirse a cualquiera de los tres últimos resultados utilizando la expresión de teorema de separación.

Como ejemplo de la utilidad de los resultados de separación anteriores, que creemos importantes por sí mismos incluso en espacios finito dimensionales, presentamos un teorema de punto fijo.

Teorema II.2.39.(**Markov-Kakutani**). *Sea X un espacio normado y K un subconjunto compacto, convexo y no vacío de X. Supongamos que $\mathcal{G}$ es una familia de funciones afines y continuas de X en X verificando:*

(i) $T \circ S = S \circ T\ \forall T, S \in \mathcal{G}$.

(ii) $T(K) \subset K\ \forall T \in \mathcal{G}$.

Entonces existe algún $x_0 \in K$ punto fijo común a todos los elementos de $\mathcal{G}$, esto es, $T(x_0) = x_0\ \forall T \in \mathcal{G}$.

La dificultad de la demostración se centra en probar, por supuesto en caso real, la afirmación del teorema en el caso de que la familia $\mathcal{G}$ tenga un sólo elemento.

Supongamos por un momento que ése fuera el caso y denotemos por K_T al conjunto de puntos fijos de T en K, para cada $T \in \mathcal{G}$. Es claro, entonces, que K_T es un subconjunto compacto, convexo y no vacío de K, para cada $T \in \mathcal{G}$. De la conmutatividad de los elementos de $\mathcal{G}$, hipótesis i), obtenemos que $T(K_S) \subset K_S$ para cualesquiera $T, S \in \mathcal{G}$. Por tanto, según lo supuesto ha de existir un punto fijo común en K para cualesquiera dos aplicaciones $T, S \in \mathcal{G}$. De hecho, lo que obtenemos es que cualquier subfamilia finita de la familia $\{K_T : T \in \mathcal{G}\}$ tiene intersección no vacía, de donde se deduce, en virtud de la compacidad de K, la existencia de un punto fijo común a los elementos de $\mathcal{G}$ en K.

Tenemos entonces que probar la existencia de un punto fijo, en el compacto y convexo K, de la aplicación afín y continua $T : X \longrightarrow X$, sabiendo que $T(K) \subset K$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que no es así y denotemos $\Delta = \{(x, x) : x \in K\}$ a la diagonal de K. Si $G = \{(x, T(x)) : x \in K\}$ denota la gráfica de T, entonces Δ y G son subconjuntos compactos, convexos, no vacíos y disjuntos en $X \times X$. Apliquemos ahora el corolario anterior, encontrando $f_1, f_2 \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$f_1(x) + f_2(x) \leq \alpha < \beta \leq f_1(y) + f_2(T(y)) \ \forall x, y \in K.$$

Entonces $f_2(T(x)) - f_2(x) \geq \beta - \alpha$ para cada $x \in K$. Haciendo ahora $x = Tx$ en la desigualdad anterior e iterando se obtiene que

$$f_2(T^n(x)) - f_2(x) \geq n(\beta - \alpha) \to +\infty \ (n \to +\infty),$$

para cada $x \in K$. Sin embargo, esto contradice la acotación de $f_2(K)$.

BIBLIOGRAFIA: La mayoría de lo que hemos presentado en este capítulo se puede encontrar en [26], [33], [12] y [45]. La demostración del teorema de Markov-Kakutani la hemos tomado de [56]. No hay que olvidar los obligados textos de [2] y [29] que contienen más aplicaciones del teorema de Hahn-Banach. No obstante, la monografía [9] nos parece obligada como texto de consulta.

Capítulo III

INTRODUCCION A LA TEORIA DE DUALIDAD.

Pretendemos en este capítulo introducir la teoría de dualidad en espacios normados, que puede ser considerada como una prolongación del teorema de Hahn-Banach. Comenzamos definiendo la topología débil de un espacio normado y débil-$*$ de su dual, estudiando las analogías y diferencias existentes entre todas las topologías que hasta el momento podemos considerar en un espacio normado. La motivación para dicho estudio es la "escasez" *de subconjuntos compactos para la topología de la norma.*

Se echará de menos el teorema del bipolar, puesto que mostramos sólo el caso particular del mismo para subespacios. Sin embargo, eso no dificulta la presentación de los teoremas de Dieudonné, Goldstine y Banach-Alaoglú, verdadera estrella de este capítulo, mostrando la "abundancia" *de subconjuntos compactos, para la topología débil en espacios reflexivos y para la topología débil-$*$ en espacios duales. Como principales aplicaciones se obtienen el teorema de Milman-Pettis (convexidad uniforme implica reflexividad), la universalidad del espacio $C[0,1]$ para la clase de los espacios separables (teorema de Banach-Mazur), la complementación de c_0 (teorema de Sobczyk) en cualquier espacio de Banach separable y la complementación de ℓ_∞ en cualquier espacio de Banach.*

Aunque hemos creido ser pródigos en las aplicaciones, se echarán en falta aquellas que precisan del teorema de Krein-Milman junto con el de Banach-Alaoglú. No obstante, creemos que los resultados presentados muestran la importancia y aplicabilidad de la teoría de dualidad que encontrará su ambiente más general con los pares duales, que serán presentados en la segunda parte de nuestro proyecto.

III.1 Topologías débiles

Como ya debemos de tener claro, la topología de la norma en un espacio normado de dimensión infinita es demasiado grande, si queremos por ejemplo, la compacidad de su bola unidad. No obstante, como ya ha puesto de manifiesto el capítulo anterior, el conocimiento de algunas propiedades del dual ayudan al estudio del espacio y la definición del dual está hecha a partir de la topología de la norma en el primero, con lo que parece natural considerar topologías más pequeñas que la de la norma en las que los funcionales del dual sigan siendo continuos. Con este fin, la primera posibilidad es considerar la mínima topología en el espacio que hace continuos a los funcionales del dual. El esquema de topología inicial, un hecho bien conocido en topología general, nos permite entonces introducir esa nueva topología.

Definición III.1.1 . *Sea X un espacio normado. Llamaremos topología débil en X, denotada por $w(X)$ o w si no hay lugar a la confusión, a la topología inicial en X determinada por los elementos de X^*.*

De forma totalmente análoga, como obliga el nombre de este capítulo, debemos introducir una topología más en los espacios que sean duales.

Definición III.1.2 . *Sea X un espacio normado. Llamaremos topología débil−$*$ en X^*, denotada por $w^*(X^*)$ o w^* si no hay lugar a la confusión, a la topología inicial en X^* determinada por los elementos de X que como sabemos, se pueden ver como elementos de X^{**}, en la forma que nos dice la inyección canónica J_X.*

Las primeras propiedades que se desprenden de las definiciones anteriores nos dicen, entre otras cosas, que las topologías débil y débil$-*$ son más pequeñas que la de la norma, y que, en el caso de que tratemos con un espacio dual, la más pequeña de todas resulta ser la débil$-*$. Igualmente deducimos que un funcional lineal es continuo para la topología débil, si y sólo si, lo es para la topología de la norma.

Por supuesto, la buena avenencia entre las estructuras algebraica y topológica que consideremos en un espacio normado ha de ser obligada, esto es, sería deseable que las topologías recién definidas hicieran continuas a las aplicaciones suma y producto por escalar, al igual que le ocurre a la topología de la norma. Resumimos en el siguiente enunciado las propiedades básicas de las nuevas topologías, entre las que se encuentra la respuesta al deseo anterior.

Proposición III.1.3 . *Sea X un espacio normado. Entonces:*

(i) Si $x_0 \in X$, los conjuntos de la forma

$$\{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

forman una base de entornos de x_0 para la topología débil en X, variando $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in X^*$.

(ii) Si $f_0 \in X^*$, los conjuntos de la forma

$$\{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

forman una base de entornos de f_0 para la topología débil$-*$ en X^*, variando $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$.

(iii) Las topologías $w(X)$ y $w^*(X^*)$ son Haussdorf y hacen continuas a las aplicaciones suma y producto por escalar en X y X^*, respectivamente.

(iv) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X y $x_0 \in X$, la sucesión converge a x_0 en X, con la topología débil, si, y sólo si,

$$f(x_n) \to f(x_0) \ \forall f \in X^*.$$

(v) Si $\{f_n\}$ es una sucesión en X^* y $f_0 \in X^*$, la sucesión converge a f_0 en X^*, con la topología débil$-*$, si, y sólo si,

$$f_n(x) \to f_0(x) \ \forall x \in X.$$

El resultado anterior puede deducirse fácilmente de las propiedades básicas del esquema de topología inicial, que creemos debiera ser conocido. No obstante, aunque no nos parezca lo más natural, podríamos haber definido, ¿por qué no?, las topologías débiles a partir de las propiedades i) y ii) anteriores y deducir el resto con los conocimientos que tenemos hasta el momento. A modo de ejemplo, ilustramos esta última afirmación.

Obsérvese primeramente que los semiespacios abiertos, subconjuntos de la forma $\{x \in X : Re\ f(x) < \alpha\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*$, forman una subbase de abiertos para la topología débil del espacio normado X.

Para obtener, por ejemplo, que la topología $w(X)$ es Haussdorff consideremos $x, y \in X$ con $x \neq y$. Gracias al teorema de Hahn-Banach obtenemos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*$ tales que $Re\ f(x) < \alpha < Re\ f(y)$. Es claro entonces que existen dos subconjuntos $w-$abiertos, semiespacios, que separan los puntos x e y. Igualmente, ahora sin necesidad del teorema de Hahn-Banach, se obtiene que la topología $w^*(X^*)$ es Haussdorff.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión en X^* que converge a $f_0 \in X^*$, para la topología w^* y $x \in X$, dado $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$A = \{f \in X^* : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon\}$$

es un w^*- abierto de X^* conteniendo f_0. Por tanto, para n suficientemente grande $f_n \in A$, de donde tenemos, para dicho n, $|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$. Es decir $\lim_n f_n(x) = f_0(x)$ para cada $x \in X$. La afirmación recíproca es igual de elemental, así como el análogo para la topología débil.

Una vez introducidas las topologías débiles es obligado preguntarse por su relación con la topología de la norma. Para empezar, no es difícil comprobar que las topologías débil y débil$-*$ de un espacio normado finito dimensional han de coincidir ambas con la topología de la norma. Si ahora partimos de un espacio normado en el que la topología débil coincide con la de la norma, y queremos probar que el espacio es finito dimensional, basta tener en cuenta una observación puramente algebraica: si la intersección de los núcleos de un número finito de funcionales está contenido en el núcleo de otro funcional, entonces éste último ha de ser combinación lineal de los anteriores.

Con las observaciones anteriores tendremos la siguiente equivalencia.

Proposición III.1.4. *Sea X un espacio normado. Entonces la topología w, resp. w^* si X es dual, coincide con la topología de la norma si, y sólo si, X es finito dimensional.*

Así, en ambiente infinito dimensional, las topologías débiles que acabamos de introducir nunca coinciden con la topología de la norma. Por otro lado, es natural preguntarse si, al menos, provienen de una distancia. En el capítulo siguiente tendremos oportunidad de comprobar que eso no ocurre nunca para la topología w y *"casi nunca"* para la topología w^*.

Como sabemos, los únicos funcionales continuos para la topología débil sobre un espacio normado X son los elementos de X^*. Si ahora X es un espacio de Banach, los únicos funcionales w^*-continuos sobre X^* son los elementos de X, vistos como elementos de X^{**}, mediante la inyección canónica J_X.

El siguiente hecho cierra el análisis de las posibles igualdades que pueden darse entre las topologías que podemos considerar en un espacio normado.

Proposición III.1.5 . *Sea X un espacio de Banach dual. Entonces $w = w^*$ si, y sólo si, X es reflexivo.*

Conviene poner de manifiesto algunas diferencias concretas entre las topologías débiles y la de la norma. A modo de ilustración, obsérvese que el cierre en la topología débil de la esfera unidad S_X de un espacio normado infinito-dimensional, X, es la bola unidad B_X, al igual que para la topología débil-$*$ si X es un espacio dual. Para su comprobación basta tener en cuenta que los entornos de cero en la topología débil o débil-$*$ contienen subespacios de codimensión finita.

El siguiente enunciado, consecuencia inmediata de los teoremas de separación del capítulo anterior, pondrá de manifiesto una diferencia esencial entre las topologías débil y débil-$*$.

Proposición III.1.6 . *Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X. Entonces el cierre de A para la topología de la norma en X coincide con el cierre de A para la topología w. En particular, un subespacio Y de X es w-cerrado si, y sólo si, es cerrado para la topología de la norma en X.*

Obsérvese que, como consecuencia, un espacio normado es w-separable si, y sólo si, es separable para la topología de la norma, hecho que deja de ser cierto para la topología w^* de un espacio dual. Concretamente, es fácil comprobar que ℓ_∞ es w^*-separable y no es separable para la topología de la norma, como ya vimos en el primer capítulo.

Por comodidad, convendremos a partir de ahora que la topología considerada en un espacio normado será la de la norma, cuando no se explicite otra.

Para finalizar este tema general sobre topologías débiles conviene poner de manifiesto que, pese a las grandes diferencias existentes entre las topologías que hasta el momento podemos considerar en un espacio normado de dimensión infinita, todas ellas coinciden cuando se las restringe a un subconjunto compacto, como nos informa el siguiente hecho.

Proposición III.1.7 . *Sea X un espacio normado y K un subconjunto compacto de X (resp. de X^*). Entonces las topología débil sobre K (resp. débil-$*$) coincide con la de la norma en X (resp. X^*).*

El resultado anterior es una sencilla consecuencia del hecho de que dos topologías Haussdorff y compactas sobre un mismo conjunto coinciden si, y sólo si, son comparables.

III.2 El teorema del bipolar en espacios normados

Para un subespacio M de un espacio normado X habíamos definido el polar de M mediante

$$M^0 = \{f \in X^* : f(m) = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Dualmente, podemos definir para un subespacio N de X^*, el **prepolar o polar en** X de N mediante

$$N_0 = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in N\}.$$

Es inmediato comprobar que M^0 es un subespacio w^*-cerrado en X^* y que N_0 es un subespacio cerrado en X o equivalentemente $w-$cerrado.

Con esta notación el corolario II.1.8 se puede reescribir en la forma

$$(M^0)_0 = \overline{M}^w = \overline{M},$$

para cada subespacio M de X.

Nos planteamos ahora la posibilidad de obtener la primera de las igualdades anteriores para un subespacio N de X^*, por supuesto intercambiando el orden de tomar polares y la topología w por la w^*, lo que sería un resultado dual del anterior.

Empezamos por obtener la versión w^* del corolario II.1.8, que no es más que el concepto algebraico de separar puntos.

Proposición III.2.8. *Sea X un espacio normado y N un subespacio de X^*. Entonces equivalen:*

(i) $\overline{N}^{w^*} = X^*$.

(ii) $\cap_{f \in N} ker\ f = \{0\}$, *es decir,* N **separa los puntos** *de* X.

Como consecuencia, X^* es w^*-separable si, y sólo si, existe un subconjunto numerable de X^* que separa los puntos de X.

Obtenemos entonces el resultado anunciado.

Corolario III.2.9. *(Teorema del bipolar para espacios normados) Sea X un espacio normado y sean M y N subespacios de X y X^*, respectivamente. Entonces:*

(i) $(M^0)_0 = \overline{M}^w$.

(ii) $(N_0)^0 = \overline{N}^{w^*}$.

Aparte de informarnos cómo obtener, en términos del dual, el cierre de un subespacio para las topologías débiles, el corolario anterior describe perfectamente cómo se obtienen todos los subespacios cerrados para las topologías débiles correspondientes. En consecuencia, la operación de tomar polar es un antiisomorfismo de retículos entre los subespacios cerrados de X y los subespacios w^*-cerrados de X^*, para el orden parcial de la inclusión.

Parece evidente que una teoría de dualidad que se precie debería ser capaz de describir cuándo un espacio de Banach es dual de otro. Antes de entrar de lleno en esta cuestión, introducimos un hecho totalmente elemental.

Proposición III.2.10. *(Dixmier) Sea X un espacio normado. La aplicación*

$$P_X = J_{X^*} \circ J_X^* : X^{***} \longrightarrow X^{***},$$

es una proyección lineal continua tal que

$$\|P_X\| = 1,\ P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*), ker\ P_X = J_X(X)^0.$$

En consecuencia, $X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^0$.

Como corolario inmediato tenemos que un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, X^* es reflexivo, hecho que faltaba en nuestro estudio de los espacios reflexivos.

Vayamos ya a la cuestión planteada anteriormente. Si Y es un espacio de Banach dual, digamos isomorfo a X^*, la proposición anterior nos garantiza la existencia de una proyección, no necesariamente de norma 1, de Y^{**} sobre Y cuyo núcleo es un polar y, por tanto, w^*-cerrado.

Recíprocamente, supongamos que P es una proyección lineal y continua de Y^{**} sobre Y con núcleo w^*-cerrado. El teorema del bipolar nos informa de que $ker\ P = M^0$ para algún subespacio M de Y^*. Como ya sabemos ha de ser entonces Y isomorfo a M^*.

Hemos demostrado entonces

Teorema III.2.11 . *Sea Y un espacio de Banach. Entonces equivalen:*

(i) Existe X espacio de Banach tal que Y es isomorfo a X^*.

(ii) Existe una proyección lineal y continua de Y^{**} sobre Y cuyo núcleo es w^*-cerrado.

Además, si cambiamos isomorfo por isométrico, el resultado sigue siendo válido si se exige que la proyección sea de norma 1.

Podemos ilustrar el resultado anterior observando que c_0 no es isomorfo al dual de un espacio normado, aplicando el teorema de Phillips.

III.3 Los teoremas de Goldstine y Banach-Alaoglú

Hemos motivado la introducción de las topologías débiles a partir de la *"escasez"* de subconjuntos compactos en un espacio normado de dimensión infinita. Estamos, pues obligados a mostrar conjuntos compactos en *"abundancia"* para las topologías débiles, que será la finalidad de este tema. El primer paso será obtener el teorema de Goldstine que será crucial para la caracterización de la reflexividad a partir de la compacidad débil de la bola unidad de un espacio de Banach.

Como sabemos X es w^*-denso en X^{**} para cualquier espacio normado X. Gracias al teorema de Helly, presentado ya en el capítulo anterior, podemos mejorar la afirmación anterior.

Teorema III.3.12 . *(Goldstine) Sea X un espacio normado. Entonces B_X es w^*-densa en $B_{X^{**}}$.*

Por supuesto, en dimensión infinita también se verifica que $\overline{S_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$, ya que S_X es débilmente densa en B_X y la topología w^* sobre X coincide con la w.

Pasamos ahora a dar algunas aplicaciones del teorema anterior. Empezamos introduciendo una propiedad geométrica que da idea de *"redondez"* de la bola unidad de un espacio normado.

Definición III.3.13 . *Sea X un espacio normado. Se dice que X es* **uniformemente convexo** *cuando para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon$ para cualesquiera $x, y \in S_X$ verificando $\|x+y\| > 2-\delta$.*

Intuitivamente, si el punto medio determinado por dos puntos de la esfera tiende estar en la esfera, entonces los puntos tienden a ser el mismo.

El hecho de que los espacios $L_p[0,1],\ 1 < p < +\infty$ sean uniformente convexos se debe a las **desigualdades de Clarkson**:

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)\ \forall f,g \in L_p[0,1],\ p \in [2,+\infty[,$$

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^p \leq 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{\frac{q}{p}}\ \forall f,g \in L_p[0,1],\ p \in]1,2].$$

El hecho de que las desigualdades anteriores sean válidas para los espacios $L_p(\mu)$, donde μ es una medida cualquiera puede también mostrar, si se quiere, la convexidad uniforme de dichos espacios.

Ahora que tenemos ejemplificada la clase de los espacios uniformemente convexos podemos obtener la siguiente consecuencia del teorema de Goldstine.

Teorema III.3.14. *(Milman-Pettis) Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Supuesto que X es un espacio de Banach uniformemente convexo y no reflexivo, empezaremos por tomar $x^{**} \in S_{X^{**}}$ con distancia positiva a la bola unidad de X. Llamemos ε a la mitad de dicha distancia para encontrar, por la convexidad uniforme de X, $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in S_X,\ \|x+y\| > 2-\delta\ \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon.$$

Sea ahora $x^* \in S_{X^*}$ de forma que $|x^{**}(x^*) - 1| < \frac{\delta}{2}$ y hagamos

$$U = \{F \in X^{**} : |F(x^*) - 1| < \frac{\delta}{2}\}.$$

Es claro que U es un w^*-entorno abierto de x^{**} en X^{**}. Si ahora $x \in S_X$ con $|x^*(x) - 1| < \frac{\delta}{2}$, entonces $x \in U$ y para cada $y \in S_X \cap U$ tenemos

$$\|x+y\| \geq |x^*(x+y)| = |2 + x^*(x) - 1 + x^*(y) - 1| > 2 - \delta.$$

De donde $\|x - y\| < \varepsilon$. Así pues,

$$U \cap S_X \subset x + \varepsilon B_{X^{**}}$$

y, por tanto,

$$U \cap B_{X^{**}} \subset x + \varepsilon B_{X^{**}},$$

ya que el último conjunto es w^*-cerrado y, por el teorema de Goldstine $B_X = \overline{S_X}^{w^*}$.

Tenemos entonces que $x^{**} \in x + \varepsilon B_{X^{**}}$ y, por tanto,

$$\|x^{**} - x\| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} dist(x^{**}, B_X),$$

una contradicción.

Como consecuencia del teorema de Milman-Pettis es posible la descripción del dual de $L_p(\mu)$ para una medida arbitraria μ y $1 < p < +\infty$.

Con la ayuda del teorema Tichonov, esto es, el producto de espacios topológicos compactos es compacto para la topología producto, hecho bien conocido en topología general, podemos ya dar una idea de la *"abundancia"* de subconjuntos compactos para la topología débil-$*$ de un espacio de Banach dual.

Teorema III.3.15 . *(Banach-Alaoglú) Si X es un espacio normado, entonces B_{X^*} es un subconjunto w^*-compacto de X^*. En consecuencia, todo subconjunto acotado y w^*-cerrado de un espacio de Banach dual es w^*-compacto.*

Por el teorema de Tichonov, el espacio topológico producto $[-1, 1]^{B_X}$ es compacto. Así para comprobar el resultado anterior, basta demostrar que las restricciones de los elementos de B_{X^*} a B_X forman un subconjunto cerrado. Por supuesto no es restrictivo suponer el espacio X real.

Sea entonces F un elemento del espacio $[-1, 1]^{B_X}$ que no es la restricción de un funcional de B_{X^*} a B_X. Han de existir entonces $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$, con $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in B_X$ tales que

$$F(\sum_{i=1}^n t_i x_i) - \sum_{i=1}^n t_i G(x_i) \neq 0.$$

Podemos encontrar ahora $\varepsilon > 0$ tal que

$$G(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) - \sum_{i=1}^{n} t_i F(x_i) \neq 0,$$

siempre que $G \in [-1,1]^{B_X}$ verifique para cada $1 \leq i \leq n$:

$$max\{|(F-G)(x_i)|, |(F-G)(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i)|\} < \varepsilon.$$

Se construye así un abierto U del espacio $[-1,1]^{B_X}$ que contiene F verificando que G no es la restricción de un funcional de B_{X^*} a B_X, para cada $G \in U$, de lo que se concluye la compacidad de B_{X^*} para la topología w^*.

Fue Banach en [2] quien demostró el resultado anterior en ambiente separable y se debe a Alaoglú el resultado en espacios no necesariamente separables.

Como aplicación del teorema de Banach-Alaoglú obtenemos, con la ayuda del teorema de Goldstine, la siguiente caracterización de los espacios de Banach reflexivos.

Corolario III.3.16 . *(Dieudonné) Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, B_X es $w-$compacta.*

Como ya anunciábamos en el capítulo anterior, el hecho de que todo funcional continuo en un espacio reflexivo alcance su norma responde, visto el corolario anterior, al esquema clásico de aplicación continua sobre un compacto.

Otra interesante aplicación del teorema de Banach-Alaoglú, permite ver a cada espacio de Banach dentro del espacio $C(K)$ para apropiado espacio topológico compacto y Haussdorff. Más concretamente

Corolario III.3.17 . *Sea X un espacio de Banach. Entonces existe K espacio topológico compacto y Haussdorff de forma que X es isométrico a un subespacio de $C(K)$.*

La comprobación consiste en tomar como K la bola unidad B_{X^*} con la topología w^* y tener en cuenta el carácter isométrico de la inyección canónica J_X.

Como veremos en el capítulo siguiente la topología débil de un espacio Banach infinito-dimensional nunca es metrizable e igual le ocurre a la débil-$*$ sobre su dual. No obstante, con lo hecho hasta ahora, podemos caracterizar la metrizabilidad para dichas topologías de los subconjuntos acotados.

Proposición III.3.18. *Sea X un espacio normado.*

(i) B_X es $w-$metrizable si, y sólo si, X^* es separable.

(ii) B_{X^*} es w^*-metrizable si, y sólo si, X es separable.

Para la primera afirmación empecemos suponiendo que B_X es $w-$metrizable y elijamos $\{U_n\}$ una base numerable de entornos de cero en B_X para la topología débil. pongamos, por ejemplo,

$$U_n = \{x \in B_X : |x^*(x)| < \varepsilon_n \ \forall x^* \in A_n\},$$

donde $\varepsilon_n > 0$ y A_n es un subconjunto finito de X^*.

Haciendo $A = \cup_n A_n$, pretendemos ver que $X^* = \overline{lin}(A)$. De no ser así, encontraríamos $x_0^* \in X^*$ tal que $d = dist(x_0^*, lin(A)) > 0$. Aplicando ahora el teorema de separación de Hahn-Banach, se encuentra $x^{**} \in X^{**}$, con $\|x^{**}\| = \frac{1}{d}$ tal que $x^{**}(lin(A)) = 0$ y $x^{**}(x_0^*) = 1$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_n \subset V := \{x \in B_X : |x_0^*(x)| < \frac{d}{2}\},$$

cuya existencia está asegurada por hipótesis.

Por el teorema de Golsdstine existe $x_1 \in B_X$ tal que para cada $x^* \in A_n$ se verifica:

$$|d - x_0^*(x_1)| = |dx^{**}(x_0^*) - x_0^*(x_1)| < \frac{d}{2}, \ |x^*(x_1)| = |dx^{**}(x^*) - x^*(x_1)| < \varepsilon_n.$$

Entonces $|x_0^*(x_1)| > \frac{d}{2}$ y $|x^*(x_1)| < \varepsilon_n$ para cada $x^* \in A_n$, lo que nos dice que $x_1 \in U_n$ y $x_1 \notin V$, una contradicción.

Supongamos ahora que X^* es separable y elijamos $\{x_i^*\}$ una sucesión densa en S_{X^*}. Es ahora fácil comprobar que, definiendo,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|f_i(x-y)|}{2^i} \ \forall x,y \in B_X,$$

la topología débil de B_X está generada por la distancia d.

Para la segunda afirmación, si B_{X^*} es w^*-metrizable, sabemos que X es isométrico a un subespacio de $C(K)$, donde $K = (B_{X^*}, w^*)$ que es un espacio topológico compacto, por el teorema de Banach-Alaoglú, Haussdorff y metrizable, por hipótesis. En este ambiente, $C(K)$ es separable y, por tanto, también lo es X. El hecho de que $C(K)$ es separable si K es metrizable se debe a que K es imagen continua del conjunto de Cantor (ver [28]) y el espacio $C[0,1]$ es separable.

Por otra parte, si X es separable, podemos definir una distancia d en B_{X^*} al igual que hicimos para comprobar la primera afirmación. El hecho de que dicha distancia genere la topología débil-* de B_{X^*} no es más que la continuidad de la aplicación identidad de (B_{X^*}, d) en (B_{X^*}, w^*), fácilmente comprobable. La continuidad en el otro sentido se debe otra vez al teorema de Banach-Alaoglú.

Con las mejoras obtenidas para las topologías débiles en ambiente separable podemos precisar en el mismo ambiente, cómo se puede escoger el compacto K del corolario III.3.17.

Corolario III.3.19 .*(Banach-Mazur) Todo espacio normado separable es isométrico a un subespacio de* $C[0,1]$.

Razonando como en el corolario III.3.17, hay que añadir dos nuevos ingredientes, por un lado, la w^*-metrizabilidad de B_{X^*} que acabamos de obtener y, por otro, el hecho de que todo espacio topológico compacto, Haussdorff y metrizable es imagen continua del conjunto de Cantor. Para los detalles puede verse [28].

El resultado anterior muestra la universalidad del espacio $C[0,1]$ para los espacios normados separables. No obstante, la existencia de un tal espacio se prueba con mucha más facilidad.

Proposición III.3.20. *Sea X un espacio normado separable. Entonces X es isométrico a un subespacio de ℓ_∞.*

La ventaja del espacio $C[0,1]$ sobre ℓ_∞ es su separabilidad.

La $w-$metrizabilidad de la bola unidad de un espacio normado con dual separable permite, además la siguiente generalización del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Corolario III.3.21. *Sea X un espacio reflexivo. Entonces toda sucesión acotada en X admite una parcial débilmente convergente en X.*

En efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en X no es restrictivo suponer que $x_n \in B_X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El subespacio cerrado Y generado por la sucesión $\{x_n\}$ es reflexivo y separable, por tanto, B_Y es un espacio compacto y metrizable para topología débil, lo que nos da la conclusión del corolario.

Como consecuencia del teorema de Eberlein-Smulian, ver [16], parece oportuno indicar, a título informativo, que la propiedad del corolario anterior de hecho caracteriza los espacios reflexivos.

Otra interesante aplicación del teorema de Banach-Alaoglú que puede verse en [29] es la siguiente.

Corolario III.3.22.*(Sobczyk) Sea X un espacio normado separable, M un subespacio de X y $T \in L(M, c_0)$. Entonces existe $S \in L(X, c_0)$ tal que la restricción de S a M coincide con T y $\|S\| \leq 2\|T\|$.*

Merece la pena observar que la separabilidad es esencial para obtener la propiedad de extensión anterior, ya que el teorema de Phillips, presentado en el capítulo anterior, pone de manifiesto que nuestro último corolario es falso cuando se toma como $X = \ell_\infty$, $M = c_0$ y T la identidad en M.

Como consecuencia inmediata se obtiene.

Corolario III.3.23. *Sea X un espacio normado separable y M un subespacio de X isomorfo a c_0. Entonces M está complementado en X.*

Gracias exclusivamente al teorema de Hahn-Banach, el espacio ℓ_∞ goza de la misma propiedad de extensión que c_0, ahora sin suponer separabilidad.

Proposición III.3.24 . *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $T \in L(M, \ell_\infty)$. Entonces existe $S \in L(X, \ell_\infty)$ con $\|S\| = \|T\|$ y tal que la restricción de S a M coincide con T.*

Corolario III.3.25 . *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X isomorfo a ℓ_∞. Entonces M está complementado en X.*

BIBLIOGRAFIA: Cualquier texto que estudie mínimamente las topologías débiles en espacios normados cubre sobradamente los tópicos expuestos en este capítulo. Fundamentalmente hemos seguido [23] y [28], por su claridad en la exposición. Para las aplicaciones es preciso citar los textos de Diestel [13], Holmes [26], Jarchow [29], Kthe [31] y Wilanski [58].

Capítulo IV

LOS TEOREMAS DE LA APLICACION ABIERTA Y BANACH-STEINHAUSS.

Existen tres resultados fundamentales que son denominados los tres grandes principios del Análisis Funcional. El primero de ellos, el teorema de Hahn-Banach, ya ha sido presentado. Los otros dos, teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss, son el objetivo de este capítulo. Banach demostró que toda biyección lineal y continua entre espacios de Banach es abierta. Más tarde, Schauder dio una demostración del mismo hecho utilizando los conceptos de categoría de Baire. Comenzamos pues presentando el teorema de Baire y los conceptos de categoría para utilizarlos en la demostración del teorema de la aplicación abierta. Aparte de las aplicaciones de dicho resultado al Análisis Funcional presentamos otra en el mundo de las ecuaciones diferenciales mostrando la dependencia continua respecto de los datos y valores iniciales de un sistema de ecuaciones lineales. Dadas las reformulaciones equivalentes del teorema de la aplicación abierta: teoremas de los isomorfismos de Banach y de la gráfica cerrada, nos encaminamos en el segundo tema a presentar el teorema de Banach-Steinhauss que deducimos, en nuestro ambiente privilegiado de los espacios de Banach, del teorema de la gráfica cerrada, algo inusual ya que en la mayoría de los textos se suele utilizar el principio de acotación uniforme. Entre las aplicaciones presentadas destacan el resultado de Du Bois-Reymond sobre la abundancia de funciones continuas cuya serie de Fourier asociada no converge puntualmente y la caracterización de las matrices conservativas mediante las llamadas "condiciones de Silverman-Toeplitz".

Dedicamos el tercer tema a hacer una breve introducción al apasionante mundo de las bases en espacios de Banach que tanto juego han dado y siguen dando al Análisis Funcional. En este ambiente presentamos el teorema de la base de Banach-Schauder, una caracterización intrínseca de las bases que es, *sin duda, una de las más brillantes aplicaciones del teorema de la aplicación abierta. El importante concepto de bases equivalentes nos sirve de excusa para presentar el teorema de Bessaga-Pelczynski que caracteriza la contención de c_0, un resultado relativamente contemporáneo que muestra la importancia de las bases para el estudio de la estructura de los espacios de Banach.*

IV.1 La categoría. El teorema de Baire

En 1.897 Osgood prueba que la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos en $\mathbb{R}$ es densa. Dos años después, Baire consigue el mismo resultado en $\mathbb{R}^n$, siendo éste último un lema (el gran lema de Baire) para obtener como consecuencia el gran teorema de Baire, cuya versión más clásica es la siguiente:

"Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en K y con valores reales, que converge puntualmente a una función f, entonces para cada subconjunto cerrado y no vacío $F \subset K$ la función $f|\, F$, esto es, la restricción de f a F es continua en algun punto."

En 1.927 Banach y Steinhauss consiguen dar forma definitiva al gran lema de Baire sustituyendo $\mathbb{R}^n$ o bien por un espacio métrico completo o bien por un espacio topolólogico Haussdorff y localmente compacto. A partir de este momento el resultado de Banach y Steinhauss, es el inicio de una herramienta imprescindible en el desarrollo del Análisis Funcional denominada método de la categoría de Baire, cuya base son los conceptos de *"grandeza"* y *"pequeñez"* que pasamos a definir.

Definición IV.1.1. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.*

(i) Diremos que A es de **primera categoría** *en X,* "pequeño"*, si A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados y con interior vacío en X.*

(ii) Diremos que A es de **segunda categoría** *en X,* "grande"*, si no es de primera categoría en X.*

(iii) Diremos que X es un **espacio de Baire** *si todo abierto no vacío en X es de segunda categoría en X.*

Como consecuencia de la definición, un subconjunto de otro de primera categoría es de primera, así como un subconjunto que contiene a uno de segunda categoría vuelve a ser de segunda.

La siguiente equivalencia pone de manifiesto la naturalidad de los espacios de Baire.

Proposición IV.1.2 . *Sea X un espacio topológico. Entonces son equivalentes:*

(i) X es un espacio de Baire.

(ii) La intersección numerable de abiertos densos en X es densa en X.

(iii) La unión numerable de subconjuntos cerrados con interior vacío en X tiene interior vacío en X.

Ahora la pregunta es, ¿qué clase de espacios familiares son de Baire? El siguiente resultado clarifica bastante las cosas.

Teorema IV.1.3 .*(Baire) Los espacios métricos completos y los espacios topológicos Haussdorff localmente compactos son espacios de Baire.*

La demostración para el caso de los espacios métricos completos es una sencilla aplicación del teorema de Cantor. El caso de los espacios topológicos Haussdorff localmente compactos no se debe al teorema de Cantor, pero guarda gran similitud con el caso anterior.

Llegados a este punto, conviene advertir que los conceptos de categoría dependen del espacio ambiente, puesto que $\mathbb{R}$ es de primera categoría en $\mathbb{R}^2$, mientras que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo, como consecuencia del teorema de Baire.

Una interesante aplicación del teorema de Baire es la siguiente:

Corolario IV.1.4. *Sea X un espacio de Banach. Entonces la dimensión (algebraica) ha de ser finita o infinita no numerable.*

Para comprobarlo, supongamos que X es un espacio normado de dimensión infinita numerable y sea $\{e_n\}$ una base del espacio vectorial X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $X_n = lin\{e_1, \ldots, e_n\}$ el subespacio generado por los vectores $e_i : 1 \leq i \leq n$. Es claro entonces que $X = \cup_{n=1}^{+\infty} X_n$, siendo cada X_n cerrado en X, por ser finito-dimensional, y con interior vacío puesto que X es de dimensión infinita. Así X es de primera categoría en sí mismo y, por tanto, el teorema de Baire nos dice que X no es completo.

Las aplicaciones más vistosas del teorema de Baire consisten en obtener teoremas de existencia de una forma bastante elegante. Aunque tendremos ocasión de poner esto de manifiesto como aplicación del teorema de Banach-Steinhauss, a modo de ilustración se puede proponer como ejercicio la existencia de funciones continuas en [0,1] con valores reales que no son derivables en ningún punto. La indicación para esto debe ser demostrar que el conjunto de las aplicaciones continuas que son derivables en algún punto es de primera categoría en el espacio $C[0,1]$, para aplicar el teorema de Baire y concluir no sólo la existencia de aplicaciones continuas no derivables en ningún punto, hecho seguramente conocido por el alumno, sino además que el conjunto formado por ellas es de segunda categoría en $C[0,1]$, es decir, *"grande"*, y por tanto denso en $C[0,1]$.

Podemos ahora resolver una cuestión que quedó pendiente en el capítulo anterior.

Proposición IV.1.5 . *Sea X un espacio normado.*

(i) La topología débil de X es metrizable si, y sólo si, X es finito-dimensional.

(ii) La topología débil-$*$ en X^* es metrizable si, y sólo si, X tiene dimensión numerable.

En consecuencia, si X es un espacio de Banach infinito-dimensional las topologías $w(X)$ y $w^*(X^*)$ no son metrizables.

IV.2 El teorema de la aplicación abierta

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$ el hecho de que T sea homomorfismo equivale a que se verifique el primer teorema de isomorfía en la categoría de los espacios normados, esto es, que los espacios $X/KerT$ y $T(X)$ sean isomorfos como espacios normados. Con este hecho en mente nos preguntaremos si toda aplicación lineal continua y sobreyectiva entre espacios normados ha de ser un homomorfismo o, equivalentemente, abierta. Una primera aproximación a la respuesta nos dice que en caso de que el espacio de partida sea completo toda aplicación lineal y continua que sea *"casi abierta"*, es de hecho abierta.

Lema IV.2.6 . *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta y, en particular sobreyectiva.*

Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$, por tanto

$$\frac{\delta}{2^n} B_Y \subset \overline{T(\frac{1}{2^n} B_X)} \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Si ahora $y \in \overline{T(\frac{1}{2} B_X)}$ ha de existir $x_1 \in \frac{1}{2} B_X$ tal que $\|y - T(x_1)\| < \frac{\delta}{2^2}$. Se tiene entonces que

$$y - T(x_1) \in \frac{\delta}{2^2} B_Y \subset \overline{T(\frac{1}{2^2} B_X)}$$

y, por tanto, repitiendo el argumento, existe $x_2 \in \frac{1}{2^2} B_X$ tal que

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{\delta}{2^3}.$$

Por recurrencia se construye una sucesión $\{x_n\}$ en X verificando

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}, \ \|y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}} \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Por la complitud de X existe $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \in X$, y por la continuidad de T se tiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} T(x_n) = T(x)$. Ahora 4.2 nos dice que $y = T(x)$ y, por 4.1, $\frac{\delta}{2} B_Y \subset T(B_X)$.

Junto con el lema anterior el teorema de Baire nos va a garantizar respuesta positiva a nuestra pregunta en espacios completos.

Teorema IV.2.7 .*(Aplicación abierta) Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$ sobreyectiva. Entonces T es abierta.*

La igualdad $Y = \cup_{n \in \mathbb{N}} n\overline{T(B_X)}$ junto con el hecho de que Y es de segunda categoría en sí mismo, nos dice que $\overline{T(B_X)}$ ha de tener interior no vacío. Consideremos pues y_0 un punto del interior y $\delta > 0$ tales que

$$\{y \in Y : \|y - y_0\| \leq \delta\} \subset \overline{T(B_X)}.$$

Aplicando el lema anterior bastará ver que $\frac{\delta}{2} B_Y \subset \overline{T(B_X)}$. Con este objetivo tomamos $y \in Y$ con $\|y\| \leq \frac{\delta}{2}$. Como $y_0,\ y_0 + 2y \in \overline{T(B_X)}$ han de existir sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en B_X cuyas imágenes por T convergen a y_0 e $y_0 + 2y$, respectivamente.

Tenemos ahora que la sucesión $\{\frac{y_n - x_n}{2}\}$ está en B_X y sus imágenes por T convergen a y, lo que nos dice que $y \in \overline{T(B_X)}$, concluyendo la demostración.

Obsérvese que la hipótesis de complitud en el teorema anterior sobre el espacio de llegada Y se utiliza únicamente para que Y sea de segunda categoría en sí mismo. Si hemos preferido la complitud no es más que por guardar la forma clásica del teorema, que por otra parte resulta la más natural.

La siguiente aplicación pone de manifiesto que el lema anterior puede ser a veces más útil que el teorema de la aplicación abierta.

Corolario IV.2.8. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces X es isomorfo a un cociente de ℓ_1.*

Para comprobarlo, sea $\{x_n\}$ una sucesión densa en B_X. En virtud de la complitud de X podemos definir la aplicación $T : \ell_1 \longrightarrow X$ mediante

$$T(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} y(n) x_n \ \forall y \in \ell_1.$$

Claramente T es lineal y continua. Además, como $x_n \in T(B_{\ell_1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $B_X \subset \overline{T(B_{\ell_1})}$. Aplicando ahora el lema anterior, T ha de ser abierta y por tanto sobreyectiva. En conclusión, los espacios $\ell_1/KerT$ y X son isomorfos.

El teorema de la aplicación abierta nos va a ayudar ahora a obtener más información sobre la dualidad entre operadores. Para empezar, otra forma de enunciar dicho teorema es decir que un epimorfismo entre espacios de Banach no es más que una aplicación lineal, continua y sobreyectiva. En consecuencia, obtenemos las siguientes equivalencias.

Corolario IV.2.9 . *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Entonces equivalen:*

(i) T es un monomorfismo.

(ii) T^* es sobreyectiva.

La implicación i)⇒ii) era ya conocida.

Si T^* es sobreyectiva, entonces T^* es, según hemos dicho, un epimorfismo. En este ambiente, ya sabemos que T^{**} es un monomorfismo, de donde es muy fácil deducir que T también lo es.

Corolario IV.2.10 . *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces equivalen:*

(i) T es sobreyectiva.

(ii) T^* es un monomorfismo.

Si T es sobreyectiva sabemos que T es un epimorfismo y, por, tanto T^* es un monomorfismo.

Recíprocamente, si T^* es un monomorfismo, del teorema de separación se puede deducir fácilmente que $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y. Entonces T es abierta y, por tanto, sobreyectiva.

Por otro lado, podemos también caracterizar los homomorfismos entre espacios de Banach.

Corolario IV.2.11 . *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces equivalen:*

(i) T es un homomorfismo.

(ii) $T(X)$ es cerrado en Y.

El siguiente hecho no es más que una reformulación equivalente del teorema de la aplicación abierta.

Corolario IV.2.12.*(Teorema de los isomorfismos de Banach) Toda aplicación lineal, continua y biyectiva entre espacios de Banach es un isomorfismo.*

Como consecuencia, se tiene la siguiente caracterización de la equivalencia entre dos normas completas de un mismo espacio vectorial.

Corolario IV.2.13. *Sea X un espacio vectorial y supongamos que $\| \|_1$, $\| \|_2$ son dos normas completas en X. Entonces, dichas normas son equivalentes si, y sólo si, son comparables, esto es, existe una constante $M > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$ para cada $x \in X$.*

Nos introducimos ahora en el mundo de las ecuaciones diferenciales para dar una vistosa aplicación del teorema de la aplicación abierta.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ de funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$ y fijemos $t_0 \in [a,b]$ y $x_0 \in \mathbb{K}^n$. Consideramos el problema de valores iniciales

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t),\ t \in [a,b],\ x(t_0) = x_0.$$

Las soluciones del problema pertenecen al espacio $X = C^1([a,b], \mathbb{K}^n)$ de las funciones de clase C^1 en $[a,b]$ y valores en $\mathbb{K}^n$ con la norma

$$\|x\| = max\{|x(t)| : t \in [a,b]\} + max\{|x'(t)| : t \in [a,b]\},$$

donde $| \ |$ denota la norma del máximo en $\mathbb{K}^n$.

Llamemos $Y = C([a,b], \mathbb{K}^n)$ al espacio de las funciones continuas en $[a,b]$ con valores en $\mathbb{K}^n$ que, al igual que X, es un espacio de Banach con la norma

$$\|x\| = max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}.$$

La aplicación $T : X \longrightarrow Y \times \mathbb{K}^n$ definida por

$$T(x) = (x' - Ax, x(t_0)) \ \forall x \in X$$

es claramente lineal y continua. Como ha de ser conocido por los alumnos, nuestro problema tiene solución única, esto es, T es biyectiva. Ahora el teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que, automáticamente, la solución x depende de manera continua del valor inicial $x_0 \in \mathbb{K}^n$ y del dato $b \in Y$.

Esta dependencia continua, siempre deseable, ofrece la garantía de que los métodos de perturbación para aproximar la solución del problema van a tener éxito.

Pasamos a considerar otra reformulación del teorema de la aplicación abierta, cuyo enunciado es radicalmente diferente. Para su motivación empezamos por recordar que si X e Y son dos espacios topológicos, Y es Haussdorff, entonces toda aplicación continua de X en Y tiene gráfica cerrada en $X \times Y$. Por supuesto, la gráfica de una aplicación F es el conjunto $G(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y = F(x)\}$. No debe resultar difícil al alumno obtener algún ejemplo de aplicación no continua con gráfica cerrada.

Por otra parte, el siguiente resultado elemental y conocido de topología general motiva aún más nuestro objetivo.

Proposición IV.2.14. *Sean X e Y espacios topológicos. Si Y es compacto, toda aplicación con gráfica cerrada de X en Y es continua.*

No parece necesario más motivación para enunciar la siguiente reformulación del teorema de la aplicación abierta.

Corolario IV.2.15.*(Teorema de la gráfica cerrada) Sean X e Y espacios de Banach. Entonces toda aplicación lineal con gráfica cerrada de X en Y es continua.*

Para su comprobación, sea $T \in L(X,Y)$ y supongamos que su gráfica, $G(T)$ es cerrada en $X \times Y$. Consideramos la aplicación $P : G(T) \longrightarrow X$ dada por $P(x, T(x)) = x$, que es claramente una biyección lineal y continua entre los espacios de Banach $G(T)$ y X. Entonces, el teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que P^{-1} es continua y, por tanto, también lo es su segunda coordenada, T.

Como la gráfica de una biyección lineal entre espacios normados es cerrada si, y sólo si, lo es la gráfica de su inversa, deducimos fácilmente el teorema de los isomorfismos de Banach.

Observaremos que deducir la continuidad de una aplicación lineal entre espacios de Banach obliga a comprobar dos cosas sobre la imagen de una sucesión convergente a cero: su convergencia y el valor cero del límite. Si aplicamos el teorema de la gráfica cerrada, se supone ya la convergencia, lo que facilita la tarea. Ilustraremos nuestro comentario con algunas consecuencias directas.

Una de las aplicaciones más directas del teorema de la gráfica cerrada es caracterizar los subespacios complementados de un espacio de Banach. Como sabemos un tal subespacio ha de ser cerrado, así como su complemento. Pues bien el recíproco es también cierto.

Corolario IV.2.16 . *Sea X un espacio de Banach y supongamos que X es suma directa de dos subespacios M y N. Entonces la suma es topológico directa si, y sólo si, M y N son cerrados en X.*

Digamos que el teorema de la gráfica cerrada encierra la filosofía de que toda aplicación lineal entre espacios de Banach es continua siempre que tengamos una expresión concreta de su definición. Para ilustrar este *"ambiguo"* comentario, podemos usar el siguiente hecho.

Corolario IV.2.17 . *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\{a_{ij}\}$ una matriz doblemente infinita de números complejos tal que si $x \in \ell_p$ entonces la serie $y_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x(j)$ converge para cada i, y además la sucesión $y = \{y_i\} \in \ell_q$. Entonces la aplicación $T : \ell_p \longrightarrow \ell_q$ dada por $T(x) = y$ para cada $x \in \ell_p$ es continua.*

Aunque dedicaremos el cuarto tema de este capítulo a hacer lo que pensamos que es la aplicación más importante de los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada, cerraremos este tema mostrando la naturalidad de la norma del máximo, como consecuencia de dichos teoremas.

Corolario IV.2.18 . *Sea $\| \ \|$ una norma completa en $C[a,b]$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Supongamos que la convergencia en la norma $\| \ \|$ implica la puntual. Entonces la norma $\| \ \|$ es equivalente a la norma del máximo en $C[a,b]$.*

IV.3 Consecuencias: el teorema de Banach-Steinhauss

Dedicamos este tema a mostrar la utilidad del último principio del Análisis Funcional, el teorema de Banach-Steinhauss con cuya motivación bastante natural podemos comenzar este tema. Sean X e Y espacios normados y $\{T_n\}$ una sucesión en $L(X,Y)$ que converge puntualmente a una aplicación necesariamente lineal $T : X \longrightarrow Y$. Si intentamos probar la continuidad de T vemos enseguida la necesidad de que la sucesión $\{\|T_n\|\}$ esté acotada o, lo que es lo mismo, basta tener garantizada la acotación uniforme de $\{T_n\}$ en la bola unidad de X. Sin embargo nuestras hipótesis sólo nos dan la acotación puntual de la sucesión $\{T_n\}$.

Es claro entonces el interés de un teorema que nos permita pasar de una acotación puntual a la uniforme. El ambiente privilegiado de los espacios de Banach permite obtener el siguiente resultado como consecuencia del teorema de la gráfica cerrada.

Corolario IV.3.19 .*(Teorema de Banach-Steinhauss) Sea X un espacio de Banach y $\{Y_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de espacios normados. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos una aplicación lineal y continua T_i de X en Y_i. Si la familia $\{T_i : i \in I\}$ está puntualmente acotada, entonces también lo está uniformemente en B_X, esto es,*

$$\exists M > 0 : \|T_i(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X, i \in I.$$

Comencemos observando que se puede suponer la complitud de los espacios Y_i para cada $i \in I$, puesto que en caso contrario podemos utilizar la completación de los mismos, sin que ello altere las hipótesis. Asumiendo este hecho llamemos Z al espacio de Banach producto de la familia $\{Y_i : i \in I\}$ con la norma del supremo, es decir, el espacio de las funciones $y : I \longrightarrow \cup_{i \in I} Y_i$ tales que $y(i) \in Y_i$ para cada $i \in I$ con $\sup\{\|y(i)\| : i \in I\} < +\infty$. La norma en dicho espacio viene dada por el supremo anterior.

Definimos $\Phi : X \longrightarrow Z$ mediante $\Phi(x)(i) = T_i(x)$ para cualesquiera $i \in I, x \in X$. La acotación puntual de la familia $\{T_i : i \in I\}$ nos garantiza la buena definición de la aplicación lineal ϕ.

Es el momento de aplicar el teorema de la gráfica cerrada para obtener la continuidad de Φ. Consideramos, pues una sucesión $\{x_n\}$ en X con límite cero y suponemos que la sucesión $\Phi(x_n)$ converge a un elemento $z \in Z$. Nuestro objetivo ahora es probar que $z = 0$.

Fijado $i \in I$, se tiene que $\lim_n \Phi(x_n)(i) = \lim_n T_i(x_n) = z(i)$. Ahora la continuidad de T_i nos dice que $z(i) = 0$, lo que nos da la conclusión deseada y, por tanto, la continuidad de Φ que equivale a la acotación uniforme en B_X de la familia $\{T_i : i \in I\}$.

Conviene poner de manifiesto que el resultado precedente no es más que una consecuencia inmediata de un hecho más general, puramente topológico, que se esconde tras el teorema de Baire.

Proposición IV.3.20 .*(Principio de acotación uniforme) Sea X un espacio topológico de segunda categoría y $\{f_i : i \in I\}$ una familia de aplicaciones semicontinuas inferiormente de X en $\mathbb{R}$ que está puntualmente acotada. Entonces existe un abierto no vacío G de X donde la familia $\{f_i : i \in I\}$ está uniformemente acotada.*

Basta considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto cerrado

$$F_n = \{x \in X : |f_i(x)| \leq n \ \forall i \in I\}.$$

La acotación puntual de la familia $\{f_i : i \in I\}$ nos dice que $X = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ y el hecho de que X sea de segunda categoría nos informa de la existencia de un natural k de forma que F_k tiene interior no vacío. Es claro entonces que si G es el interior de F_k entonces la familia $\{f_i : i \in I\}$ está uniformemente acotada en G.

El caso más interesante del teorema de Banach-Steinhauss se presenta cuando la familia de espacios $\{Y_i : i \in I\}$ coinciden con uno dado. En tal caso, la familia $\{T_i : i \in I\}$ no es más que un subconjunto de $L(X,Y)$ y la acotación uniforme de dicha familia no es más que la acotación en el espacio de operadores $L(X,Y)$.

Con todos los ingredientes que tenemos hasta ahora podemos dar forma definitiva al problema que planteábamos al inicio del tema.

Corolario IV.3.21.*(Teorema de cierre de Steinhauss) Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Si $\{T_n\}$ es una sucesión en $L(X,Y)$ que converge puntualmente a una aplicación, necesarimante lineal, $T : X \longrightarrow Y$, entonces $T \in L(X,Y)$.*

Para mostrar que la hipótesis de complitud del espacio de partida no es superflua basta considerar en c_{00} la sucesión de funcionales lineales y continuos $\{f_n\}$, dada por $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)$, que converge puntualmente al funcional lineal f dado por $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)$. Es claro entonces que la sucesión de funcionales $\{f_n\}$ no está uniformemente acotada en $B_{c_{00}}$ y f no es continuo.

Las aplicaciones más directas del teorema de Banach-Steinhauss consisten en obtener caracterizaciones de la acotación en espacios normados.

Corolario IV.3.22. *Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Entonces son equivalentes:*

(i) A está acotado.

(ii) El conjunto de escalares $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado para cada $f \in X^*$.

Corolario IV.3.23 . *Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto de X^*. Entonces son equivalentes:*

(i) A está acotado.

(ii) El conjunto de escalares $\{f(x) : f \in A\}$ está acotado para cada $x \in X$.

Corolario IV.3.24 . *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y A un subconjunto del espacio de operadores $L(X, Y)$. Entonces son equivalentes:*

(i) A está acotado.

(ii) El conjunto de escalares $\{f(T(x)) : T \in A\}$ está acotado para cada $x \in X$ y para cada $f \in Y^*$.

El paso de una acotación de tipo puntual a otra de tipo uniforme, que nos asegura el teorema de Banach-Steinhauss, nos va a permitir ahora obtener la relación entre la continuidad de una aplicación lineal para las topologías de la norma y débiles.

Corolario IV.3.25 . *Sean X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces T es continua para las topologías de la norma en X e Y si, y sólo si, lo es para las correspondientes topologías débiles.*

El mismo resultado no puede ser esperado para la topología débil$-*$, ni aún en el caso de funcionales, pensando claro está en un espacio no reflexivo. No obstante, el siguiente enunciado clarifica las cosas.

Corolario IV.3.26 . *Sean X, Y espacios normados.*

(i) Si $T \in L(X, Y)$ entonces T^* es continua para las topologías w^* de X^* e Y^*.

(ii) Si $S : Y^* \longrightarrow X^*$ es una aplicación lineal y continua para las topologías w^* de X^* e Y^*, entonces existe $T \in L(X, Y)$ tal que $T^* = S$. En particular, $S \in L(X, Y)$.

El siguiente enunciado concreta en un espacio de Banach clásico, la equivalencia entre acotación puntual y uniforme.

Corolario IV.3.27 . *Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Entonces son equivalentes:*

(i) $y \in \ell_1$.

(ii) Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.

(iii) Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ es convergente.

(iv) Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ tiene sumas parciales acotadas.

Otra sencilla aplicación del teorema que nos ocupa en este tema muestra la equivalencia entre la continuidad separada y la conjunta para una aplicación bilineal entre espacios de Banach.

Corolario IV.3.28 . *Sean X un espacio de Banach, Y, Z espacios normados y $T : X \times Y \longrightarrow Z$ una aplicación bilineal. Entonces son equivalentes:*

(i) T es continua.

(ii) T es separadamente continua.

(iii) Existe $M > 0$ tal que $\|T(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ $\forall x \in X, y \in Y$.

La siguiente aplicación del teorema de Banach-Steinhauss no por conocida deja de ser vistosa. Se trata de probar la abundancia de funciones continuas y $2\pi-$periódicas cuya serie de Fourier asociada es divergente.

Sea X el espacio de Banach de las funciones continuas y $2\pi-$periódicas con la norma del máximo. Para cada $f \in X$ hacemos

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f),$$

donde $c_k(f)$ es el $k-$ésimo coeficiente de Fourier de f dado por

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Escribimos ahora $\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt$, donde

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{-ikt} = \frac{sen((n+\frac{1}{2})t)}{sen(\frac{t}{2})}.$$

Entonces σ_n es un funcional lineal y continuo en X con

$$\|\sigma_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt.$$

Estimaremos ahora, por abajo, la norma de σ_n.

$$\|\sigma_n\| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\frac{sen((n+\frac{1}{2})t)}{t}||\frac{t}{sen(\frac{t}{2})}| \geq$$

$$\geq M\int_0^{\pi} |\frac{sen((n+\frac{1}{2})t)}{t}|dt = M\int_0^{n+\frac{1}{2}} |\frac{sen(s)}{s}|ds,$$

donde M es una cota inferior para la función $|\frac{t}{sen(\frac{t}{2})}|$.

Como la integral $\int_0^{+\infty} |\frac{sen(s)}{s}|ds$ diverge, es claro entonces que la sucesión de funcionales $\{\sigma_n\}$ no está acotada. El teorema de Banach-Steinhauss permite ahora concluir lo siguiente.

Corolario IV.3.29 . *El conjunto de las funciones $f \in C[0,2\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en el origen es de primera categoría en el espacio de Banach $C[0,2\pi]$.*

Este resultado nos asegura la abundancia de funciones cuya serie de Fourier asociada no converge puntualmente, de hecho este conjunto es de segunda categoría. La facilidad y elegancia con la que se ha probado este resultado contrasta con la dificultad de encontrar explícitamente un ejemplo concreto, dado por Du Bois-Reymond en 1876.

La siguiente aplicación del teorema de Banach-Steihauss nos adentra en resultados básicos de la teoría de sumabilidad.

Definición IV.3.30 . *Sea $A = (a_{nk})$ una matriz doblemente infinita de escalares. Si $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares definimos, cuando sea posible, una nueva sucesión Ax dada por:*

$$Ax(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk}x(k) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Llamaremos **dominio** *de la matriz A al subespacio d_A de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formado por aquellas sucesiones x para las que Ax está definida. El conjunto $c_A = \{x \in d_A : Ax \in c\}$ será denominado* **dominio de convergencia** *de la matriz A.*

Surgen de forma natural los siguientes conceptos: diremos que A es **conservativa** si A trasforma sucesiones convergentes en convergentes, esto es, si $c \subset c_A$, A se dirá **regular** si además de ser conservativa el límite de la sucesión imagen coincide con el de la original, es decir, si

$$\lim_n Ax(n) = \lim_n x(n) \ \forall x \in c.$$

Gracias otra vez al teorema de Banach-Steinhauss podemos caracterizar cuándo una matriz es conservativa o regular.

Corolario IV.3.31 .*(Silverman-Toeplitz) La matriz $A = (a_{nk})$ es conservativa si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\sup\{\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{nk}| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$.

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe el límite $a_k = \lim_n a_{nk}$.

(iii) Existe el límite $\alpha = \lim_n \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk}$.

Corolario IV.3.32 . *La matriz $A = (a_{nk})$ es regular si, y sólo si, se verifican las tres condiciones del corolario anterior con $a_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ y $\alpha = 1$.*

IV.4 Bases de Schauder

El concepto de base *"algebraica"* en un espacio vectorial nos ha servido de poco en el desarrollo de nuestra asignatura, como era de esperar, ya que no involucra la topología que tienen los espacios vectoriales que son objeto de nuestro estudio. Surge entonces, de forma totalmente natural, el siguiente concepto.

Definición IV.4.33. *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $\{e_n\}$ en X será llamada* **base de Schauder** *o simplemente* **base** *del espacio X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{t_n\}$ verificando $x = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n e_n$, donde la convergencia de la serie anterior ha de ser entendida en la topología de la norma de X.*

Obsérvese que la sucesión $\{e_n\}$ anterior está formada obligatoriamente por vectores linealmente independientes, por tanto, X tiene dimensión infinita. Además el subespacio generado por dicha sucesión es denso en X, lo que hace que X tenga que ser separable.

Llamaremos sucesión de funcionales **biortogonales** de la base $\{e_n\}$ a la sucesión de funcionales lineales sobre X, $\{e_n^*\}$ dada por:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n \ \forall x \in X.$$

Obsérvese que $e_n^*(e_m) = \delta_{nm} \ \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Análogamente, llamaremos sucesión de **proyecciones de la base** a la sucesión de aplicaciones lineales $P_n : X \longrightarrow X$ dadas por

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k \ \forall x \in X.$$

Diremos que una sucesión de vectores de un espacio de Banach es una **sucesión básica** si es una base del subespacio cerrado generado por dicha sucesión.

Los ejemplos más sencillos de espacios de Banach con base son c_0 y ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$. Basta considerar en cada uno de ellos la sucesión $\{e_n\}$ dada por $e_n(m) = \delta_{nm} \ \forall n, n \in \mathbb{N}$ para obtener una base, ya que en dichos espacios se comprueba fácilmente que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) e_n,$$

y dicha expresión es única. A $\{e_n\}$ se le llama base **canónica** en cada uno de los espacios anteriores.

El siguiente resultado recoge las propiedades más interesantes de las bases en espacios de Banach, dando además una caracterización intrínseca de las mismas gracias a una brillante aplicación del teorema de los isomorfismos de Banach.

Teorema IV.4.34 .*(Banach-Schauder) Sea X un espacio de Banach y $\{e_n\}$ una sucesión de vectores en X.*

(i) *$\{e_n\}$ es una sucesión básica si, y sólo si, existe $K > 0$ tal que*

$$\|\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\| \leq K \|\sum_{k=1}^{n+m} t_k e_k\|$$

para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera escalares $\{t_k\}$. La mínima constante K verificando la desigualdad anterior se llama **constante básica** *de la sucesión básica $\{e_n\}$. Si $K = 1$ se dice que la sucesión básica $\{e_n\}$ es* **monótona**.

(ii) *Si $\{e_n\}$ es una base de X las proyecciones de la base son continuas y verifican*

$$\sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} = K,$$

donde K es la constante básica. Los funcionales biortogonales son también continuos y satisfacen

$$1 \leq \|e_n\| \|e_n^*\| \leq 2K.$$

Además existe una norma equivalente $\| \ \|_0$ en X con la que $\{e_n\}$ es una base monótona y $\|e_n\| = \|e_n\|_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Empecemos preparando el terreno para aplicar el teorema de los isomorfismos de Banach. Consideremos $c(X)$ el espacio de las sucesiones convergentes de vectores de X con la norma

$$\|x\| = \sup\{\|x(n)\| : n \in \mathbb{N}\} \ \forall x \in c(X),$$

que convierte a X en un espacio de Banach. Ahora definimos el siguiente subespacio cerrado, y por tanto Banach, de $c(X)$:

$$Z = \{z \in c(X) : z(1) \in \operatorname{lin}\{e_1\}, \ z(n+1) - z(n) \in \operatorname{lin}\{e_{n+1}\}\}.$$

La aplicación $T : Z \longrightarrow \overline{\text{lin}}\{e_n\}$ dada por

$$T(z) = \lim_n z(n) \ \forall z \in Z,$$

es claramente lineal y continua. El hecho crucial y obvio para nuestros propósitos consiste en que $\{e_n\}$ es una base de X si, y sólo si, T es biyectiva. En estos momentos podemos afirmar gracias al teorema de los isomorfismos de Banach que, en el caso de que $\{e_n\}$ sea base de X, T^{-1} es también continua y se obtiene fácilmente la desigualdad de la primera afirmación en el resultado anterior, argumentando igualmente para sucesiones básicas. El resto de las afirmaciones son consecuencias inmediatas.

El resultado anterior es útil en la práctica para comprobar que ciertas sucesiones son básicas. Como ilustración obtenemos dos ejemplos más de bases en espacios de Banach que no son tan evidentes como los presentados anteriormente.

Los racionales diádicos del intervalo $I = [0, 1]$ y los correspondientes intervalos diádicos jugarán un papel importante en los ejemplos que siguen con lo que conviene introducir alguna notación.

Numeramos los intervalos diádicos por el procedimiento de subdividir sucesivamente el intervalo I de forma que en cada paso uno solo de los intervalos previos se divide en dos partes iguales. La partición de I que se obtiene después de n pasos se describe como sigue: para $m, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j < 2^m$ consideramos el intervalo diádico abierto $I_{mj} =]j2^{-m}, (j+1)2^{-m}[$.

Cada $n \in \mathbb{N}$ admite una única expresión del tipo:

$$n = 2^m + k \text{ con } m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k < 2^m,$$

y notamos S_n a la familia de intervalos diádicos dada por

$$S_n = \{I_{(m+1)j} : 0 \leq j \leq 2k + 1\} \cup \{I_{mj} : k + 1 \leq j \leq 2^m - 1\}.$$

Así que S_n da lugar a una partición de I en $2k+2$ intervalos de longitud $2^{-(m+1)}$ y $2^m - k - 1$ intervalos de longitud 2^{-m}. Al pasar de S_n a S_{n+1} lo único que hacemos es dividir en dos partes iguales uno de los intervalos de S_n. En particular, cada intervalo de S_{n+1} está contenido en uno de S_n. Notaremos $\mathcal{X}_{mj}$ a la función característica del intervalo I_{mj}.

Pasamos ya a mostrar nuestros dos nuevos ejemplos de bases:

(i) **El sistema de Haar** es la sucesión $\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ de funciones sobre I dadas por $h_0(t) = 1\ \forall t \in I$ y

$$h_n = 2^{\frac{m}{2}}(\mathcal{X}_{(m+1)2k} - \mathcal{X}_{(m+1)(2k+1)}),$$

para $n = 2^m + k$ con $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k < 2^m$. En definita, h_n es constante en cada uno de los $n+1$ intervalos de S_n, toma los valores $2^{\frac{m}{2}}$ y $-2^{\frac{m}{2}}$ en los intervalos $I_{(m+1)2k}$ e $I_{(m+1)(2k+1)}$, que son los que han aparecido nuevos al pasar de S_{n-1} a S_n, y se anula en el resto de I. Aplicando el teorema anterior se puede comprobar que el sistema de Haar es una base de $L_p[0,1]$ para $1 \le p < +\infty$.

(ii) **Los sistemas de Faber-Schauder.** Pretendemos ahora probar que el espacio $X = C[0,1]$ posee bases y presentar la más famosa de ellas.

Sea $\{t_j\}$ una sucesión de puntos del intervalo I tal que $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ y el conjunto $\{t_j : j \in \mathbb{N}\}$ es denso en I. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una proyección lineal P_n en X como sigue: si $f \in X$ definimos $P_1(f)$ como la función constantemente igual a $f(0)$; si $n > 1$ definimos $P_n(f)$ como la función que coincide con f en los puntos $t_1, \cdots, t_n$ y es afín en cada subintervalo cerrado de I determinado por dichos puntos. Se tiene entonces que $\{P_n(f)\} \to f$ para cada $f \in X$. En consecuencia, haciendo $e_1(t) = 1$ para cada $t \in I$ y

$$e_n(t) = \frac{2}{\|h_{n-2}\|_1} \int_0^t h_{n-2}(s)ds\ \forall t \in I, n > 1$$

donde $\{h_n\}$ es el sistema de Haar, se comprueba fácilmente que $\{e_n\}$ es una base monótona de X, conocida como **sistema de Schauder**.

Para satisfacer una curiosidad natural digamos que no todo espacio de Banach separable posee una base Schauder, hecho que excede nuestros objetivos en este proyecto. No obstante, otra nueva aplicación del teorema de Banach-Schauder permite obtener lo siguiente.

Teorema IV.4.35.*(Mazur) Todo espacio de Banach infinito-dimensional contiene una sucesión básica.*

Presentamos a continuación un tipo especial se sucesiones básicas construidas a partir de una base dada que serán de importancia más adelante.

Definición IV.4.36 . *Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}$. Una sucesión $\{v_n\}$ en X se llamará un* **bloque básico** *de $\{x_n\}$ si existen enteros $m_0 = 0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots$ y una sucesin de escalares $\{\lambda_n\}$ tales que*

$$v_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \lambda_k x_k \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es claro que un bloque básico es una sucesin básica cuya constante básica no excede de la constante de la base de partida.

Parece natural que dos espacios de Banach con base que son isomorfos deberían tener bases estrechamente relacionadas. El siguiente concepto explicita este hecho.

Definición IV.4.37 . *Se dice que dos bases $\{e_n\}$ y $\{v_n\}$ de sendos espacios de Banach X e Y son* **equivalentes** *si para cualquier sucesión de escalares $\{t_n\}$, la convergencia de la serie $\sum_n t_n e_n$ equivale a la de la serie $\sum_n t_n v_n$.*

La siguiente aplicación del teorema de la gráfica cerrada permite probar que tener bases equivalentes no es más que tener espacios isomorfos.

Corolario IV.4.38 . *Dos bases $\{e_n\}$ y $\{v_n\}$ de sendos espacios de Banach X e Y son equivalentes si, y sólo si, existe $T : X \longrightarrow Y$ isomorfismo sobreyectivo tal que $T(e_n) = v_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

El siguiente resultado muestra, en cierto sentido, la estabilidad de las sucesiones básicas.

Proposición IV.4.39 . *Sea* $\{e_n\}$ *una sucesión básica en un espacio de Banach* X*,* $X_0 = \mathrm{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *y* $\{e_n^*\}$ *la sucesión de funcionales biortogonales asociada a* $\{e_n\}$*. Si* $\{v_n\}$ *es una sucesión en* X *tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|e_n^*\| \|e_n - v_n\| = \delta < 1,$$

entonces $\{v_n\}$ *es una sucesión básica equivalente a* $\{e_n\}$*. Además, si existe una proyección lineal y continua* P *de* X *sobre* X_0 *con* $\delta\|P\| < 1$*, entonces* $Y_0 = \mathrm{lin}\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es un subespacio complementado de* X*.*

IV.5 El principio de selección de Bessaga-Pelczynski

Pretendemos presentar en esta sección un importante principio de selección que nos permite obtener sucesiones básicas a partir de una sucesión dada no necesariamente básica. Aplicaremos después las herramientas del Análisis Funcional para obtener consecuencias importantes.

Para motivar el principio de selección que pretendemos presentar, empezaremos diciendo que en un espacio de Banach con base, es sabido que existen una cantidad infinita no numerable de bases no equivalentes entre sí, hecho probado por Pelczynski y Singer. Surge inmediatamente el problema de reconocer en un espacio de Banach arbitrario la base usual de los espacios de Banach clásicos. Más concretamente, nos podemos plantear cómo saber si una sucesión en un espacio de Banach es equivalente a la base usual de c_0, que denotaremos por $\{e_n\}$. Equivalentemente, nos estamos planteando cuándo un espacio de Banach contiene subespacios isomorfos a c_0. Sea entonces X un espacio de Banach y supongamos primeramente que $\{v_n\}$ es una sucesión básica en X. Denotando por Y al subespacio cerrado de X generado por la sucesión $\{v_n\}$, si queremos que $\{v_n\}$ sea equivalente a la base usual de c_0 no tenemos más remedio que suponer que la serie $\sum_n t_n v_n$ sea convergente para cada $\{t_n\} \in c_0$.

En tal caso, podemos definir la aplicación $T : c_0 \longrightarrow Y$ mediante

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) v_n \ \forall x \in c_0$$

Si ahora imponemos que $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, obtenemos que T es una biyección lineal entre dos espacios de Banach. Aplicando ahora el teorema de la gráfica cerrada se obtiene que T es un isomorfismo y, por tanto, X contiene un subespacio isomorfo a c_0. Recapitulando, hemos probado el siguiente hecho.

Proposición IV.5.40. *Sea X un espacio de Banach y $\{v_n\}$ una sucesión básica en X. Entonces $\{v_n\}$ es equivalente a la base usual de c_0 (o si se quiere, X contiene a c_0) si, y sólo si, $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$ y la serie $\sum_n t_n v_n$ converge para cada $\{t_n\} \in c_0$.*

Pasamos ahora a poner nombre a la propiedad que verifica $\{v_n\}$ en la proposición anterior.

Proposición IV.5.41. *Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Entonces equivalen:*

(i) $\sum_n t_n x_n$ *converge para cada* $\{t_n\} \in c_0$.

(ii) $\sum_n |x^*(x_n)|$ *converge para cada* $x^* \in X^*$.

(iii) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^*(x_n)| \leq C\|x^*\|$ *para cada* $x^* \in X^*$.

(iv) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| \leq C$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera escalares* $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

(v) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \| \leq C$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera escalares* $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$.

(vi) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \| \leq C$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera escalares verificando* $|t_i| \leq 1$.

Diremos que la serie $\sum_n x_n$ *es* **débilmente incondicionalmente Cauchy** *si verifica alguna de las propiedades anteriores.*

Nos planteamos ahora la posibilidad de obtener un resultado análogo a la proposición IV.5.40 sin suponer que la sucesión $\{v_n\}$ sea básica. Para este fin necesitamos alguna forma de obtener sucesiones básicas a partir de una sucesión dada que no sea necesariamente básica. El resultado más empleado para este propósito es el siguiente.

Teorema IV.5.42 . *(Principio de selección de Bessaga-Pelczynski) Sea* X *un espacio de Banach y* $\{x_n\}$ *una sucesión débilmente convergente a cero y no convergente en norma. Entonces existe* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *parcial básica de* $\{x_n\}$*.*

Como primera aplicación del resultado precedente damos respuesta al problema planteado.

Corolario IV.5.43 .*(Bessaga-Pelczynski) Sea* X *un espacio de Banach. Entonces* X *contiene a* c_0 *si, y sólo si, existe una sucesión* $\{x_n\}$ *en* X *tal que la serie* $\sum_n x_n$ *es débilmente incondicionalmente Cauchy y no convergente en norma.*

Utilizamos ahora el corolario anterior para obtener una importante propiedad de los espacios que no continene a c_0.

Corolario IV.5.44 . *Sea* X *un espacio de Banach sin subespacios isomorfos a* c_0 *y* $T \in L(c_0, X)$*. Entonces existe* $\{R_n\} \subset L(c_0, X)$ *sucesión de operadores de rango finito tales que* $\{R_n\} \to T$*, donde la convergencia se da en el espacio de operadores* $L(c_0, X)$*.*

Aplicamos ahora de nuevo el principio de selección de Bessaga-Pelczynski para obtener el teorema de Orlicz-Pettis.

Corolario IV.5.45 . *Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Supongamos que cada subserie de $\sum_n x_n$ es débilmente convergente, esto es, $\sum_n x_{\sigma(n)}$ es débilmente convergente para cada parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ de $\{x_n\}$. Entonces cada subserie de $\sum_n x_n$ es convergente para la topología de la norma. En particular, la serie $\sum_n x_n$ converge en norma.*

Finalizamos este tema obteniendo una consecuencia del corolario anterior en el mundo de las medidas vectoriales.

Corolario IV.5.46 . *Sea X un espacio de Banach, Ω un conjunto no vacío y Σ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. Entonces toda medida vectorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ débilmente numerablemente aditiva es numerablemente aditiva en norma.*

BIBLIOGRAFIA: Se puede decir que las demostraciones de los resultados fundamentales de este capítulo son esencialmente las originales de Banach [2]. No obstante, la terminología actual y algunos detalles se han tomado de [3], [8], [12], [35] y [58]. En el texto de Jameson [28] se puede ver una prueba diferente del teorema de la aplicación abierta en términos de subonjuntos *"CS-cerrados"* y *"CS-compactos"* y en los textos de Rudin [45] y Wilansky [57] aparecen la mayoría de las aplicaciones dadas aquí. La idea de probar el teorema de Banach-Steinhauss a partir del teorema de la gráfica cerrada ha sido tomada de [33], donde se puede encontrar el teorema de Banach-Steinhauss en espacios de Fréchet para funcionales a partir del de la gráfica cerrada en F-espacios, el ambiente natural para dichos resultados como pondremos de manifiesto en la segunda parte de nuestro proyecto.

Para el tema de las bases de Schauder son textos obligados los de Singer [50] y el de Lindenstrauss-Tzafriri, [34]. Por último el teorema de Bessaga-Pelczynski ha sido tomado de [13].

Capítulo V

ESPACIOS DE HILBERT.

Como J. Dieudonné explica en su Historia del Análisis Funcional [14], entre 1900 y 1910 se produce la cristalización de una serie de ideas que habían ido gestándose lentamente durante el siglo XIX. Esto se debe fundamentalmente a la aparición de cuatro trabajos, un artículo de Fredholm sobre ecuaciones integrales (1900), la tesis de Lebesgue sobre integración (1902), un articulo de Hilbert sobre teoría espectral (1906) y la tesis de Fréchet sobre espacios métricos. La coincidencia en el tiempo de estos trabajos puede decirse que dio lugar al nacimiento del Análisis Funcional como hoy lo conocemos.

El estudio de lo que hoy llamamos espacios de Hilbert se inicia en el mencionado trabajo de David Hilbert con el fin de profundizar en el trabajo anterior de Fredholm sobre las ecuaciones integrales que llevan su nombre. Hilbert llega de forma natural a la consideración del espacio l_2 *de las sucesiones de números reales de cuadrado sumable, de las formas bilineales que él llama "acotadas" en dicho espacio y las correspondientes formas cuadráticas en infinitas variables. La teoría de los espacios de Hilbert se consolida, por una parte, a través de los trabajos del propio Fréchet y de uno de los más aventajados discípulos de Hilbert, E. Schmidt, publicados en 1908, que aplican ya sistemáticamente métodos geométricos (el trabajo de Schmidt contiene las nociones de producto escalar, norma, ortogonalidad y el Teorema de la proyección ortogonal) al estudio del espacio de Hilbert separable, explotando la similitud con la geometría euclídea en dimensión finita. Por otra parte, también en 1906-1907 F. Riesz y E. Fisher, aprovechando la preciosa herramienta que Lebesgue les había proporcionado, establecen el teorema que lleva su nombre sobre la complitud del espacio* $L_2(I)$ *de las (clases de) funciones de cuadrado integrable en un intervalo compacto* I *y el total isomorfismo de dicho espacio con* l_2*, vía coeficientes de Fourier, ligando de por vida a los espacios de Hilbert con la teoría de la integración y la de las series de Fourier y abriendo el camino para la consideración de los espacios* L_p *y de los espacios de Banach en general.*

Así pues dedicamos este capítulo a presentar en los dos primeros temas los espacios de Hilbert junto con los teoremas de la proyección ortogonal, aproximación óptima y representación de un espacio de Hilbert en la forma $l_2(\Lambda)$*.*

Los dos últimos temas pretenden ser una introducción a la teoría de operadores en espacios de Hilbert.

V.1 Los teoremas de la proyección ortogonal y Riesz-Fréchet

El presente tema contiene, como no podía ser de otra forma, los conceptos básicos de la teoría de espacios de Hilbert y los métodos geométricos que hacen posible trabajar en tales espacios con una comodidad inalcanzable en espacios más generales. El Teorema de la proyección ortogonal y su principal consecuencia, el Teorema de representación de Riesz-Fréchet son, claro está, los resultados fundamentales. Hacemos también una pequeña concesión a la Matemática Aplicada obteniendo una consecuencia casi inmediata del Teorema de Riesz-Fréchet conocida como Teorema de Lax-Milgram.

Definición V.1.1. *Si X e Y son espacios vectoriales, diremos que una aplicación de X en Y es* **conjugado-lineal** *si verifica que*

$$f(\lambda x_1 + x_2) = \overline{\lambda} f(x_1) + f(x_2) \qquad (x_1, x_2, \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$$

(en caso real "conjugado-lineal" es lo mismo que lineal). Si ahora Z es otro espacio vectorial, se dice que una aplicación $\varphi : X \times Y \to Z$ es **sexquilineal** *cuando φ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda:*

$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, \mu y_1 + y_2) =$$

$$= \lambda\overline{\mu}\varphi(x_1, y_1) + \lambda\varphi(x_1, y_2) + \overline{\mu}\varphi(x_2, y_1) + \varphi(x_2, y_2),$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. En el caso $Z = \mathbb{K}$ decimos que φ es una **forma sexquilineal** *en $X \times Y$. Si $X = Y$, diremos que la forma sexquilineal φ en $X \times X$, donde X es un espacio vectorial (real o complejo) es* **hermítica**, *si verifica*

$$\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)} \qquad (x, y \in X).$$

Se dice que una forma sexquilineal hermítica es **positiva** *si* $\varphi(x,x) \geq 0$ *para todo* x *en* X *y* **definida positiva** *si para* $x \in X$, $x \neq 0$, *se tiene* $\varphi(x,x) > 0$. *Un* **producto escalar** *en* X *es una forma sexquilineal hermítica y definida positiva, de* $X \times X$ *en* $\mathbb{K}$. *Adoptaremos la notación usual* $(x,y) \to (x|y)$ *para un producto escalar. Notemos que los axiomas que definen a un producto escalar son, en resumidas cuentas, los siguientes:*

i) $(\lambda x_1 + x_2|y) = \lambda(x_1|y) + (x_2|y) \quad (x_1, x_2, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

ii) $(y|x) = \overline{(x|y)} \quad (x, y \in X)$.

iii) $x \in X,\ x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0$.

Un **espacio prehilbertiano** *es un espacio vectorial en el que se tiene definido un producto escalar.*

Inmediatamente se obtiene la siguiente relación entre el producto escalar de un espacio prehilbertiano y la forma cuadrática asociada:

Lema V.1.2 .*(Identidad de polarización) Si* X *es un espacio prehilbertiano, entonces se verifica:*

$$4\mathrm{Re}(x|y) = (x+y|x+y) - (x-y|x-y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Todo espacio prehilbertiano se convierte canónicamente en un espacio normado como consecuencia de:

Proposición V.1.3 . *Sea* X *un espacio prehilbertiano. Se verifican entonces:*

i) Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:*

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y) \qquad (x, y \in X).$$

ii) Desigualdad de Minkowski*:*

$$(x+y|x+y)^{1/2} \leq (x|x)^{1/2} + (y|y)^{1/2} \qquad (x, y \in X).$$

Por tanto, la aplicación $x \to (x|x)^{1/2}$ *es una norma en* X.

Definición V.1.4. *Un espacio prehilbertiano X se considera canónicamente como espacio normado con la* **norma** *dada por:*

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X).$$

La desigualdad de Minkowski se convierte en la desigualdad triangular para la norma $\|\cdot\|$ y la de Cauchy-Schwarz toma la forma:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in X).$$

Como consecuencia el producto escalar es continuo en $X \times X$ y, considerándolo si queremos como aplicación $\mathbb{R}$-bilineal continua, tiene norma 1. A su vez la norma determina al producto escalar, puesto que, por la identidad de polarización, tenemos

$$4\mathrm{Re}\,(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \qquad (x, y \in X)$$

y en el caso complejo podemos simplemente pensar que

$$\mathrm{Im}\,(x|y) = \mathrm{Re}\,(x|iy) \qquad (x, y \in X).$$

Conviene resaltar que, como consecuencia inmediata de lo anterior, si X e Y son espacios prehilbertianos y $T : X \to Y$ es lineal e isométrica, entonces T conserva el producto escalar. Dicho de otra forma, dos espacios prehilbertianos son totalmente isomorfos si son idénticos como espacios normados, es decir, isométricamente isomorfos. Si la norma de un espacio prehilbertiano X es completa, decimos que X es un **espacio de Hilbert**.

Surge de forma natural la pregunta ¿qué normas proceden de un producto escalar? De las innumerables respuestas satisfactorias que pueden darse a esta pregunta nos quedamos con la más clásica y no por ello menos útil.

Teorema V.1.5.*(Jordan-von Neumann) Sea $\|\cdot\|$ una norma en un espacio vectorial X. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *Existe un producto escalar* $(\cdot|\cdot)$ *en* X *tal que*

$$\|x\|^2 = (x|x) \qquad (x \in X).$$

ii) *Se verifica la* **igualdad del paralelogramo***:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (x, y \in X).$$

Pasemos a las consecuencias más directas del teorema anterior. Naturalmente cualquier propiedad de los espacios prehilbertianos que no compartan otros espacios normados será, de forma más o menos directa, consecuencia de la igualdad del paralelogramo. En primer lugar el que un espacio normado sea o no un espacio prehilbertiano lo deciden sus $\mathbb{R}$-subespacios dos dimensionales:

Corolario V.1.6 .

i) *Si* X *es un espacio normado complejo, entonces* X *es prehilbertiano (su norma procede de un producto escalar) si, y sólo si, lo es* $X_{\mathbb{R}}$*, el espacio normado real subyacente a* X*.*

ii) *Si* X *es un espacio normado real con* $\dim(X) \geq 2$*, entonces* X *es un espacio prehilbertiano si, y sólo si, cada subespacio bidimensional de* X *es prehilbertiano.*

Puede ser un buen momento para que los alumnos decidan cuáles de los espacios de Banach que conocen son prehilbertianos (algo que indudablemente es antihistórico, pero instructivo). La conclusión más destacable debe ser la siguiente:

Ejemplo.- De la familia de espacios de Banach $\{\ell_p : 1 \leq p \leq +\infty\} \cup \{L_p[0,1] : 1 \leq p \leq +\infty\}$ son espacios de Hilbert sólo ℓ_2 y $L_2[0,1]$. Si es posible, se puede partir de los espacios $L_p(\mu)$.

Pasando a consecuencias geométricas, igualmente inmediatas pero más ingeniosas, del Teorema de Jordan-Von Neumann obtendremos la que motivó a Clarkson para introducir los espacios de Banach uniformemente convexos, en particular la convexidad estricta de los espacios prehilbertianos.

Corolario V.1.7 . *Sea H un espacio prehilbertiano.*

i) *Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones en la bola unidad de H tales que $\{\|x_n+y_n\|\} \to 2$, entonces $\{\|x_n-y_n\|\} \to 0$. En particular la esfera unidad de H no contiene segmentos no triviales y H es reflexivo si es completo, como consecuencia del teorema de Milman-Pettis.*

ii) *(La propiedad de Radon-Riesz, también llamada de Kadec-Klee). Si $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores de H y $x \in H$, entonces:*

$$\left.\begin{array}{r} \{\|x_n\|\} \to \|x\| \\ (x_n|y) \to (x|y) \quad \forall y \in H \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \{\|x_n - x\|\} \to 0.$$

Es ya el momento de abordar la consecuencia más importante de la igualdad del paralelogramo, el Teorema de aproximación óptima.

Teorema V.1.8 .*(Teorema de aproximación óptima). Sea H un espacio prehilbertiano, M un subconjunto convexo y completo de H y $a \in H$. Existe un único punto $x_0 \in M$ tal que*

$$\|a - x_0\| \leq \|a - x\| \qquad \forall x \in M,$$

esto es, a tiene única mejor aproximación en M.

Para llegar al Teorema de la proyección ortogonal, principal resultado de este tema, sólo nos queda obtener una sencilla caracterización de las mejores aproximaciones con lo que se llega de forma natural al concepto de vectores ortogonales:

Definición V.1.9 . *Decimos que dos vectores x, y en un espacio prehilbertiano H son* **ortogonales** *y escribimos $x \perp y$ cuando $(x|y) = 0$ (evidentemente $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$). Dado un subconjunto no vacío M de H notamos:*

$$M^{\perp} = \{y \in H : \ y \perp x \ \forall x \in M\}$$

y es evidente que $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H, así como que $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ y $M \subset M^{\perp\perp}$.

Del Teorema de Aproximación Optima obtendremos el siguiente resultado:

Teorema V.1.10 .*(de la proyección ortogonal.) Sea H un espacio prehilbertiano y M un subespacio completo de H. Entonces:*

i) $H = M \oplus M^{\perp}$.

ii) *La proyección lineal P_M de H sobre M tal que $\mathrm{Ker} P_M = M^{\perp}$ recibe el nombre de* **proyección ortogonal** *de H sobre M y verifica que:*

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in H),$$

en particular P_M es continua y, si $M \neq \{0\}$, $\|P_M\| = 1$. Además, para cada $x \in H$, $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M.

Notemos que, si H no es completo, la situación de M y $M^{\perp}$ en el teorema anterior no es simétrica; puesto que la aplicación $x \to (P_M(x), x - P_M(x))$ es un isomorfismo isométrico de H sobre $M \times M^{\perp}$ usando en el producto la norma dada por

$$\|(y, z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad (y \in M,\ z \in M^{\perp}),$$

si $M^{\perp}$ fuese completo también lo sería H. En el caso de que H sea completo y M cerrado, la situación es perfectamente simétrica y $P_{M^{\perp}} = I - P_M$ donde I es la identidad en H, con lo que $M = M^{\perp\perp}$. Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert H, podemos aplicar lo anterior, tomando como M el subespacio cerrado de H engendrado por A; puesto que claramente $A^{\perp} = M^{\perp}$ obtenemos:

Corolario V.1.11 . *Sea A un subconjunto no vacío arbitrario de un espacio de Hilbert H. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el mínimo subespacio cerrado de H que contiene al conjunto A. En particular, si Y es un subespacio de H se tiene $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en H si, y sólo si, $Y^{\perp} = \{0\}$.*

Como principal aplicación del Teorema de la proyección ortogonal obtenemos la autodualidad de los espacios de Hilbert.

Comenzamos por una observación elemental que podía haberse hecho inmediatamente después de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si H

es un espacio prehilbertiano y $x \in H$ podemos considerar la aplicación $\tilde{x} : H \to \mathbb{K}$ definida por

$$\tilde{x}(y) = (y|x) \qquad (y \in H);$$

tenemos claramente que $\tilde{x}$ es un funcional lineal continuo en H, esto es $\tilde{x} \in H^*$, y $\|\tilde{x}\| = \|x\|$. La aplicación $x \to \tilde{x}$ es conjugado-lineal (lineal en caso real) e isométrica. Para que sea sobreyectiva H deberá ser completo, puesto que H^* siempre lo es. Bajo la hipótesis de complitud el Teorema de la Proyección ortogonal nos permite probar fácilmente:

Teorema V.1.12 *.(Riesz-Fréchet) Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$. Existe un único vector $x \in H$ tal que $f(y) = (y|x)$ para todo $y \in H$. Como consecuencia la aplicación $x \to \tilde{x}$, donde*

$$\tilde{x}(y) = (y|x) \qquad (x, y \in H)$$

es una biyección conjugado-lineal isométrica de H sobre H^*.

Como caso particular del teorema anterior obtenemos la descripción del dual de $L_2[0,1]$. Notemos que, en el caso complejo, la identificación de $L_2[0,1]$ con su dual que ahora obtenemos es conjugado-lineal. Ello no es ningún problema, puesto que la aplicación $g \to \overline{g}$ ($g \in L_2[0,1]$) es a su vez una biyección conjugado-lineal isométrica de $L_2[0,1]$ en sí mismo, y basta componerla con la que da el teorema anterior. Del mismo modo, si se quiere, se identifica el dual de $L_2(\mu)$.

Concluimos este tema con una segunda aplicación del Teorema de Riesz-Fréchet, para el estudio de formas sexquilineales continuas en espacios de Hilbert, que culmina con el resultado que se conoce como Teorema de Lax-Milgram, de utilidad en el estudio de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de tipo elíptico.

De forma fácil, del Teorema de Riesz-Fréchet se deduce:

Corolario V.1.13 *. Si H y K son espacios de Hilbert, para cada forma sexquilineal continua $\varphi : H \times K \to \mathbb{K}$, existen aplicaciones lineales continuas $T \in L(H,K)$, $S \in L(K,H)$, determinadas en forma única, tales* *que:*

$$\varphi(x, y) = (Tx|y) = (x|Sy) \quad (x \in H,\ y \in K).$$

Se tiene además $\|T\| = \|S\| = \|\varphi\|$. *En el caso particular* $K = H$, φ *es hermítica si, y sólo si,* $S = T$.

Concentrándonos en el caso más interesante, $K = H$, y, añadiendo a la forma sexquilineal la hipótesis de ser coerciva, esto es,

$$\exists m > 0 :\ |\varphi(x, x)| \geq m\|x\|^2 \ \ \forall x \in H.$$

el correspondiente operador es un isomorfismo, hecho que usaremos para obtener:

Corolario V.1.14.*(Teorema de Lax-Milgram) Sea* H *un espacio de Hilbert y* $\varphi : H \times H \to \mathbb{K}$ *una forma sexquilineal continua y coerciva. Entonces, para cada funcional lineal continuo* $f \in H^*$ *existe un único vector* $x_0 \in H$ *tal que*

$$\varphi(x, x_0) = f(x) \qquad (x \in H). \tag{1}$$

De hecho en caso real si φ *es simétrica y definida positiva, el punto* x_0 *viene caracterizado por la condición*

$$\frac{1}{2}\varphi(x_0, x_0) - f(x_0) = \min_{x \in H}\left\{\frac{1}{2}\varphi(x, x) - f(x)\right\} \quad (x \in H, f \in H^*). \tag{2}$$

Merece la pena observar que la relación entre la ecuación (1) y el problema de minimización (2) suele tener interpretación física (principios de minimización de energía, por ejemplo). Como aplicación del Teorema de Lax-Milgram se pueden recomendar a alumnos especialmente interesados en Ecuaciones Diferenciales las que hace Brezis a ecuaciones lineales elípticas en derivadas parciales (algún problema de contorno de los que aparecen en el capítulo 8 de [7, §V.3]). También puede encontrarse en el libro de Brezis una versión más fuerte del teorema anterior (Teorema de Stampacchia).

V.2 Bases ortonormales y espacios de Hilbert *"tipo"*

La descripción, salvo isomorfismos totales, de todos los espacios de Hilbert, es el objetivo central del presente tema. En particular se obtiene la versión abstracta del Teorema de Riesz-Fisher al probar la unicidad del espacio de Hilbert separable sobre $\mathbb{K}$. Hacemos un estudio previo de las familias sumables en espacios normados. Este estudio, cuyo principal resultado es la esencial equivalencia entre las nociones de familia sumable y serie incondicionalmente convergente, no es estrictamente imprescindible en este tema y tampoco en los que siguen, pero nos parece de interés en sí mismo y es indudable que la terminología de las familias sumables permite formalizar muy elegantemente algunos resultados, como por ejemplo el desarrollo de Fourier con respecto a una base ortonormal arbitraria, sin ir más lejos.

El concepto de familia sumable de vectores de un espacio normado es bastante intuitivo, por lo que no precisa demasiada motivación. Si bien evitamos la terminología de redes, la idea que subyace es clara, las sumas finitas se aproximan tanto como se quiera a un cierto vector cuando el conjunto de vectores que se suman es suficientemente grande. Conviene insistir en que el conjunto de índices puede no ser numerable y en que no se involucra ningún orden en dicho conjunto, aún cuando posea algún orden natural.

Definición V.2.15 . *Si Λ es un conjunto no vacío arbitrario, $\mathcal{F}(\Lambda)$ denotará el conjunto de las partes finitas de Λ. Si X es un espacio normado, se dice que una familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de vectores de X es* **sumable** *cuando existe un $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)$ tal que si $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ y $J_0 \subset J$, entonces*

$$\|\sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x\| < \varepsilon.$$

Es evidente que el vector x, si existe, es único, le llamamos **suma** *de la familia. Escribimos $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ para indicar simultáneamente que la* *familia* $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable y que* x *es su suma.*

Propiedades básicas del concepto que acabamos de introducir son la conmutatividad, carácter lineal de la suma y conservación por aplicaciones lineales continuas, todas ellas deducibles directamente de la definición.

La condición de Cauchy necesaria para la sumabilidad de una familia toma el siguiente aspecto:

Definición V.2.16. *Se dice que una familia* $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *de elementos de un espacio normado* X *verifica la* **condición de Cauchy** *si:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists J \in \mathcal{F}(\Lambda) : \ K \in \mathcal{F}(\Lambda), \ K \cap J = \emptyset \Rightarrow \| \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \| < \varepsilon .$$

La prueba del siguiente resultado es inmediata:

Proposición V.2.17 . *Sea* $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de vectores de un espacio normado. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:*

i) $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*

ii) $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *verifica la condición de Cauchy.*

iii) $\{\lambda \in \Lambda : \ x_\lambda \neq 0\}$ *es numerable.*

La condición iii) podría inducir a pensar que basta limitarse al estudio de familias numerables. Sin embargo, puede interesarnos considerar "todas" las familias sumables con un mismo conjunto de índices Λ no numerable. Por otra parte, aunque Λ sea numerable la noción de sumabilidad es una cómoda reformulación de la convergencia incondicional o conmutativa de una serie:

Teorema V.2.18. *Dada una familia* $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *de elementos de un espacio normado* X*, son equivalentes:*

i) $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*

ii) *El conjunto* $A = \{\lambda \in \Lambda : \ x_\lambda \neq 0\}$ *es numerable y, para cualquier biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to A$ *la serie* $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ *es convergente.*

Caso de que se cumplan i) *y* ii) *se tiene que* $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *para cualquier biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to A$.

Conviene resaltar que en la condición ii) del teorema anterior no se supone que todas las series de la forma $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ tengan la misma suma, sino que este hecho se obtiene como tesis. Aclarada la relación (esencialmente equivalencia) entre familias sumables y series incondicionalmente convergentes nos restringimos ya al caso completo para redondear la equivalencia entre sumabilidad y condición de Cauchy. Podemos evitar la complitud en términos de redes o bases de filtro simplemente aplicando el teorema anterior. Es obvio que si la familia $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ verifica la condición de Cauchy, igual le ocurre a cualquiera de las series $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ que aparecen en el teorema anterior, luego:

Corolario V.2.19. *Una familia de vectores de un espacio de Banach es sumable si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.*

Es obvio que toda subfamilia de una familia que verifique la condición de Cauchy la sigue verificando, luego en espacios de Banach, toda subfamilia de una familia sumable es sumable.

Definición V.2.20. *Se dice que la familia* $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *de elementos de un espacio normado es* **absolutamente sumable** *cuando la familia de números* $\{\|x_\lambda\| : \ \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*

Como consecuencia inmediata del corolario anterior obtenemos lo siguiente:

Corolario V.2.21. *Sea* X *un espacio de Banach,* $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de vectores de* X *y supongamos que existe* $\alpha \in \ell_1^\Lambda$ *tal que* $\|x_\lambda\| \leq |\alpha(\lambda)|$ *para* $\lambda \in \Lambda$. *Entonces la familia* $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable en* X *y se verifica que:*

$$\|\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|.$$

En particular, en un espacio de Banach, toda familia absolutamente sumable es sumable.

Cubiertos razonablemente los requisitos previos relativos a las familias sumables de vectores, volvemos a la teoría de los espacios de Hilbert, con el loable propósito de probar que todo espacio de Hilbert es totalmente isomorfo a uno de los llamados espacios de Hilbert *"tipo"*, esto es, a un espacio ℓ_2^Λ para conveniente conjunto Λ. Todo el desarrollo que sigue puede motivarse muy bien considerando la base natural del espacio ℓ_2^Λ.

Si Λ es un conjunto no vacío arbitrario y para cada $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \in \ell_2^\Lambda$ denota la función característica del conjunto $\{\lambda\}$, toda la estructura del espacio ℓ_2^Λ se reconstruye fácilmente a partir de la familia de vectores $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. En efecto, si $x \in \ell_2^\Lambda$ se tiene fácilmente

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda) e_\lambda \ ,$$

lo que nos da una forma muy concreta de aproximar cada $x \in \ell_2^\Lambda$ mediante elementos del subespacio vectorial generado por $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Finalmente conviene resaltar que

$$\|e_\lambda\| = 1, \quad (e_\lambda|e_\mu) = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu).$$

Aparece así de manera natural el siguiente concepto:

Definición V.2.22. *Un* **sistema ortonormal** *en un espacio prehilbertiano X es un subconjunto no vacío $E = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X, tal que $(x_\lambda|x_\mu) = 0$ para $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ y $\|x_\lambda\| = 1$ para $\lambda \in \Lambda$. Para cada $x \in X$, la familia de escalares $\{(x|x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es, por definición, la familia de los* **coeficientes de Fourier** *del vector x con respecto al sistema ortonormal E.*

El siguiente lema, no obstante la sencillez de su demostración, es fundamental para los resultados que siguen:

Lema V.2.23. *Sea $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano X.*

i) *Si para* $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ *denotamos* M_J *al subespacio de* X *engendrado por* $\{x_\lambda : \lambda \in J\}$ *y* P_J *a la proyección ortogonal de* X *sobre* M_J*, se tiene:*

$$P_J(x) = \sum_{\lambda \in J} (x|x_\lambda)x_\lambda \quad (x \in X).$$

En particular:

$$\|x - \sum_{\lambda \in J} (x|x_\lambda)x_\lambda\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\lambda \in J} |(x|x_\lambda)|^2 \quad (x \in X).$$

ii) *Para cada* $x \in X$*, la familia* $\{|(x|x_\lambda)|^2 : \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable y se verifica:*

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2 + [\mathrm{dist}(x, M)]^2 \quad (x \in X)$$

donde M *es el subespacio de* X *engendrado por* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$*. En particular, se verifica la* **desigualdad de Bessel**

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in X).$$

Teorema V.2.24 . *Sea* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano* X *y* M *el subespacio vectorial de* X *engendrado por* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2, \quad (x \in X).$

ii) M *es denso en* X.

iii) $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda)x_\lambda \quad (x \in X).$

iv) $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda)(x_\lambda|y) \quad (x, y \in X).$

Definición V.2.25. *Un sistema ortonormal* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *en un espacio prehilbertiano* X*, que verifique cualquiera de las afirmaciones del teorema anterior, recibe el nombre de* **base ortonormal** *de* X*. La igualdad* $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda)x_\lambda$ *recibe el nombre de* **desarrollo de Fourier** *del vector*

$x \in X$ con respecto a la base ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, mientras que la afirmación iv) del teorema anterior suele conocerse como **igualdad de Parseval**. *Recordemos que si Λ es un conjunto no vacío arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \in \ell_2^\Lambda$ es la función característica del conjunto $\{\lambda\}$, el conjunto $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de ℓ_2^Λ a la que suele denominarse* **base canónica** *de ℓ_2^Λ.*

Con respecto al objetivo que motivó la discusión anterior tenemos, claramente, el siguiente resultado:

Corolario V.2.26. *Si un espacio prehilbertiano X posee una base ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, entonces X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2^Λ.*

Veremos más adelante que un espacio prehilbertiano puede carecer de base ortonormal. Damos ahora dos condiciones suficientes para la existencia de base ortonormal. En primer lugar, para un espacio prehilbertiano separable puede construirse explícitamente una base ortonormal a partir de una base de Hamel numerable para un subespacio denso:

Lema V.2.27 .*(Método de Gram-Schmidt) Si $\{y_n\}$ es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio prehilbertiano X, existe un sistema ortonormal $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X tal que el subespacio engendrado por $\{x_k : 1 \leq k \leq n\}$ coincide con el engendrado por $\{y_k : 1 \leq k \leq n\}$, para todo natural n.*

Nótese que una construcción análoga a la anterior permite obtener, en el caso finito-dimensional, una base ortonormal a partir de cualquier base de Hamel. Enlazando los dos últimos resultados obtenemos:

Teorema V.2.28.

i) *Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio prehilbertiano de dimensión N.*

ii) *Un espacio prehilbertiano es separable si, y sólo si, posee una base ortonormal numerable.*

iii) *Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de* ℓ_2.

iv) ℓ_2 *es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert infinito-dimensional separable.*

Pasamos a la segunda condición suficiente para la existencia de base ortonormal. Es claro que toda base ortonormal es un sistema ortonormal maximal, ya que el desarrollo de Fourier nos hace ver que sólo el vector cero puede ser ortogonal a todos los elementos de una base ortonormal. Es obvio que la familia de todos los sistemas ortonormales de un espacio prehilbertiano está ordenada inductivamente por inclusión. Del Lema de Zorn deducimos:

Lema V.2.29 . *En un espacio prehilbertiano, todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.*

Es el momento de involucrar el Teorema de la proyección ortogonal que hasta ahora no se había usado. Si $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un sistema ortonormal maximal en un espacio de Hilbert H, y M es el subespacio de H engendrado por dicho sistema, la maximalidad nos dice que $M^\perp = \{0\}$, lo que nos permite concluir que M es denso en H. Obtenemos así la primera parte del siguiente resultado, que clasifica, salvo isomorfismos isométricos, todos los espacios de Hilbert.

Teorema V.2.30 .

i) *En un espacio de Hilbert, todo sistema ortonormal maximal es una base ortonormal.*

ii) *Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal.*

iii) *Si* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es una base ortonormal de un espacio de Hilbert* H*, entonces* H *es isométricamente isomorfo a* ℓ_2^Λ.

iv) *Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal, llamado* **dimensión hilbertiana** *del espacio.*

v) *Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana.*

Del teorema anterior se deduce nueva información sobre sistemas ortonormales arbitrarios, no necesariamente maximales, en un espacio de Hilbert, que merece ser destacada.

Corolario V.2.31 . *Sea H un espacio de Hilbert, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en H.*

i) *Si $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de escalares, la familia de vectores $\{\alpha_\lambda x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable si, y sólo si, lo es la familia de escalares $\{|\alpha_\lambda|^2 : \lambda \in \Lambda\}$.*

ii) *Si M es el subespacio cerrado de H engendrado por el conjunto $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ y P_M es la proyección ortogonal de H sobre M, se tiene*

$$P_M(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x|x_\lambda)x_\lambda \quad (x \in H).$$

El primer apartado del corolario anterior nos proporciona abundantes ejemplos de familias sumables en espacios de Hilbert que no son absolutamente sumables; $\{\frac{1}{n}e_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\{e_n\}$ es la base canónica de ℓ_2 es el ejemplo más sencillo. La comparación entre las nociones de base ortonormal y base de Hamel debe también comentarse. Es claro que si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita, toda base ortonormal de H es una base de Hamel y la dimensión algebraica de H coincide con su dimensión hilbertiana. Por el contrario, ninguna base ortonormal infinita puede ser una base de Hamel. Por supuesto, toda base ortonormal numerable es una base de Schauder.

Concluimos nuestro estudio de las bases ortonormales mostrando que la hipótesis de complitud y separabilidad son imprescindibles, en los resultados obtenidos:

Ejemplos.-

i) En un espacio prehilbertiano un sistema ortonormal maximal puede no ser una base ortonormal. *Sea* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *la base canónica de* ℓ_2 *y* $x \in \ell_2$ *la sucesión dada por* $x(n) = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Si* X *es el subespacio de* ℓ_2 *engendrado por* $\{x\} \cup \{e_n : n \geq 2\}$, *se comprueba fácilmente que* $\{e_n : n \geq 2\}$ *es un sistema ortonormal maximal en* X *y no es una base ortonormal.*

ii) Un espacio prehilbertiano sin base ortonormal. *Consideremos los espacios de Hilbert* ℓ_2 *y* $\ell_2^{\mathbb{R}}$ *y pongamos* $H = \ell_2 \times \ell_2^{\mathbb{R}}$ *que es claramente un espacio de Hilbert con el producto escalar obvio. Utilizando el hecho de que la dimensión algebraica de* ℓ_2 *es el cardinal de* $\mathbb{R}$, *podemos conseguir una base de Hamel de* ℓ_2 *de la forma:* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *donde* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es la base (ortonormal) canónica de* ℓ_2. *Sea por otra parte* $\{y_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *la base ortonormal canónica de* $\ell_2^{\mathbb{R}}$ *y* $T : \ell_2 \to \ell_2^{\mathbb{R}}$ *la aplicación lineal que verifica* $T(e_n) = 0$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $T(x_\lambda) = y_\lambda$ *para* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Finalmente sea* X *la gráfica de* T*:*

$$X = \{(x, T(x)) : x \in \ell_2\}.$$

Es fácil ver que X *es denso en* H. *Se sigue que toda base ortonormal de* X *es también una base ortonormal de* H, *luego* X *no puede tener una base ortonormal numerable. Sin embargo, todo sistema ortonormal en* X *es numerable.*

Consideramos ahora el caso particular más importante de los resultados abstractos tratados antes. Todo espacio de Hilbert separable H es isométricamente isomorfo a ℓ_2, pero con frecuencia es importante conocer la forma concreta de un tal isomorfismo, equivalentemente, conocer una base ortonormal del espacio de Hilbert H. Para el caso $H = L_2([-\pi, \pi])$, el sistema trigonométrico es sin duda la más importante base ortonormal de H y nos da la ocasión de presentar la conexión entre los espacios de Hilbert y las series de Fourier.

Definición V.2.32 . *Para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *consideremos la función* e_n

definida por:

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se comprueba inmediatamente que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert* $L_2([-\pi, \pi])$*, que recibe el nombre de* **sistema trigonométrico**. *Para* $f \in L_2([-\pi, \pi])$ *los coeficientes de Fourier de* f *vienen dados por:*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

El sistema trigonométrico en $L_2([-\pi, \pi])$ es un sistema ortonormal maximal:

Teorema V.2.33 . *El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert* $L_2([-\pi, \pi])$*. Por tanto:*

i) Igualdad de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \qquad (f, g \in L_2([-\pi, \pi])),$$

en particular,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad (f \in L_2([-\pi, \pi])).$$

ii) Desarrollo de Fourier: *Para* $f \in L_2([-\pi, \pi])$*, la serie de Fourier de* f *converge a* f *en* $L_2([-\pi, \pi])$*:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt}|^2 dt = 0.$$

iii) Teorema de Riesz-Fisher: *Para* $\{c_n\} \in \ell_2^{\mathbb{Z}}$ *existe una única función* $f \in L_2([-\pi, \pi])$ *tal que* $\hat{f}(n) = c_n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

En suma, la aplicación $f \to \hat{f}$*, definida por*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}, f \in L_2([-\pi, \pi]))$$

es un isomorfismo isométrico de $L_2([-\pi, \pi])$ *sobre* $\ell_2^{\mathbb{Z}}$.

Para probar el resultado anterior basta obtener la maximalidad del sistema trigonométrico en $L_2([-\pi, \pi])$. De las múltiples demostraciones que pueden hacerse de dicha maximalidad destacamos la que nos parece más directa y elemental, que aparece en el libro de Wilansky [57].

Concluimos este tema con una generalización, meramente formal, de algunos resultados anteriores, en términos de la siguiente noción abstracta:

Definición V.2.34 . *Sea $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de espacios prehilbertianos; consideremos el conjunto:*

$$X = \left\{ x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : \ \{\|x(\lambda)\|^2 : \ \lambda \in \Lambda\} \text{ es sumable} \right\}.$$

Se comprueba que X es un subespacio de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, para cualesquiera $x, y \in X$ la familia de escalares $\{(x(\lambda)|y(\lambda)) : \ \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y definiendo

$$(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x(\lambda)|y(\lambda)) \quad (x, y \in X)$$

se obtiene un producto escalar en X. El espacio prehilbertiano así obtenido recibe el nombre de **suma hilbertiana** *(o suma ortogonal) de la familia $\{X_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ y escribiremos $X = \perp_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.*

Proposición V.2.35 . *Sea $\{M_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H, dos a dos ortogonales, esto es $M_\lambda \subset M_\mu^\perp$ para $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$; notemos M al subespacio cerrado de H engendrado por $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.*

i) *Si $x_\lambda \in M_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y la familia $\{\|x_\lambda\|^2 : \ \lambda \in \Lambda\}$ es sumable, entonces la familia $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ también es sumable.*

ii) *Recíprocamente, cada vector $x \in M$ se expresa de manera única en la forma $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ con $x_\lambda \in M_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, verificándose que $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|^2$.*

En resumen M es (isométricamente isomorfo a) la suma hilbertiana $\perp_{\lambda\in\Lambda}$ M_λ. Escribimos también en este caso

$$M = \perp_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda.$$

La proposición anterior, mera extensión formal de resultados anteriores, pone de manifiesto, en el caso de que Λ sea finito, una consecuencia del Teorema de la proyección ortogonal que hasta ahora no habíamos comentado.

Corolario V.2.36. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \subset N^\perp$. Entonces $M + N$ es cerrado.*

La hipótesis $M \subset N^\perp$ no puede suprimirse:

Ejemplo.-*Dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert cuya suma no es cerrada. Se considera el operador $T \in L(\ell_2)$ dado por:*

$$T(x)(n) = \frac{1}{n}x(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

y notemos que la imagen de T es densa en ℓ_2 (contiene a la base canónica) pero T no es sobreyectivo (la sucesión $\{1/n\}$ no está en la imagen de T). Sea entonces H la suma hilbertiana de ℓ_2 consigo mismo, M la gráfica de T y $N = \{(x,0) : \ x \in \ell_2\}$. Es claro que M y N son subespacios cerrados y que $M + N = \{(x, T(y)) : \ x, y \in \ell_2\}$. Puesto que $T(\ell_2)$ no es cerrado, tampoco lo es $M + N$.

V.3 Operadores en espacios de Hilbert

Concluimos este capítulo del proyecto docente con dos temas dedicados a los fundamentos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Puede decirse que la teoría de operadores en espacios de Hilbert significó el nacimiento del Análisis Funcional y es la principal responsable de su posterior desarrollo. Este tema tiene un carácter descriptivo y preparatorio para el siguiente y recoge una serie de resultados básicos sobre operadores en espacios de Hilbert, destacando la existencia de adjunto, en la que se refleja la gran perfección geómetrica de los espacios de Hilbert, principal responsable de que los operadores en tales espacios admitan una teoría general elegante y bien desarrollada, que contrasta notoriamente con la mucho más oscura teoría de operadores en espacios de Banach generales. Aprovechamos para presentar algunos ejemplos clásicos de operadores asociados a ecuaciones integrales, cuyo estudio es anterior al de los espacios de Hilbert y motivó de hecho la consideración de tales espacios.

La existencia de adjunto de un operador lineal continuo entre espacios de Hilbert se deduce directamente de la representación de las formas sexquilineales continuas.

Teorema V.3.37. *Sean X e Y espacios de Hilbert y $T \in L(X,Y)$.*

i) *Existe una única aplicación $T^* : Y \to X$ verificando que:*

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad (x \in X, y \in Y).$$

ii) $T^* \in L(Y,X)$ *y* $T^{**} = T$.

iii) $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

iv) *Para $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, se tiene*

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*, \ (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*.$$

v) *Si Z es otro espacio de Hilbert y $S \in L(Y,Z)$, se tiene*

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

Definición V.3.38. *En lo sucesivo usaremos el término* **operador** *para referirnos a una aplicación lineal continua entre dos espacios de Hilbert. Si $T \in L(X,Y)$ es un operador, T^* recibe el nombre de operador* **adjunto** *de T. Como ya se ha hecho en el enunciado anterior, cuando ello* *no cause confusión, escribiremos* Tx *en lugar de* $T(x)$ *y notaremos por yuxtaposición* ST*, a la composición de dos operadores* S *y* T*, siempre que tenga sentido. Conviene resaltar la rica estructura que, según el teorema anterior, tiene el espacio vectorial* $L(H)$ *de los operadores de un espacio de Hilbert* H *en sí mismo, constituida por tres elementos: la norma de operadores, que convierte a* $L(H)$ *en un espacio de Banach, el producto (composición) que lo convierte en un álgebra asociativa con unidad* I *(el operador identidad en* H*,* I_H *si hay lugar a confusión) (hasta aquí nada nuevo) y la aplicación* $T \to T^*$ *que es una biyección conjugado-lineal que coincide con su inversa, esto es, una* **involución**. *Tenemos además una buena avenencia entre los tres tipos de estructura, que se concreta en las siguientes afirmaciones. En primer lugar, la norma es* **submultiplicativa**

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \quad (S, T \in L(H)),$$

equivalentemente, el producto es una aplicación bilineal continua de norma 1 (descartado el caso trivial $H = \{0\}$*), y* $\|I\| = 1$*; estamos por tanto ante un ejemplo de lo que más adelante se llamará "álgebra de Banach unital". En segundo lugar, la involución es* **multiplicativa**

$$(ST)^* = T^*S^* \quad (S, T \in L(H)),$$

en particular $I^* = I$*. Finalmente, norma e involución están ligadas por la crucial propiedad*

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \quad (T \in L(H))$$

denominada a veces "propiedad estelar de la norma" y también "axioma de Gelfand-Naimark" en honor de quienes pusieron de manifiesto su importancia.

Las consideraciones hechas en la definición anterior sólo tienen la intención de poner de manifiesto la riqueza estructural de $L(H)$, de la que depende en el fondo la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Sin ninguna dificultad obtenemos las siguientes relaciones entre las propiedades de un operador y las de su adjunto. Aprovechamos para caracterizar "algebraicamente" ciertas propiedades de un operador.

Proposición V.3.39. *Sean X e Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.*

i) $\operatorname{Ker} T = T^*(Y)^\perp$. *Como consecuencia, T es inyectivo sí, y sólo si, T^* tiene imagen densa.*

ii) *T es un isomorfismo si, y sólo si, lo es T^*, en cuyo caso se tiene $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

iii) *T es isométrico si, y sólo si, $T^*T = I_X$.*

iv) *T es un isomorfismo isométrico si, y sólo si,*

$$T^*T = I_X \qquad TT^* = I_Y$$

esto es, T es biyectivo con $T^* = T^{-1}$.

Consideremos ahora tres tipos particulares de operadores. El primero viene motivado por el último apartado de la proposición anterior. La importancia de los otros dos se pondrá de manifiesto, sobre todo, en el siguiente tema.

Definición V.3.40. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador; se dice que T es*

unitario, *si $T^*T = TT^* = I$;*

autoadjunto, *si $T^* = T$;*

normal, *si $T^*T = TT^*$.*

Notemos que un operador isométrico es unitario si, y sólo si, es normal.

Proposición V.3.41. *Sea H un espacio de Hilbert y $P \in L(H)$ tal que $P^2 = P$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *P es autoadjunto.*

ii) *P es normal.*

iii) *P es la proyección ortogonal sobre $P(H)$.*

Volvamos a la correspondencia biunívoca entre operadores T en un espacio de Hilbert H y formas sexquilineales continuas φ_T en $H \times H$, dada por

$$\varphi_T(x, y) = (Tx|y) = (x|T^*y) \quad (x, y \in H).$$

Cada operador T da lugar por tanto a una forma cuadrática Q_T definida por

$$Q_T(x) = (Tx|x) = (x|T^*x) \quad (x \in H).$$

Observemos que T es autoadjunto si, y sólo si, φ_T es hermítica, en cuyo caso, T queda determinado por Q_T. La siguiente propiedad importante de los operadores autoadjuntos procede de esa observación:

Proposición V.3.42. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$.*

i) *Si $T = T^*$, entonces*

$$\|T\| = \sup \{|(Tx|x)| : \ x \in H, \ \|x\| = 1\}.$$

En particular, si $T = T^*$ y $(Tx|x) = 0$ para todo $x \in H$, entonces $T = 0$.

ii) *T es normal si, y sólo si, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in H$.*

En el caso complejo disponemos de ventajas adicionales, toda forma sexquilineal (por tanto todo operador) queda determinada por la forma cuadrática asociada y el operador es autoadjunto si, y sólo si, la correspondiente forma cuadrática toma sólamente valores reales. El resto de las afirmaciones del siguiente enunciado se comprueba inmediatamente:

Proposición V.3.43. *Sea T un operador en un espacio de Hilbert* **complejo** *H.*

i) *Si $(Tx|x) = 0$ para todo $x \in H$, entonces $T = 0$.*

ii) *T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx|x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.*

iii) *T se expresa de manera única en la forma $T = A + iB$ donde $A, B \in L(H)$ son operadores autoadjuntos; T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.*

Es el momento de presentar algunos ejemplos importantes de operadores en espacios de Hilbert.

Ejemplos.-

i) Matrices: *Extendiendo de forma natural la representación matricial de las aplicaciones lineales entre espacios finito-dimensionales, fijadas sendas bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$ en los espacios de Hilbert X e Y respectivamente, a cada operador $A \in L(X, Y)$ podemos asociar una "matriz", más propiamente una función $a : I \times J \to \mathbb{K}$, dada por*

$$a(i,j) = (Ax_i|y_j) \quad (i \in I, j \in J).$$

Usando los desarrollos de Fourier, la función a determina al operador A por

$$Ax = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} (x|x_i) a(i,j) \right) y_j \quad (x \in X)$$

y el operador adjunto A^* viene determinado por la función $a^* : J \times I \to \mathbb{K}$ dada por

$$a^*(j,i) = \overline{a(i,j)} \quad (j \in J, i \in I).$$

Semejante representación matricial tiene muy poco valor a menos que la función a sea de un tipo muy especial. Por ejemplo no es fácil saber qué funciones de $I \times J$ en $\mathbb{K}$ representan a un operador y, salvo casos sumamente elementales, no se sabe calcular siquiera la norma del operador A en términos de la matriz a. La posibilidad de elegir las bases ortonormales de forma que a sea especialmente sencilla es más interesante. A título de ejemplo, en el caso $X = Y = H$, es claro que un operador $A \in L(H)$ es unitario si, y sólo *si,* $\{Tx_i : \ i \in I\}$ *es una base ortonormal de* H*, lo que equivale a la posibilidad de elegir la base* $\{y_i : \ i \in I\}$ *de forma que a sea la "matriz unidad", es decir, la función característica de la diagonal de* $I \times I$*. Dicho de otra forma, la función a asociada a un operador unitario* A *puede considerarse como la matriz de transformación de coordenadas en un cambio de base ortonormal.*

ii) Operadores de multiplicación*: Consideremos el espacio de Hilbert* $H = L_2[0,1]$*. Cada* $\phi \in L_\infty(\mu)$ *da lugar a un operador* $M_\phi \in L(H)$ *mediante:*

$$M_\phi(f) = \phi f \quad (f \in L_2[0,1]).$$

M_ϕ *es un operador en* $L_2[0,1]$ *y* $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$*. Se dice que* M_ϕ *es el operador de multiplicación por* ϕ*. Se tiene de hecho* $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$*.*

Así pues, $\phi \to M_\phi$ *es una inyección lineal isométrica de* $L_\infty[0,1]$ *en* $L(H)$ *con* $H = L_2[0,1]$*. Nótese que* $L_\infty[0,1]$ *es un álgebra con el producto definido puntualmente y que* $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$ *para* $\phi, \psi \in L_\infty[0,1]$*, esto es, tenemos un monomorfismo de álgebras. Más aún,* $L_\infty[0,1]$*, tiene una involución natural, dada por*

$$\phi^*(w) = \overline{\phi(w)} \quad (w \in [0,1], \phi \in L_\infty[0,1])$$

y es claro que $M_{\phi^*} = (M_\phi)^*$*. Así, todo operador de multiplicación es un operador normal;* M_ϕ *es autoadjunto si, y sólo si,* $\phi(w) \in \mathbb{R}$ *para casi todo* $w \in [0,1]$*;* M_ϕ *es unitario si, y sólo si,* $|\phi(w)| = 1$ *para casi todo* $w \in [0,1]$*.*

El caso $H = \ell_2$ *merece destacarse, si* $\phi = \{\alpha_n\}$ *es una sucesión acotada de escalares, el operador de multiplicación por* ϕ *viene dado por*

$$[M_\phi x](n) = \alpha_n x(n) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \ell_2)$$

y en la base canónica $\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *de* ℓ_2 *tiene una representación "diagonal", ya que*

$$M_\phi e_n = \alpha_n e_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Así pues ℓ_∞ es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $L(\ell_2)$, en particular, $L(\ell_2)$ no es separable. Nótese también que si un operador $T \in L(\ell_2)$ verifica

$$Te_n = \lambda_n e_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

la sucesión $\{\lambda_n\}$ ha de estar acotada.

También en el caso $H = \ell_2^\Lambda$ donde Λ es un conjunto no vacío arbitrario volvemos a tener una perfecta identificación de ℓ_∞^Λ con un subespacio de $L(\ell_2^\Lambda)$ (operadores diagonales) siendo ciertas todas las afirmaciones hechas en el caso de $L_2[0,1]$.

iii) Operadores de desplazamiento*: Sea $H = \ell_2^{\mathbb{Z}}$ y consideremos el operador $S \in L(H)$ dado por*

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_2^{\mathbb{Z}}).$$

Claramente S es un operador unitario. Veámoslo como un operador T en $L_2([-\pi,\pi])$, es decir,

$$\widehat{Tf}(n) = \hat{f}(n+1) \qquad (n \in \mathbb{Z}, f \in L_2([-\pi,\pi]).$$

Si para $f \in L_2([-\pi,\pi])$ ponemos $g(t) = f(t)e^{-it}$ tenemos claramente $\hat{g}(n) = \hat{f}(n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$, luego $Tf = g$. En suma T es el operador de multiplicación por la función $t \to e^{-it}$.

La situación es diferente si tomamos, formalmente, el mismo operador, pero ahora en ℓ_2, es decir, $S \in L(\ell_2)$,

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \ell_2).$$

Ahora, para $x \in \ell_2$, se comprueba fácilmente que

$$[S^*x](n) = x(n-1) \text{ si } n \geq 2,\ [S^*x](1) = 0.$$

S^* recibe el nombre de **operador de desplazamiento unilateral***. Nótese que S^* es isométrico, equivalentemente $SS^* = I$, pero no es sobreyectivo (no es normal), S^*S es la proyección ortogonal sobre el subespacio $\{x \in \ell_2 : \ x(1) = 0\} = \{e_1\}^\perp$.*

iv) Operadores integrales: *Sea* $K \in L_2([0,1] \times [0,1])$. *El* **operador integral de núcleo** K *es, por definición, el operador* $T_K \in L(L_2[0,1])$, *definido por:*

$$[T_K(f)](x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy \quad (x \in [0,1], f \in L_2[0,1]).$$

El Teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder nos dicen que la función $y \mapsto K(x,y)f(y)$ *pertenece a* $L_1[0,1]$ *y que*

$$|\,[T_K f]\,(x)| \leq \|f\|_2 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy\right)^{1/2}$$

para casi todo $x \in [0,1]$. *Una nueva aplicación del Teorema de Fubini y obtenemos que* $T_K f \in L_2[0,1]$ *para* $f \in L_2[0,1]$ *y que* $\|T_K f\|_2 \leq \|K\|_2$.

El operador adjunto T_K^* *es el operador integral* T_{K^*} *cuyo núcleo viene dado por*

$$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)} \quad (x,y \in [0,1]).$$

Un caso particular importante se presenta cuando K *es la función característica del conjunto* $\{(x,y) : \; 0 \leq y < x \leq 1\}$. *El correspondiente operador integral es el* **operador de Volterra**, V, *dado por:*

$$[Vf](x) = \int_0^x f(y)dy \quad (x \in [0,1], f \in L_2[0,1]).$$

Se calcula fácilmente el operador adjunto V^* *y se comprueba igual de fácilmente que* V *no es normal.*

Razonablemente cumplida la tarea ejemplificadora, planteémonos, de forma mucho más ingenua y como motivación para los operadores compactos, protagonistas en lo que sigue, qué operadores podemos construir abstractamente en un espacio de Hilbert del que no tenemos información alguna. Sólo disponemos del producto escalar, utilicémoslo:

Definición V.3.44. *Dados dos vectores* u, v *de un espacio de Hilbert* H *definimos* $u \otimes v : H \to H$ *por:*

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad (x \in H).$$

Si $u \neq 0, v \neq 0$ *la imagen de* $u \otimes v$ *es el subespacio unidimensional de* H *engendrado por* v. *En general llamaremos* **rango** *de un operador a la dimensión de su imagen. Notaremos* $F(H)$ *al subconjunto de* $L(H)$ *formado por los* **operadores de rango finito**.

Reunimos en el siguiente enunciado, cuya demostración no ofrece dificultad alguna, una serie de hechos básicos sobre operadores de rango finito:

Proposición V.3.45 . *Sea* H *un espacio de Hilbert.*

i) *Para* $u, v \in H$ *se tiene* $u \otimes v \in F(H)$,

$$\|u \otimes v\| = \|u\|\|v\|, \qquad [u \otimes v]^* = v \otimes u.$$

ii) $F(H)$ *es el subespacio de* $L(H)$ *engendrado por el conjunto*

$$\{u \otimes v : \ u, v \in H\},$$

esto es, cada operador de rango finito T *puede expresarse en la forma*

$$T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

con $n \in \mathbb{N}$, $u_k, v_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Además* $F(H)$ *es un ideal bilátero del álgebra* $L(H)$ *y* $T^* \in F(H)$ *para* $T \in F(H)$.

Así pues, los operadores $u \otimes v$ definidos elementalmente a partir del producto escalar generan linealmente el espacio $F(H)$ de los operadores de rango finito, subespacio que es estable por las demás operaciones algebraicas de $L(H)$, producto e involución. Si H es finito dimensional es claro que $F(H) = L(H)$. En otro caso, $F(H)$ nunca es cerrado.

Nuestro objetivo ahora es caracterizar los operadores que pertenecen al cierre de $F(H)$. Es claro que si $T \in F(H)$ y B_H es, como siempre, la bola unidad de H, $T(B_H)$ es un conjunto acotado y está contenido en el espacio finito-dimensional $T(H)$, luego es relativamente compacto. Motivamos así el siguiente concepto:

Definición V.3.46. *Sea H un espacio de Hilbert. Un* **operador compacto** *en H es, por definición, una aplicación lineal $T : H \to H$ tal que la imagen por T de la bola unidad de H es un subconjunto relativamente compacto de H. Nótese que en particular $T \in L(H)$, ya que $T(B_H)$ es un conjunto acotado. Notaremos por $K(H)$ al subconjunto de $L(H)$ formado por los operadores compactos. Notemos que $T \in K(H)$ si, y sólo si, $T(A)$ es relativamente compacto para cada subconjunto acotado A de H, equivalentemente, para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en H, la sucesión $\{Tx_n\}$ admite una parcial convergente.*

Teorema V.3.47. *Sea H un espacio de Hilbert.*

i) *$K(H)$ es un ideal bilátero cerrado de $L(H)$ y $F(H) \subset K(H)$.*

ii) *Si $T \in K(H)$, $\overline{T(H)}$ es separable; si $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(H)}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es la proyección ortonormal de H sobre el subespacio engendrado por $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ entonces $\{P_nT\}$ converge a T en $L(H)$. Como consecuencia, $K(H) = \overline{F(H)}$.*

iii) *Dado $T \in L(H)$ se tiene $T \in K(H)$ si y sólo si $T^* \in K(H)$.*

Completamos el tema con algunos ejemplos de operadores compactos y no compactos.

Ejemplos.-

i) *Si $\{e_n\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert separable H y $T \in K(H)$, entonces $\{Te_n\}$ converge a cero. En particular ningún operador de multiplicación no nulo en $L_2([-\pi, \pi])$ es compacto.*

La situación en ℓ_2 es más interesante; si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada y T es el operador de multiplicación dado por

$$[Tx](n) = \alpha_n x(n) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \ell_2),$$

es claro que $T \in K(H)$ siempre que $\{\alpha_n\} \to 0$. Recíprocamente, por lo dicho antes, si $T \in K(H)$ se tendrá $\{Te_n\} \to 0$, luego $\{\alpha_n\} \to 0$. Así pues los operadores de multiplicación compactos en ℓ_2 se corresponden con sucesiones convergentes a cero al igual que los operadores de multiplicación de rango finito se corresponden con las sucesiones casi-nulas.

ii) *Todo operador integral del tipo considerado en los ejemplos anteriores es compacto. Ello se debe a las dos observaciones siguientes, de fácil comprobación:*

En primer lugar, si $\{e_i : i \in I\}$ es una base ortonormal en $L_2[0,1]$, definiendo

$$\phi_{ij}(w) = e_i(w)\overline{e_j(w)} \quad (w \in [0,1], i, j \in I)$$

se tiene que $\{\phi_{ij} : i, j \in I\}$ es una base ortonormal en el espacio $L_2([0,1] \times [0,1])$.

En segundo lugar, es casi obvio que para $i, j \in I$ el operador integral de núcleo ϕ_{ij} es de rango 1. Se considera entonces la aplicación $K \mapsto T_K$ de $L_2([0,1] \times [0,1])$ en $L(L_2[0,1])$ que a cada núcleo K asocia el operador integral T_K. Tal aplicación es lineal y continua; puesto que sus valores en un subespacio denso de $L_2([0,1] \times [0,1])$ (el engendrado por $\{\phi_{ij} : i, j \in I\}$) son operadores de rango finito, deducimos que $T_K \in \overline{F(H)} = K(H)$ para $K \in L_2([0,1] \otimes [0,1])$, como se quería. En particular el operador de Volterra es compacto. Conviene decir que en el caso de los operadores integrales todo se podría haber hecho en el espacio $L_2(\mu)$, como siempre dependiendo de los conocimientos de la teoría de la medida.

V.4 El teorema espectral.

Como resultado básico en la teoría espectral de operadores obtenemos en este tema el que suele denominarse "Teorema espectral" para un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo, usando técnicas completamente elementales. A tal fin, nos parece conveniente destacar las tres versiones equivalentes que el Teorema espectral puede adoptar. La primera consiste en descomponer el espacio ambiente en suma ortogonal de subespacios propios, en cada uno de los cuales el operador actúa como un múltiplo de la identidad; se conoce como resolución o descomposición espectral de un operador compacto normal y de ella se deduce claramente la posibilidad de "diagonalizar" un tal operador, esto es, de encontrar una base ortonormal del espacio formada por vectores propios para el operador. Por último, como tercera versión del teorema, menos importante en el presente contexto, pero que será la principal protagonista en ambientes más generales, obtenemos el cálculo funcional acotado en un operador compacto normal y presentamos algunas de sus aplicaciones. Como otra consecuencia importante del Teorema espectral se consigue la clasificación por equivalencia unitaria de los operadores compactos normales.

Como ya se comentó en el tema anterior, si $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, cada operador $T \in L(H)$ queda determinado por la función ("matriz") $a_T : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{K}$, definida por

$$a_T(\lambda, \mu) = (Te_\mu | e_\lambda) \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda).$$

Concretamente se tiene

$$Tx = \sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda} a_T(\lambda, \mu)(x|e_\mu)e_\lambda \qquad (x \in H) \tag{1}$$

expresión que se comprueba fácilmente usando los desarrollos de Fourier y propiedades conocidas de las familias sumables. Si se quiere resaltar el aspecto matricial de la representación anterior, basta pensar que (1) es equivalente a

$$(Tx|e_\lambda) = \sum_{\mu\in\Lambda} a_T(\lambda, \mu)(x|e_\mu) \quad (\lambda \in \Lambda, x \in H).$$

Viendo cada elemento $x \in H$ como el vector columna formado por sus coordenadas (coeficientes de Fourier) la expresión anterior nos da el "vector" Tx como "producto" de la "matriz" a_T por el "vector" x.

Como también se ha comentado ya, a pesar de que la función a_T es un objeto matemático más sencillo que el operador $T \in L(H)$, la anterior representación, incluso en el caso finito dimensional, tiene escaso valor, a menos que la matriz a_T tenga una forma muy sencilla. Puede decirse que el primer objetivo de la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert consiste en encontrar condiciones suficientes, y a ser posible necesarias, sobre un operador $T \in L(H)$, para que pueda elegirse la base ortonormal $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de forma que la matriz a_T tenga alguna forma sencilla.

A semejanza del caso finito-dimensional podemos plantearnos la posibilidad de que a_T sea una matriz diagonal, esto es

$$a_T(\lambda, \lambda) = \alpha_\lambda, \; a_T(\lambda, \mu) = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu) \tag{2}$$

donde $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una cierta familia de escalares, con lo que la representación (1) del operador T tomaría la forma sencilla

$$Tx = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda (x|e_\lambda) e_\lambda \qquad (x \in H) \tag{3}$$

que muestra a T como un operador de multiplicación en ℓ_2^Λ. Si tal cosa se puede conseguir, se ha de tener obligatoriamente, como consecuencia de (3), que

$$Te_\lambda = \alpha_\lambda e_\lambda \qquad (\lambda \in \Lambda). \tag{4}$$

Recíprocamente, si se verifica (4), la definición de la matriz a_T nos dice que también se verifica (2) y hemos conseguido "diagonalizar" el operador T. Quedan así motivados los siguientes conceptos:

Definición V.4.48. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador; se dice que $\alpha \in \mathbb{K}$ es un* **autovalor** *de T si existe un vector $x \in H$, con $\|x\| = 1$, tal que $Tx = \alpha x$, esto es, si*

$$\operatorname{Ker}(T - \alpha I) \neq \{0\},$$

en tal caso decimos también que $\ker\,(T - \alpha I)$ *es el* **subespacio propio** *asociado al autovalor α y sus elementos reciben el nombre de* **vectores**

propios *de T, asociados al autovalor α. Notaremos $\sigma_p(T)$ al conjunto de los autovalores de T. Se dice que el operador T es* **diagonalizable** *si existe una base ortonormal de H formada por vectores propios de T, equivalentemente, si existe un sistema ortonormal $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ en H y una familia $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de escalares tal que*

$$Tx = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda (x|e_\lambda) e_\lambda \quad (x \in H).$$

Es obvio que todo operador diagonalizable es normal. El primero de los siguientes ejemplos muestra hasta qué punto un operador (incluso compacto) no normal puede estar lejos de ser diagonalizable; el segundo pone de manifiesto la existencia de operadores normales sin autovalores. La comprobación de las afirmaciones que se hacen es un sencillo ejercicio:

Ejemplos.-

i) *El operador de Volterra carece de autovalores.*

ii) *El operador de desplazamiento $S \in L(\ell_2^{\mathbb{Z}})$, dado por*

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_2^{\mathbb{Z}})$$

es unitario, en particular normal y carece de autovalores. $S + S^*$ es autoadjunto y también carece de autovalores.

Así pues, encontrar condiciones suficientes para que un operador posea autovalores es una cuestión no trivial. Para operadores compactos y autoadjuntos la situación es particularmente agradable:

Lema V.4.49 . *Sea H un espacio de Hilbert y sea $S \in L(H)$ un operador compacto autoadjunto. Entonces $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\alpha \in \sigma_p(S)$ tal que $|\alpha| = \|S\|$.*

Incluso en el caso finito-dimensional, un operador normal puede carecer de autovalores. Sin embargo, en el caso complejo, el lema anterior puede extenderse al caso de un operador compacto normal, y éste será el punto de ruptura para la obtención de la descomposición espectral de un tal operador.

Lema V.4.50 . *Si T es un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo H, entonces $\sigma_p(T) \neq \emptyset$. Además, se tiene* $\mathrm{Ker}(T-\lambda I) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} I)$ *para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y, en particular*

$$\sigma_p(T^*) = \{\overline{\lambda} : \ \lambda \in \sigma_p(T)\}.$$

Proposición V.4.51 . *Sea T un operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ pongamos*

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda I).$$

i) *Existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$.*

ii) *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, E_λ tiene dimensión finita.*

iii) *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \lambda \neq \mu$, se tiene $E_\lambda \subset E_\mu^\perp$. Equivalentemente,*

$$P_\lambda P_\mu = P_\mu P_\lambda = 0$$

donde P_λ y P_μ son las proyecciones ortogonales de H sobre E_λ y E_μ respectivamente.

iv) *Para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{\lambda \in \sigma_p(T) : \ |\lambda| \geq \varepsilon\}$ es finito. Como consecuencia $\sigma_p(T)$ es numerable y el cero es su único posible punto de acumulación.*

El siguiente resultado colma totalmente nuestras aspiraciones acerca de un operador compacto normal:

Teorema V.4.52 .*(Resolución espectral de un operador compacto normal) Sea T un operador compacto normal, en un espacio de Hilbert complejo H, sea $\Lambda = \sigma_p(T)$ el conjunto de autovalores de T y, para $\lambda \in \Lambda$, sea P_λ la proyección ortogonal de H sobre el subespacio propio* $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ *asociado al autovalor λ. Entonces la familia $\{\lambda P_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ es sumable en el espacio de Banach $L(H)$ y se verifica que:*

$$T = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda \qquad (*)$$

Además, para $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, P_λ tiene rango finito y para $\lambda, \mu \in \Lambda$, con $\lambda \neq \mu$, se tiene $P_\lambda P_\mu = P_\mu P_\lambda = 0$.

Nótese que, recíprocamente, todo operador de la forma $(*)$ con las condiciones indicadas al final del enunciado anterior, es un operador compacto normal. Además, la forma que ha de tener el conjunto Λ queda claramente de manifiesto en la proposición anterior: Λ puede ser un conjunto finito o el conjunto de los términos de una sucesión convergente a cero, incluyendo o no al cero. Todas las posibilidades son fácilmente ejemplificables en cualquier espacio de Hilbert infinito-dimensional. En la mayoría de los textos consultados la expresión $(*)$ aparece en la forma

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{\lambda_n} \tag{$**$}$$

que se explica por los comentarios anteriores y la "sucesión" $\{\lambda_n\}$ se ordena de forma que $\{|\lambda_n|\}$ sea decreciente.

Consecuencia inmediata de la resolución espectral es:

Corolario V.4.53 .*(Diagonalización de un operador compacto normal) Si T es un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo H, existe un sistema ortonormal numerable $\{e_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\}$ en H y un conjunto de escalares $\{\alpha_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ tales que*

$$T = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma e_\gamma \otimes e_\gamma$$

siendo la familia del segundo miembro sumable en el espacio de Banach $L(H)$. En particular

$$Tx = \sum \alpha_\gamma (x|e_\gamma) e_\gamma \quad (x \in H)$$

y T es diagonalizable. Así pues, un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable si, y sólo si, es normal.

Aunque conseguir la forma diagonal del operador dada por el corolario anterior se había propuesto como objetivo en este tema por su claro e intuitivo contenido, la descomposición dada por la resolución espectral es preferible, ya que es claramente única, está canónicamente asociada al operador, mientras la diagonalización introduce un cierto grado de arbitrariedad en la elección de una base ortonormal para cada subespacio propio. Dedicamos el resto de este tema a obtener algunas aplicaciones importantes de dicha resolución espectral.

Para evitar repeticiones fijamos la siguiente nomenclatura:

Notacion.-*En lo sucesivo H será un espacio de Hilbert complejo, T un operador compacto normal en H y pondremos*

$$\Lambda = \sigma_p(T);$$

para $\lambda \in \Lambda$, escribiremos $E_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ y P_λ será la proyección ortogonal de H sobre E_λ.

La siguiente observación es importante en lo que sigue:

Corolario V.4.54 . *El espacio H es la suma hilbertiana de la familia $\{E_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$.*

La utilidad de la descomposición en suma ortogonal obtenida en el corolario anterior se reflejará en la posibilidad de definir operadores en H cuyo comportamiento en cada subespacio E_λ se puede prefijar con libertad casi total. Ello es caso particular del siguiente resultado, extensión natural de la definición de los operadores de multiplicación en ℓ_2.

Proposición V.4.55 . *Supongamos que dos espacios de Hilbert X e Y están descompuestos en sendas sumas hilbertianas de subespacios, de la forma $X = \perp_{i\in I} X_i$, $Y = \perp_{i\in I} Y_i$. Para cada $i \in I$, sea $T_i \in L(X_i, Y_i)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\exists M > 0 : \ \|T_i\| \le M \quad \forall i \in I.$

ii) *Existe un (único) operador $T \in L(X, Y)$ tal que $Tx = T_i(x)$ para todo $x \in X_i$ y todo $i \in I$. Concretamente se tiene*

$$Tx = \sum_{i\in I} T_i P_i x \quad (x \in X)$$

donde, para cada $i \in I$, P_i es la proyección ortogonal de X sobre X_i.

Volviendo a la notación introducida, la resolución espectral del operador compacto normal $T \in L(H)$ puede ahora visualizarse de la siguiente forma. Teniendo en cuenta que

$$H = \perp_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$$

el Teorema de resolución espectral implica que T es el único operador en H que verifica

$$Tx = \lambda x \quad \forall x \in E_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

De manera más general, cabe pensar en los operadores (ya no necesariamente compactos) cuya restricción a cada subespacio E_λ es un múltiplo de la identidad. Tales operadores forman una subálgebra de $L(H)$ que veremos puede identificarse, a todos los efectos (norma, producto e involución), con el álgebra ℓ_∞^Λ, cuyo producto e involución se definen de manera obvia.

Definición V.4.56 . *Para cada función acotada $\phi \in \ell_\infty^\Lambda$, denotaremos por $\phi[T]$ al único operador en H que verifica*

$$\phi[T](x) = \phi(\lambda)x \qquad (x \in E_\lambda,\ \lambda \in \Lambda),$$

equivalentemente,

$$\phi[T](x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi(\lambda) P_\lambda(x) \quad (x \in H).$$

La aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ recibe el nombre de **cálculo funcional acotado** *en el operador T.*

Teorema V.4.57 .

i) *La aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ de ℓ_∞^Λ en $L(H)$ es lineal e isométrica, es un homomorfismo de álgebras y verifica que $\phi[T]^* = \overline{\phi}(T)$, donde $\overline{\phi}(\lambda) = \overline{\phi(\lambda)}$ para $\lambda \in \Lambda$, $\phi \in \ell_\infty^\Lambda$. Además $I = \phi_0[T]$, $T = \phi_1[T]$ donde $\phi_0(\lambda) = 1$ y $\phi_1(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in \Lambda$.*

ii) *Para un operador $S \in L(H)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\exists \phi \in \ell_\infty^\Lambda : \ \phi[T] = S$.

b) *Todo operador que conmute con T conmuta con S, esto es,* $A \in L(H),\ TA = AT \Rightarrow SA = AS$.

Enunciamos a continuación algunas aplicaciones típicas del cálculo funcional.

Definición V.4.58. *Se dice que un operador A en el espacio de Hilbert complejo H es* **positivo** *si verifica que $(Ax|x)$ es un número real no negativo para todo $x \in H$. En particular, A es autoadjunto.*

Corolario V.4.59. *Sea T un operador compacto normal en el espacio de Hilbert complejo H.*

i) *T es positivo si, y sólo si, todos los autovalores de T son números reales no negativos.*

ii) *T es autoadjunto si, y sólo si, todos los autovalores de T son números reales. En tal caso T se expresa, de manera única, en la forma $T = A - B$ donde A y B son operadores compactos positivos y $AB = BA = 0$.*

iii) *Si T es positivo existe un único operador compacto y positivo S tal que $S^2 = T$.*

iv) *Existe un operador compacto y positivo A y un operador unitario U tales que $T = AU$.*

Concluimos el tema con el estudio de la equivalencia unitaria para operadores compactos normales. Puesto que un isomorfismo isométrico entre espacios de Hilbert permite la identificación total de dichos espacios, la siguiente relación de equivalencia entre operadores resulta completamente natural.

Definición V.4.60 . *Sean X e Y espacios de Hilbert, $T \in L(X)$, $S \in L(Y)$; se dice que los operadores S y T son* **unitariamente equivalentes** *si existe un isomorfismo isométrico U de X sobre Y tal que: $S = UTU^{-1}$. Sea ahora T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo H, y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ sea $m_T(\lambda)$ la dimensión hilbertiana de $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$. La ley m_T así definida recibe el nombre de* **función de multiplicidad** *del operador T. Nótese que $m_T(\lambda) \neq 0$ solamente cuando $\lambda \in \sigma_p(T)$ en cuyo caso, si $\lambda \neq 0$, $m_T(\lambda)$ es un número natural, mientras $m_T(0)$ puede ser un cardinal arbitrario.*

Teorema V.4.61 . *Dos operadores compactos normales en sendos espacios de Hilbert complejos son unitariamente equivalentes si, y sólo si, tienen la misma función de multiplicidad.*

BIBLIOGRAFIA: Este capítulo pretende completar la formación anterior del alumno sobre espacios de Hilbert en un marco más general en lo que respecta a los dos primeros temas, de ahí que hayamos decidido no hacer demostraciones. Algunos textos de Análisis Funcional que incluyen los espacios de Hilbert son [3], [8], [12], [33], [39] y [53]. Nosotros hemos seguido casi por entero el libro de Conway, [12], sin olvidar el clásico de Choquet, [10]

Capítulo VI

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

Es este un capítulo dedicado a presentar las nociones básicas del mundo de los espacios vectoriales topológicos (EVT en adelante). Comenzamos definiendo tales espacios, concepto que se atribuye con frecuencia a Fréchet (1928) o a Kolmogorov (1934), y caracterizamos algebraicamente las familias de subconjuntos que pueden ser bases de entornos de cero para una topología vectorial, resultado cuya paternidad parece ser debida a Von Neumann (1935). La tarea ejemplificadora se facilita ahora introduciendo ciertas funciones en un espacio vectorial que comparten algunas propiedades con una norma: casinorma y pseudonorma, cuyas topologías asociadas son siempre vectoriales. El segundo tema se dedica al estudio de los EVT de dimensión finita, que debe ser a estas alturas un instructivo ejercicio para el alumno. Aprovechamos este momento para introducir la acotación en EVT así como los conceptos puramente "uniformes" *sólo para la uniformidad de un EVT, haciendo un breve análisis de éstos en nuestro nuevo ambiente. Finalizamos este capítulo presentando los teoremas de seminormabilidad de Kolmogorov y semimetrizabilidad de Birkhof-Kakutani que nos dan dos tipos de EVT bien diferenciados: espacios localmente convexos y localmente acotados. Por último, estudiando propiedades de estabilidad de dichos espacios, se obtienen caracterizaciones interesantes de los mismos, lo que aclara considerablemente el panorama que tenemos en este nuevo ambiente para el alumno, quien tendrá la obligación de realizar la mayor parte de la tarea de este capítulo introductorio.*

VI.1 Topologías vectoriales. Bases de entornos de cero

No debe de ser ya ningún secreto para el alumno que las estructuras que subyacen tras un espacio normado son la topológica y la algebraica, con algunas propiedades de buena avenencia. Comenzamos entonces con la noción de espacio vectorial topológico.

Definición VI.1.1. *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{T}$ una topología en X. Diremos que $\mathcal{T}$ es una topología* **vectorial** *en X o* **compatible** *con la estructura de espacio vectorial de X si las aplicaciones $\sigma : X \times X \longrightarrow X$ y $\tau : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$ dadas por*

$$\sigma(x, y) = x + y, \;\; \tau(\lambda, x) = \lambda x \;\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K},$$

son continuas considerando en X la topología $\mathcal{T}$, en $X \times X$ la producto de $\mathcal{T}$ consigo misma y en $\mathbb{K} \times X$ la producto de la usual en $\mathbb{K}$ con $\mathcal{T}$. Un **espacio vectorial topológico**, **EVT**, *es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un espacio vectorial y $\mathcal{T}$ es una topología vectorial en X. Como es usual, omitiremos la segunda coordenada del par, cuando no haya lugar a confusión.*

Conviene poner de manifiesto que un espacio vectorial dotado de la topología trivial es siempre un EVT, así la estructura algebraica de un EVT no tiene por qué satisfacer ninguna perfección adicional. Sin embargo, como consecuencia inmediata de la definición, la topología de un EVT sí que goza de perfecciones adicionales.

Proposición VI.1.2 . *Sea X un EVT. Entonces las traslaciones y homotecias (no triviales) en X son homeomorfismos, X es un espacio topológico homogéneo y la topología de X se puede reconstruir a partir de una base de entornos de cero.*

Utilizando la continuidad en el origen de la aplicaciones suma y producto por escalar de un EVT se obtienen las siguientes propiedades adicionales.

Proposición VI.1.3 . *Sea X un EVT. Entonces:*

(i) Para cada U entorno de cero en X existe V entorno de cero en X tal que $V + V \subset U$.

(ii) Todo entorno de cero en X es absorbente.

(iii) Para cada U entorno de cero en X existe V entorno de cero en X verificando que $\mathbb{D}V \subset V$ y tal que $V \subset U$.

El concepto de absorbencia ya apareció en el segundo capítulo de nuestro proyecto. Ponemos ahora nombre a los conjuntos que verfican la última propiedad que nos ha aparecido.

Definición VI.1.4 . *Sea X un EVT y $A \subset X$. Diremos que A es* **equilibrado** *si $\mathbb{D}A \subset A$.*

Con esta notación, la proposición anterior nos dice que en un EVT todo entorno de cero contiene otro entorno de cero equilibrado.

Cabe ahora preguntarse si las propiedades adicionales que tiene toda topología de un EVT de hecho caracterizan todas las topologías de este tipo. La respuesta viene dada por el siguiente hecho, totalmente elemental.

Teorema VI.1.5 . *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos en X verificando:*

(i) Para cualesquiera $U, V \in \mathcal{B}$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset U \cap V$.

(ii) Todo elemento de $\mathcal{B}$ es absorbente y equilibrado.

(iii) Para cualquier $U \in \mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V + V \subset U$.

Entonces existe una, necesariamente única, topología $\mathcal{T}$ en X con la que X es un EVT y en la que $\mathcal{B}$ es una base de entornos de cero.

La primera de las condiciones anteriores es obligada si se quiere que $\mathcal{B}$ sea una base de entornos, la tercera la verifica todo EVT y en cuanto a la segunda, ya sabemos que todo EVT tiene una base de entornos de cero equilibrados y absorbentes.

Como consecuencia, podemos dar condiciones (algebraicas) sobre un subconjunto de un espacio vectorial para que sea entorno de cero en una topología de las nuestras.

Corolario VI.1.6. *Sea X un espacio vectorial y $A \subset X$ un subconjunto absorbente, equilibrado y convexo. Entonces existe una topología en X compatible con la estructura de espacio vectorial en la que A es entorno de cero.*

Conviene poner de manifiesto algunas propiedades generales de los EVT. Concretamente, son ejercicios sencillos comprobar que si X es un EVT, entonces X es simplemente conexo, $X \setminus \{0\}$ es arcoconexo si X no es unidimensional y X es regular. Este último hecho, pone de manifiesto que los axiomas de separación usuales, T_0, T_1, T_2, $T_3 = T_1$+regular, son todos equivalentes para un EVT, lo que motiva la siguiente definición.

Definición VI.1.7. *Sea X un EVT. Diremos que X es separado si verifica el axioma de separación T_1, equivalentemente, el conjunto formado por el origen es cerrado o, si se quiere, $\cap_{U\in\mathcal{B}} U = \{0\}$, donde $\mathcal{B}$ es una base de entornos de cero en X.*

Como consecuencia de la definición, todo espacio normado es un EVT, hecho que también se puede deducir de VI.1.5. Precisamente este último resultado se puede aplicar también a espacios vectoriales que posean una función más general que una norma.

Definición VI.1.8. *Sea X un espacio vectorial y $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que ϕ es una* **seminorma** *si se verifica:*

(i) $\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y)\ \forall x, y \in X$.

(ii) $\phi(\lambda x) = |\lambda|\phi(x)\ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.

Diremos que ϕ es una **casinorma** *si se verifica:*

(i) *Existe* $K \geq 1$ *tal que* $\phi(x+y) \leq K(\phi(x)+\phi(y))$ $\forall x, y \in X$.

(ii) $\phi(\lambda x) = |\lambda|\phi(x)$ $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.

Diremos que ϕ es una **pseudonorma** *si se verifica:*

(i) $\phi(x+y) \leq \phi(x)+\phi(y)$ $\forall x, y \in X$.

(ii) $\phi(\lambda x) \leq \phi(x)$ $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$.

(iii) $\lim_n \phi(\frac{x}{n}) = 0$ $\forall x \in X$.

Se dirá que ϕ es una casinorma o pseudonorma **total** *si además se verifica:*

$$x \in X, \phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Las propiedades anteriores permiten aplicar VI.1.5 para obtener

Corolario VI.1.9 . *Sea X un espacio vectorial, $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma, casinorma o pseudonorma y $\mathcal{B} = \{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ la familia de subconjuntos de X dada por:*

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \phi(x) \leq \varepsilon\} \ \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces existe una (necesariamente) única topología en X con la que X es un EVT y en la que $\mathcal{B}$ es una base de entornos de cero. Si además, ϕ es norma, casinorma total o pseudonorma total, entonces dicha topología es separada. A esta topología la llamaremos topología en X asociada a ϕ.

El resultado anterior nos va a facilitar pasar ahora a la tarea ejemplificadora.

Ejemplos.-

(i) Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$. Definamos $\phi : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1+|x(n)|} \ \forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

El hecho fácilmente comprobable de que ϕ es una pseudonorma total en X nos dice que podemos dotar a X de estructura de EVT separado, con la topología asociada a ϕ. Dicha topología nos da la convergencia puntual, o si se quiere, uniforme sobre compactos de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Un esquema similar se puede seguir para dotar de estructura de EVT al espacio vectorial $C(\Omega)$ de las funciones complejas continuas definidas sobre un abierto Ω del plano complejo. En efecto, consideremos $\{K_n\}$ una exhaución compacta de Ω y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ $p_n(f) = \|f|\ K_n\|_\infty$ para cada $f \in C(\Omega)$. Basta hacer ahora

$$\phi(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f)}{1+p_n(f)} \ \forall f \in C(\Omega),$$

para disponer de una pseudonorma total en $C(\Omega)$ lo que nos da una topología compatible con la estructura de espacio vectorial, en la que la convergencia no es más que la uniforme sobre compactos de Ω.

(ii) Si $0 < p < 1$ podemos definir en el espacio vectorial

$$\ell_p = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p < +\infty\}$$

una pseudonorma total mediante $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p$ y una casinorma total mediante $x \to \phi(x)^{1/p}$. Ambas nos dan la misma topología en ℓ_p convirtiendo a este espacio en un nuevo EVT separado.

Mismo comentario merece el espacio vectorial $\mathcal{L}_p[0,1]$ si $0 < p < 1$, la única diferencia como era de esperar, es que la topología no va a ser separada. Cosa perfectamente subsanable pasando a cociente, como veremos más adelante.

Los ejemplos hasta ahora mostrados de EVT provienen del conocimiento del espacio vectorial subyacente para poder definir una función que comparta ciertas propiedades con una norma. Más adelante veremos que estos ejemplos no son espacios normados. Ahora nos dedicamos a obtener más ejemplos de EVT mediante construcciones abstractas. Comenzaremos por plantearnos el problema de si el esquema de topología inicial respeta la estructura de EVT, cuya solución es bastante elemental.

Proposición VI.1.10 . *Sea X un espacio vectorial y $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ una familia arbitraria de EVT. Si para cada i disponemos de una aplicación lineal $f_i : X \longrightarrow X_i$, entonces la topología inicial en X determinada por la familia anterior es una topología compatible con la estructura de espacio vectorial.*

Casos particulares son la topología inducida en un subespacio de un EVT, la topología supremo de una familia de topologías compatibles en un mismo espacio vectorial y la topología producto de una familia de EVT. De este último caso obtenemos que la topología producto en el espacio vectorial $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es una topología compatible con la estructura de espacio vectorial que coincide con la presentada anteriormente mediante una pseudonorma.

Por otra parte también es interesante mostrar cuándo la topología inicial resulta ser separada si se parte de EVT separados.

Proposición VI.1.11 . *Sea X un espacio vectorial y $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ una familia arbitraria de EVT separados. Si para cada i disponemos de una aplicación lineal $f_i : X \longrightarrow X_i$, y $\mathcal{T}$ denota la topología inicial en X determinada por la familia anterior entonces, $\mathcal{T}$ es separada si, y sólo si, $\cap_i Ker f_i = \{0\}$.*

En consecuencia, el producto de una familia arbitraria de EVT es separado, con la topología producto, si, y sólo si, cada uno de los factores lo es.

El mismo análisis hecho para la topología inicial sería ahora obligado para la final, sin embargo el resultado no es tan satisfactorio. Es fácil darse cuenta de que el esquema de topología final no respeta la topología compatible, incluso claro está partiendo de topologías compatibles y aplicaciones lineales. Aunque se podrían dar condiciones para obtener una topología compatible con la estructura de espacio vectorial a partir de una familia de EVT y aplicaciones lineales, el caso más interesante de topología final se presenta cuando se quiere introducir la topología cociente y, en este caso, las cosas van tan bien como iban con la topología inicial.

Proposición VI.1.12 . *Sea X un EVT y M un subespacio de X. Denotemos por π la proyección canónica de X sobre el espacio vectorial cociente X/M. Entonces la topología final en el cociente X/M determinada por π es una topología compatible con la estructura de espacio vectorial de X/M. A dicha topología se le llama topología* **cociente** *en X/M.*

El siguiente hecho nos dice cuándo la topología cociente va a ser además separada.

Proposición VI.1.13 . *Sea X un EVT y M un subespacio de X. Entonces la topología cociente en X/M es separada si, y sólo si, M es cerrado en X.*

Debemos de tener ahora claro cómo convertir un EVT no separado en separado, haciendo los mínimos cambios posibles, claro está.

Corolario VI.1.14 . *Sea X un EVT. Entonces $X/\overline{\{0\}}$, con la topología cociente, es un EVT separado.*

Podemos ahora rescatar el concepto de norma cociente en un ambiente más general.

Corolario VI.1.15 . *Sea X un EVT y ϕ una pseudonorma en X que genera la topología. Si M es un subespacio de X definimos*

$$\phi_0(x+M) = \inf\{\phi(x+m) : m \in M\}.$$

Entonces se verifica:

(i) ϕ_0 *es una pseudonorma en* X/M.

(ii) ϕ_0 *genera la topología cociente en* X/M.

(iii) Si ϕ *es seminorma, entonces* ϕ_0 *es seminorma.*

(iv) ϕ_0 *es total si, y sólo si,* M *es cerrado en* X.

Terminaremos este tema introduciendo los conceptos de isomorfismo topológico y suma topológico directa de subespacios ya conocidos en espacios normados.

Definición VI.1.16 . *Sean X, Y EVT. Un* **isomorfismo topológico** *entre X e Y es un homeomorfismo de X sobre Y que es además isomorfismo de espacios vectoriales. En tal caso diremos que X e Y son* **isomorfos**.

Definición VI.1.17 . *Sea X un EVT y M, N subespacios de X, de forma que X descompone en suma directa de M y N. Diremos que X es suma topológico directa de M y N si la aplicación de $M \times N$, con la topología producto, en X dada por $(m, n) \to m + n$ es un isomorfismo topológico sobreyectivo. En tal caso se dirá que M está complementado en X.*

Al igual que en el ambiente de los espacios normados decir que M está complementado en X equivale a la existencia de una proyección lineal y continua de X sobre M, que a su vez equivale al hecho de que toda aplicación lineal y continua de M en un EVT Y se puede extender de forma continua y lineal a X.

VI.2 EVT de dimensión finita. Acotación y precompacidad

Pretendemos en este tema estudiar los EVT finito-dimensionales. Se adivinará fácilmente que los EVT separados finito-dimensionales no son más que los espacios $\mathbb{K}^n$ con la topología usual, gracias a nuestro estudio de los espacios normados finito-dimensionales. Pretendemos que el alumno no sólo llegue a esta conclusión, sino que sea capaz de realizar las demostraciones oportunas analizando las del caso de los espacios normados. Del análisis del lema de Riesz se debe llegar a la conclusión de que no es más que la acotación de la bola unidad de un espacio normado lo que permite establecer el resultado, lo que finalizará obteniendo un lema de Riesz abstracto para el que habrá que introducir de forma natural la acotación en EVT. La obtención del teorema de Riesz abstracto será inmediata, pudiendo ahora introducir el concepto de precompacidad en EVT. Terminaremos el tema analizando los nuevos conceptos aparecidos.

Al igual que en el ambiente de espacios normados es fácil comprobar que toda aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en un EVT arbitrario es continua. En consecuencia el siguiente resultado debe ser un ejercicio obligatorio para el alumno, puesto no que no tiene más que leer el correspondiente resultado para espacios normados y conocer el concepto de EVT.

Teorema VI.2.18 .*(Tihonov para EVT) Sea X un EVT separado y $n-$dimensional. Entonces toda biyección lineal de $\mathbb{K}^n$ en X es un isomorfismo topológico.*

El siguiente corolario recoge las consecuencias inmediatas del resultado anterior.

Corolario VI.2.19 .

(i) Toda aplicación lineal de un EVT finito-dimensional separado en un EVT arbitrario es continua.

(ii) Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado.

(iii) *Los subespacio cerrados de codimensión finita de un EVT están complementados.*

(iv) *En cualquier EVT la suma de un subespacio finito-dimensional con otro cerrado es un subespacio cerrado.*

Tras analizar el lema de Riesz en el ambiente de los espacios normados, se debe llegar a la conclusión de que es esencial la acotación de la bola unidad, y por tanto se debe llegar de forma natural al siguiente concepto.

Definición VI.2.20. *Sea X un EVT y A un subconjunto de X. Diremos que A es* **acotado** *(en X) si para cada U entorno de cero en X es posible encontrar un escalar $\rho \in \mathbb{K}$ de forma que $\rho A \subset U$.*

De forma nada rigurosa, pero bastante sugestiva, digamos que A es acotado si se puede meter en cualquier entorno de cero convenientemente *"inflado"*. La siguiente caracterización muestra cómo se puede escoger el escalar de la definición anterior.

Proposición VI.2.21 . *Sea X un EVT y A un subconjunto de X. Entonces son equivalentes:*

(i) *A es acotado.*

(ii) *Para cada U entorno de cero en X existe $\rho > 0$ tal que $\rho A \subset U$.*

(iii) *Para cada U entorno de cero en X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset nU$.*

(iv) *Cada subconjunto numerable de A es acotado.*

(v) $\lim_n \frac{a_n}{n} = 0$ *para cada sucesión de puntos en A, $\{a_n\}$.*

Conviene en este punto clarificar la relación entre acotación y continuidad de una aplicación lineal entre EVT, ya que no va a ser exactamente la misma que en el ambiente de los espacios normados.

Proposición VI.2.22. *Sean X, Y EVT y T una aplicación lineal de X en Y. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(i) Existe U entorno de cero en X de forma que $T(U)$ es acotado en Y.

(ii) T es continua.

(iii) T lleva subconjuntos acotados de X en subconjuntos acotados de Y.

Entonces i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii). En el caso de que $Y = \mathbb{K}$ entonces las anteriores afirmaciones equivalen a que el núcleo de T sea cerrado.

Con la noción de acotación, que por supuesto extiende a la conocida en espacios normados, el alumno debe ser capaz de llegar al siguiente lema.

Lema VI.2.23.*(de Riesz abstracto) Sea X un EVT y A un subconjunto de X acotado. Si M es un subespacio de X y $A \subset M + \lambda A$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < 1$, entonces $A \subset \overline{M}$.*

La demostración del teorema de Riesz en nuestro nuevo ambiente debe ya adivinarse por completo. Antes de enunciar dicho teorema conviene introducir el concepto de precompacidad, que debiera de ser conocido por el alumno en el ambiente de espacios métricos y que debe resultar natural después del de acotación.

Proposición VI.2.24. *Sea X un EVT y A un subconjunto de X. Diremos que A es* **precompacto** *en X si para cada U entorno de cero en X es posible encontrar un número finito de puntos de A, digamos $a_1, \ldots, a_n$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^{n} a_i + U$.*

Por supuesto, un conjunto compacto, de hecho relativamente compacto, es precompacto y la precompacidad implica la acotación.

Teorema VI.2.25.*(Riesz abstracto) Sea X un EVT separado. Entonces equivalen:*

(i) X es localmente compacto.

(ii) Existe un entorno de cero en X compacto.

(iii) Existe un entorno de cero en X precompacto.

(iv) X es finito-dimensional.

Por supuesto la conclusión tras ver el resultado anterior debe ser, al igual que en espacios normados, la escasez de conjuntos compactos en la dimensión infinita.

Corolario VI.2.26. *Sea X un EVT separado infinito-dimensional. Entonces todo subconjunto compacto de X ha de tener interior vacío.*

Como ya se habrá visto, lo hasta ahora expuesto en este tema debe ser un entretenimiento para el alumno tras conocer la primera parte de nuestro proyecto. Sin embargo, han aparecido conceptos como los de acotación o precompacidad que deben ser familiares sólo en ambiente de espacios métricos. Desde el punto de vista teórico, parece claro que se debería hacer en este momento una introducción a los espacios uniformes que nosotros no vamos a seguir, preferimos introducir el resto de conceptos uniformes en EVT sin mencionar el de uniformidad, puesto que nos parece bastante natural y para los propósitos de nuestro proyecto el concepto de espacio uniforme seguramente resultaría excesivo.

Definición VI.2.27. *Sea X un EVT y $\{x_\lambda\}$ una red en X. Diremos que la red $\{x_\lambda\}$ es de* **Cauchy** *si para cada U entorno de cero en X existe λ_0 de forma que $x_\lambda - x_\mu \in U$ para cualesquiera $\lambda, \mu \geq \lambda_0$. También diremos que una base de filtro $\mathcal{B}$ en X es de* **Cauchy** *si para cada U entorno de cero en X existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B - B \subset U$.*

Una red es de Cauchy si, y sólo si, lo es la base de filtro asociada. Se comprueba también fácilmente que una base de filtro es de Cauchy si, y sólo si, lo es el filtro que genera. Es igualmente sencillo ver que toda red (base de filtro) convergente es de Cauchy, así como toda red (base de filtro) de Cauchy con un valor adherente es convergente.

Definición VI.2.28 . *Sea X un EVT y A un subconjunto de X. Se dice que A es* **completo** *si si toda red (base de filtro, filtro) de Cauchy en A converge a un elemento de A. Diremos que A es* **secuencialmente completo** *si toda sucesión de Cauchy en A converge a algún elemento de A.*

El siguiente resultado nos dice cuándo la definición de complitud que acabamos de dar coincide con la complitud de una distancia que genere la topología.

Proposición VI.2.29 . *Sea X un EVT con la topología asociada a una distancia d invariante por traslaciones, esto es,*

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \ \forall x, y, z \in X.$$

Entonces son equivalentes:

(i) X es completo.

(ii) X es secuencialmente completo.

(iii) La distancia d es completa.

Al igual que en el ambiente de los espacios métricos, es rutinario comprobar que los cerrados en espacios completos son completos y que un completo siempre es cerrado, si el espacio ambiente es separado.

Conviene también presentar algunos espacios completos como por ejemplo $C(\Omega)$ y $L_p[0,1]$ con $0 < p < 1$.

Presentamos a continuación un resultado conocido como lema de Bourbaki-Robertson, que nos dice cuándo es posible obtener la complitud de una topología si disponemos de otra completa y comparable con la anterior.

Teorema VI.2.30 . *Sean $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ topologías vectoriales en un espacio vectorial X de forma que $\mathcal{T}'$ posee una base de entornos de cero cerrados (resp. secuencialmente cerrados) para la topología $\mathcal{T}$. Entonces toda red (resp. sucesión) de Cauchy en la topología $\mathcal{T}'$ que converja en la topología $\mathcal{T}$ también converge en la topología $\mathcal{T}'$. En consecuencia, los subconjuntos completos (resp. secuencialmente completos) en $(X, \mathcal{T})$ siguen siéndolo en $(X, \mathcal{T}')$.*

Presentamos ya en nuestro nuevo ambiente el concepto de continuidad uniforme, también familiar en espacios métricos.

Definición VI.2.31 . *Sean X, Y EVT y A, B subconjuntos de X e Y, respectivamente. Se dice que una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es* **uniformemente continua** *si para cada U entorno de cero en Y existe V entorno de cero en X de forma que $f(x) - f(y) \in U$ para cualesquiera $x, y \in X$ verificando que $x - y \in V$.*

Por supuesto toda aplicación uniformemente continua es continua. En el caso de aplicaciones lineales obtenemos además.

Corolario VI.2.32 . *Sean X, Y EVT y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces equivalen:*

(i) f es uniformemente continua.

(ii) f es continua.

(iii) f es continua en cero.

Gracias a la continuidad uniforme y a la complitud podemos obtener el siguiente resultado de extensión.

Teorema VI.2.33.*(Extensión de aplicaciones uniformemente continuas) Sean X, Y EVT con Y completo, M un subespacio de X y $f : M \longrightarrow Y$ una aplicación lineal y continua. Entonces existe una única extensión continua de f a $\overline{M}$. Además dicha extensión es lineal.*

Pasamos ahora a hacer un análisis del concepto de precompacidad que nos apareció con el teorema de Riesz abstracto para establecer una caracterización de la compacidad en EVT.

Es un sencillo ejercicio comprobar que las aplicaciones uniformemente continuas preservan la precompacidad, así como las aplicaciones lineales continuas preservan la acotación. Igual de elemental es comprobar que un subconjunto de un EVT para el que toda sucesión de puntos en él tiene un valor adherente es precompacto. Por supuesto si el valor adherente se queda también en el conjunto se obtiene la compacidad. Obsérvese que lo anterior nos dice que la precompacidad está numerablemente determinada. El siguiente lema será útil para obtener un análogo de lo anterior en términos de ultrafiltros.

Lema VI.2.34. *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en un conjunto no vacío X y sean A, B subconjuntos de X tales que $A \cup B = \mathcal{F}$. Entonces $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.*

Proposición VI.2.35 . *En un subconjunto precompacto de un EVT, todo ultrafiltro es un filtro de Cauchy.*

Por supuesto, en el caso de que se parta de un subconjunto compacto se tiene la convergencia de todo ultrafiltro.

Con lo anterior, podemos ya ofrecer la siguiente caracterización de la compacidad.

Proposición VI.2.36 . *Un subconjunto de un EVT es compacto si, y sólo si, es precompacto y completo.*

Como consecuencia caracterizamos también la precompacidad en ambiente completo de la siguiente forma.

Corolario VI.2.37 . *En un EVT completo, los subconjuntos precompactos coinciden con los* **relativamente compactos***, es decir, aquellos cuyo cierre es compacto.*

El teorema de Heine-Borel queda así como consecuencia de lo anterior ya que, como se desprende de la definición, los subconjuntos precompactos de $\mathbb{R}^n$ no son más que los acotados.

Pasamos a considerar la última noción *"uniforme"* que trataremos en este tema.

Definición VI.2.38 . *Sea X un espacio topológico, Y un EVT y Φ una familia de aplicaciones de X en Y. Se dice que la familia Φ es* **equicontinua en un punto** $x \in X$, *si para cada entorno de cero U en Y se puede encontrar V entorno de x en X tal que $f(V) \subset f(x) + U$ para toda $f \in \Phi$, equivalentemente, el conjunto*

$$\cap_{f \in \Phi} f^{-1}(f(x) + U)$$

es entorno de x. Si esto ocurre para todo punto de X diremos que la familia Φ es **puntualmente equicontinua**. *Por último, en el caso de que X sea un EVT, diremos que Φ es* **uniformemente equicontinua** *si, para cada entorno de cero U en Y se puede encontrar un entorno de cero V en X tal que $f(x) - f(y) \in U$ siempre que $x - y \in V$ y $f \in \Phi$.*

Es claro que una familia uniformemente equicontinua de aplicaciones entre EVT es puntualmente equicontinua. El recíproco es también cierto si el espacio de partida es compacto.

Proposición VI.2.39 . *Sean X e Y EVT, K un subconjunto compacto de X y Φ una familia puntualmente equicontinua de aplicaciones de K en Y. Entonces Φ es uniformemente equicontinua. En particular, toda función continua de K en Y es uniformemente continua.*

La noción de equicontinuidad nos va a permitir, para acabar, obtener una caracterización intrínseca de los subconjuntos relativamente compactos del espacio de Banach $C(K)$.

Teorema VI.2.40 .*(Ascoli-Arzelà) Sea K un espacio topológico Haussdorff compacto y E un subconjunto del espacio de Banach $C(K)$, con la norma uniforme. Entonces son equivalentes:*

(i) *E es relativamente compacto.*

(ii) *E es una familia puntualmente acotada y puntualmente equicontinua.*

VI.3 Clases especiales de EVT

Nos plantearemos en este tema cuándo la topología de un EVT es metrizable o normable, presentando los teoremas de normabilidad de Kolmogorov y de metrizabilidad de Birhof-Kakutani. Llegaremos así a los espacios localmente acotados y localmente convexos clarificando finalmente los tipos de EVT que podemos encontrar.

Recordemos que en la tarea de presentar los teoremas de separación habíamos definido para cada A subconjunto absorbente de un espacio vectorial X el funcional de Minkowski en X asociado a A,

$$p_A(x) = \inf\{r \geq 0 : x \in rA\} \ \forall x \in X,$$

que nos proporcionaba la norma de un espacio normado a partir de la bola unidad y de la estructura vectorial de X.

Con el fin de caracterizar cuándo un EVT es normable, recogemos a continuación las propiedades más interesantes del funcional de Minkowski, algunas de ellas ya obtenidas cuando apareció por primera vez dicho funcional.

Proposición VI.3.41 . *Sea X un espacio vectorial, A un subconjunto absorbente de X y p_A el funcional de Minkowski en X asociado a A. Entonces:*

(i) $A \subset \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$.

(ii) *p_A es positivamente homogéneo, esto es,* $p_A(rx) = rp_A(x) \ \forall x \in X, r \geq 0$.

(iii) *Si E es equilibrado, se tiene que* $p_A(\lambda x) = |\lambda| p_A(x) \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.

(iv) *Si E es convexo, se tiene que* $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) \ \forall x, y \in X$.

(v) Si E es equilibrado o convexo, se tiene que $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A$.

En consecuencia, si A es absorbente, equilibrado y convexo p_A es una seminorma en X verificando

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}.$$

Corolario VI.3.42. *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X.*

(i) Existe ϕ seminorma en X de forma que $A = \{x \in X : \phi(x) \leq 1\}$ si, y sólo si, A es absorbente, equilibrado, convexo y **radialmente cerrado**, *esto es, el conjunto $\{r \geq 0 : rx \in A\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ para cada $x \in X$.*

(ii) Existe ϕ norma en X de forma que $A = \{x \in X : \phi(x) \leq 1\}$ si, y sólo si, A es absorbente, equilibrado, convexo y **radialmente compacto**, *esto es, el conjunto $\{r \geq 0 : rx \in A\}$ es compacto en $\mathbb{R}$ para cada $x \in X$.*

En vista de lo anterior, podemos ya obtener la caracterización prometida.

Teorema VI.3.43 .*(Criterio de seminormabilidad de Kolmogorov) Sea X un EVT. Entonces X es seminormable si, y sólo si, existe U entorno de cero en X convexo y acotado. En consecuencia, X es normable si, y sólo si, X es separado y existe un entorno del tipo anterior.*

Por supuesto, si X es seminormable basta tomar como U la bola unidad de X.

Recíprocamente, supongamos que disponemos de un entorno de cero convexo y acotado U. Sea V un entorno de cero equilibrado contenido en U, haciendo $A = co(V)$ obtenemos un entorno de cero que es absorbente, como siempre, convexo y equilibrado. (Es un ejercicio comprobar que la envolvente convexa de un conjunto equilibrado vuelve a ser equilibrada) Ahora p_A, el funcional de Minkowski en X asociado a A, es una seminorma en X, según la proposición anterior, que además genera una topología menos fina que la de partida gracias a que $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A$, una propiedad también obtenida en la proposición anterior. El hecho de que U es acotado en la topología de partida hace que también lo sea A por estar contenido en U y, por tanto, obtenemos que la topología de partida es memos fina que la que nos da la seminorma p_A y, en consecuencia, dichas topologías coinciden.

Ahora, como consecuencia del criterio de normabilidad de Kolmogorov obtenemos que los espacios $L_p[0,1]$ con $0 < p < 1$ y $C(\Omega)$ no son normables, el primero de ellos por no poseer más entornos de cero convexos que el total y el segundo por carecer de entornos de cero acotados.

El teorema anterior muestra que los espacios seminormables se caracterizan por la intersección de dos tipos de espacios: los que poseen o bien entornos de cero convexos o bien entornos de cero acotados. Pasaremos ahora a estudiar brevemente, por separado, estos dos tipos de EVT no seminormables.

Definición VI.3.44 . *Sea X un EVT. Diremos que X es un espacio* **localmente acotado, (ELA)** *si existe algún entorno de cero acotado en X, equivalentemente, si existe una base de entornos de cero acotados en X. Igualmente, diremos que X es un espacio* **localmente convexo (ELC)** *si existe una base de entornos de cero convexos en X.*

Obsérvese que la convexidad se utiliza en el criterio de seminormabilidad de Kolmogorov exclusivamente para que el funcional de Minkowski que allí aparece verifique la desigualdad triangular. Si se siguen las ideas de dicho criterio sin suponer la convexidad del entorno que allí aparece obtendremos fácilmente:

Proposición VI.3.45 . *Sea X un espacio localmente acotado y U un entorno de cero acotado en X. Si p_U denota el funcional de Minkowski en X asociado a U, entonces p_A es una casinorma en X que genera la topología de partida. Recíprocamente, la topología asociada a una casinorma en un espacio vectorial es localmente acotada.*

El siguiente hecho nos dice que en el caso de los espacios localmente convexos necesitamos más de una *"función"* parecida a la norma, para generar la topología de partida.

Proposición VI.3.46 . *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio localmente convexo y* $\mathcal{B}$ *una base de entornos de cero convexos y equilibrados en* X*. Para cada* $U \in \mathcal{B}$ *denotamos por* p_U *el funcional de Minkowski en* X *asociado a* U *y por* $\mathcal{T}_U$ *la topología en* X *generada por* p_U*. Entonces la topología* $\mathcal{T}$ *no es más que la topología supremo de la familia* $\{\mathcal{T}_U : U \in \mathcal{B}\}$*.*

La existencia de $\mathcal{B}$ en el enunciado anterior es consecuencia directa de la existencia de sendas bases de entornos de cero convexos y equilibrados en X y el hecho de que la envolvente convexa de un subconjunto equilibrado vuelve a ser equilibrada.

Tenemos entonces que la topología de un espacio localmente convexo es la generada, mediante el proceso de tomar supremo, por una familia de seminormas en el espacio. Por supuesto, el recíproco también es cierto, la topología supremo de una familia de topologías generadas por seminormas es una topología localmente convexa.

Conviene en este momento presentar las propiedades de estabilidad que tienen los dos nuevos tipos de EVT aparecidos frente a subespacios, productos, cocientes, etc. Lo único necesario para ello es haber asimilado los nuevos conceptos que han aparecido.

Proposición VI.3.47 .

(i) Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ *una familia arbitraria de espacios localmente convexos,* X *un espacio vectorial y supongamos que para cada* i *tenemos una aplicación lineal* $f_i : X \longrightarrow X_i$*. Entonces* X *con la topología inicial determinada por la familia anterior es un espacio localmente convexo. En consecuencia la convexidad local es una propiedad hereditaria (pasa a subespacios), productiva (se preserva por productos arbitrarios) y estable bajo el proceso de tomar topología supremo.*

(ii) La convexidad local es una propiedad divisible (se conserva al tomar cocientes).

Proposición VI.3.48 . *La acotación local es una propiedad hereditaria y divisible.*

En cuanto a la estabilidad de la acotación local al tomar productos tenemos lo siguiente.

Proposición VI.3.49 . *Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios localmete acotados y supongamos que en ninguno de ellos estamos considerando la topología trivial. Entonces el espacio producto de la familia $\{X_i\}$, con la topología producto, es un espacio localmente acotado si, y sólo si, X_i es localmente acotado para cada i y la familia $\{X_i\}$ es finita.*

Como consecuencia inmediata obtenemos.

Corolario VI.3.50 . *Los EVT seminormables son estables por subespacios, cocientes y productos finitos.*

En particular tenemos que el espacio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ no es localmente acotado y, por tanto, no seminormable. Por otro lado el espacio ℓ_p con $0 < p < 1$ es localmente acotado (topología asociada a una casinorma) y no es localmente convexo, por no poseer más entornos de cero convexos que el espacio total.

Resumiendo, hemos clarificado los dos nuevos tipos de espacios aparecidos en este tema. Los espacios localmente acotados son aquellos cuya topología es la asociada a una casinorma y los espacios localmente convexos son aquellos cuya topología es la generada por una familia de seminormas o, si se quiere, son subespacios de productos de espacios seminormables.

Al igual que empezamos el tema planteándonos caracterizar la normabilidad de un EVT, parece obligado ahora preguntarnos lo propio para la metrizabilidad. Antes de dar la respuesta a esta pregunta, presentamos un resultado de Mazur que nos dice cuándo una distancia en un espacio vectorial genera una topología vectorial.

Teorema VI.3.51.*(Mazur) Sea X un espacio vectorial y d una semidistancia en X verificando:*

(i) d es invariante por traslaciones.

(ii) Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de escalares convergente a cero, entonces $d(\lambda_n x, 0) \to 0$ para cada $x \in X$.

(iii) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X convergiendo a cero, entonces $d(\lambda x, 0) \to 0$ para cada escalar λ.

Entonces la topología asociada a d es una topología vectorial. Además, si el espacio X es completo para la topología anterior, entonces d también es completa.

La importancia de este teorema radica en que no se supone la continuidad conjunta del producto por escalares en $(0, 0)$ y conseguirla es la única parte no trivial de la demostración. Para ello se aplica el teorema de Baire.

Las hipótesis i) y iii) del teorema anterior son necesarias. Respecto a la invarianza por traslaciones, que no es necesaria, veremos en el siguiente resultado que siempre se puede conseguir cambiando la distancia de partida por otra equivalente.

Teorema VI.3.52 .*(Birkhof-Kakutani) Sea X un EVT. Entonces son equivalentes:*

(i) X es pseudonormable.

(ii) X es semimetrizable.

(iii) X verifica el primer axioma de numerabilidad (IAN), es decir, todo punto de X tiene una base numerable de entornos o, equivalentemente, existe una base numerable de entornos de cero.

La única implicación no trivial es deducir la pseudonormabilidad de X a partir del primer axioma de numerabilidad. Es éste un resultado bastante técnico, en el que a parte de un poco de ingenio, es preciso volver a analizar las propiedades que debe tener una familia numerable de subconjuntos para que los funcionales de Minkowski asociados nos proporcionen una semidistancia.

Como consecuencia, en todo EVT semimetrizable existe una semidistancia invariante por traslaciones, la generada por la pseudonorma, con lo que complitud del espacio equivale a la complitud de dicha semidistancia.

En el caso de que X sea un espacio localmente acotado y U sea un entorno de cero acotado en X, tenemos que $\{\frac{1}{n}U\}$ es una base de entornos de cero numerable en X, con lo que obtenemos

Corolario VI.3.53. *Todo espacio localmente acotado es semimetrizable.*

Obsérvese que como la topología asociada a una casinorma es localmente acotada se tiene que la topología asociada a una casinorma es la asociada a una pseudonorma y también a una semidistancia. Por otra parte, los espacios ℓ_p y L_p con $0 < p < 1$ son localmente acotados y no seminormables.

La clase de los espacios localmente acotados acaba de ser eclipsada por otra más importante, la de los espacios semimetrizables. En cuanto a los espacios localmete convexos, sabemos que su topología es la asociada a una familia de seminormas. En el caso de que partamos de un espacio localmente convexo, la metrizabilidad de éste equivale al hecho de que su topología sea la asociada a una familia numerable de seminormas.

Corolario VI.3.54 . *Sea X un espacio localmente convexo. Entonces son equivalentes:*

(i) X es pseudonormable.

(ii) X es IAN.

(iii) La topología de X es la asociada a una familia numerable de seminormas.

La única implicación no del todo trivial (iii)⇒ i)) consiste en seguir la presentación de la topología del espacio $C(\Omega)$ a partir de la familia de seminormas que se tiene por hipótesis.

Corolario VI.3.55 . *La clase de los EVT pseudonormables es estable por subespacios y cocientes.*

En cuanto a la estabilidad de los EVT pseudonormables por productos tenemos lo siguiente.

Proposición VI.3.56. *Sea $\{X_i\}$ una familia de EVT semimetrizables y d_i la distancia en X_i que genera su topología para cada i. Supongamos que d_i no es la distancia trivial para cada i. Entonces el espacio X producto de la familia $\{X_i\}$, con la topología producto, es semimetrizable si, y sólo si, la familia $\{X_i\}$ es numerable.*

Para acabar de clarificar las cosas entre las clases de EVT que estamos estudiando conviene poner dos nuevos ejemplos: $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ es un espacio localmente convexo no semimetrizable y $\ell_p \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un EVT no semimetrizable, no localmente convexo y no localmente acotado, por tanto, tampoco seminormable.

Obtenemos finalmente dos propiedades generales de los EVT.

Corolario VI.3.57. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un EVT. Entonces existe $\mathcal{N}$ familia de pseudonormas en X que genera la topología $\mathcal{T}$, es decir, $\mathcal{T}$ es la topología supremo de las topologías asociadas a las pseudonormas de la familia $\mathcal{N}$. En consecuencia, todo EVT es un subespacio de un producto de EVT semimetrizables.*

La demostración consiste en tomar para cada U entorno de cero equilibrado en X, una sucesión $B_U = \{U_n\}$ de entornos de cero equilibrados en X verificando que $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $U_0 = U$. Aplicando VI.1.5 existe $\mathcal{T}_U$ topología vectorial en X para la que B_U es una base de entornos de cero y, por tanto, dicha topología es menos fina que la de partida. El criterio de semimetrizabilidad nos dice ahora que $\mathcal{T}_U$ es semimetrizable para cada U. Debe quedar entonces claro que la topología de partida en X no es más que la supremo de la familia $\{\mathcal{T}_U\}$.

Consecuencia inmediata de la construcción anterior, y del hecho de que una topología generada por una semidistancia es completamente regular, es lo siguiente.

Corolario VI.3.58. *Todo EVT es completamente regular.*

Para acabar el tema daremos nombre a una importante clase de EVT que serán de importancia en lo que sigue.

Definición VI.3.59. *Llamaremos $F-$***espacio** *a un EVT con la topología asociada a una distancia completa e invariante por traslaciones. Equivalentemente, gracias al criterio de metrizabilidad, a todo EVT metrizable completo. Diremos que un EVT X es un espacio de Fréchet si es un $F-$espacio localmente convexo.*

Respecto al concepto anterior conviene resaltar la siguiente observación: Si X es un EVT con la topología asociada a una distancia d y X es un $F-$espacio, esto no implica que la distancia tenga que ser completa, puesto que hay ejemplos de lo contrario incluso en $\mathbb{R}$. Surge así la siguiente curiosidad: si d es completa, ¿es X un $F-$espacio? La respuesta afirmativa a esta cuestión fue dada por Klee en 1952 respondiendo a un problema planteado por Banach en su libro.

Con el siguiente lema obtenemos las propiedades de estabilidad de los $F-$espacios.

Lema VI.3.60. *Sea X un espacio vectorial con la topología asociada a una pseudonorma ϕ. Entonces son equivalentes:*

(i) X es un $F-$espacio.

(ii) Toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente.

Proposición VI.3.61 . *La clase de los $F-$espacios es estable por productos numerables, pasa a subespacios cerrados y se conserva por cocientes por subespacios cerrados.*

BIBLIOGRAFIA: Estamos ante un capítulo básico, que debe tratar cualquier texto de Análisis Funcional que no se limite a los espacios de Banach. Es obligado citar los textos de Berberian [3], Bourbaki [6], Horvath [27], Jarchow [29], Kthe [31], Schaefer [48], Valdivia [54] y Wilansky [58], [57]. Estos dos últimos textos son buena fuente de ejercicios que proponer al alumno.

Como ya se habrá observado se presupone el conocimiento de redes y filtros en espacios topológicos. No obstante, hemos incluido un apéndice con estos tópicos puesto que la experiencia nos dice que casi nunca han sido vistos en cursos anteriories.

Respecto al concepto de espacio uniforme, hemos preferido omitirlo utilizando sólo la uniformidad de un EVT. Textos donde profundizar en esta línea son los de Bourbaki [6], Dugundji [15] y Engelking [17].

Capítulo VII

LOS TRES PRINCIPIOS DEL ANALISIS FUNCIONAL.

Es éste un capítulo dedicado a obtener los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steihauss, así como nuevos teoremas de separación en nuestro nuevo ambiente más general. Deberá ser trabajo del alumno la obtención de los teoremas de la aplicación abierta, isomorfismos de Banach, gráfica cerrada y Banach-Steinhauss, con ligeras indicaciones, tras el estudio de dichos resultados ya realizado en el ambiente de los espacios de Banach. Por último, tras obtener nuevos teoremas de separación en distintos ambientes: espacios vectoriales topológicos y localmente convexos, presentamos el teorema de Krein-Milman que se echaría en falta en nuestro segundo capítulo, como aplicación de los teoremas de separación. Sin embargo, el ambiente más general del que disponemos en este momento nos libera de presentar el teorema de Krein-Milman para cada una de las topologías que conocemos en un espacio de Banach, como hubiéramos tenido que hacerlo irremediablemente en nuestro segundo capítulo. Asímismo, presentamos una primera aplicación de los teoremas de Krein-Milman y Banach-Alaoglú que puede encontrarse en el texto de Sakai, [47]. Nuevas aplicaciones de estos dos resultados serán obtenidas en el próximo capítulo, para el que ya tendremos claro que el ambiente de los espacios localmente convexos es el idóneo si queremos tener duales no triviales.

VII.1 El teorema de la aplicación abierta en EVT

Pretendemos seguir el mismo razonamiento que en el caso de los espacios de Banach para obtener un teorema de la aplicación abierta en la clase de los $F-$espacios, ya que aunque no tengamos una norma, las ideas expuestas en nuestro cuarto capítulo serán más que suficientes. Por tanto, vuelve a ser tarea del alumno obtener lo que a continuación se indica.

Formalizamos el concepto de aplicación *"casi-abierta"* que ya apareció implícitamente en el mundo de los espacios normados.

Definición VII.1.1 . *Sean X, Y EVT y T una aplicación lineal de X en Y. Se dice que T es* **casi-abierta** *si para cada U entorno de cero en X, el cierre de $T(U)$ es entorno de cero en Y.*

El primer paso consiste en aplicar los conceptos de categoría, obteniendo condiciones para que una aplicación lineal sea casi-abierta.

Lema VII.1.2 . *Sean X, Y EVT y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es casi-abierta.*

El siguiente hecho nos muestra que en ciertas situaciones, la complitud del espacio de partida y la continuidad de la aplicación lineal, las aplicaciones casi-abiertas son abiertas.

Lema VII.1.3 . *Sea X un $F-$espacio, Y un EVT y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, continua y casiabierta. Entonces T es abierta. En consecuencia, $T(X) = Y$ e Y es un $F-$espacio.*

Enlazando los dos hechos anteriores se obtiene:

Proposición VII.1.4. *Sea X un $F-$espacio, Y un EVT y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal y continua. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $T(X) = Y$, T es abierta e Y es un $F-$espacio.*

Si ahora aplicamos el teorema anterior con hipótesis naturales, esto es, si se sabe de entrada que T es sobreyectiva e Y es un $F-$espacio, llegamos a la conclusión deseada.

Corolario VII.1.5.*(Teorema de la aplicación abierta para $F-$espacios) Si X, Y son $F-$espacios, toda aplicación lineal, continua y sobreyectiva de X en Y es abierta.*

Conviene observar que el resultado anterior sigue siendo válido cuando el espacio Y es metrizable y de segunda categoría en sí mismo, cosa que puede ocurrir sin que Y sea un $F-$espacio.

Al igual que en el caso de los espacios normados podemos añadir al resultado anterior la hipótesis de inyectividad, obteniendo:

Corolario VII.1.6.*(Teorema de los isomorfismos de Banach) Toda biyección lineal y continua entre dos $F-$espacios es un isomorfismo. Equivalentemente, si un espacio vectorial X es un $F-$espacio para dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ tales que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

La equivalencia del resultado anterior con el teorema de la aplicación abierta se deduce fácilmente de la factorización canónica de una aplicación lineal.

Si ahora eliminamos la sobreyectividad del teorema de la aplicación abierta obtenemos la siguiente caracterización de los homomorfismos.

Corolario VII.1.7 . *Sean X, Y $F-$espacios y $T \in L(X,Y)$. Entonces T es un* **homomorfismo** *(esto es, T es abierta sobre su imagen) si, y sólo si, $T(X)$ es cerrado en Y.*

Como consecuencia inmediata del teorema de la aplicación abierta incluimos el siguiente hecho sobre complementación de subespacios.

Corolario VII.1.8 . *Sea X un $F-$espacio y supongamos que X descompone en suma directa (algebraica) de dos subespacios cerrados Y, Z. Entonces X es suma topológico-directa de Y con Z.*

Pasamos ya a una nueva reformulación del teorema de la aplicación abierta, que no merece motivación, puesto que ya es conocida en el ambiente de los espacios normados.

Teorema VII.1.9 .*(de la gráfica cerrada) Si X, Y son $F-$espacios, entonces toda aplicación lineal con gráfica cerrada de X en Y es continua.*

Recíprocamente, admitiendo el Teorema de la gráfica cerrada, si X e Y son $F-$espacios y T es una biyección lineal continua de X sobre Y entonces T^{-1} tiene gráfica cerrada, luego es continua. Salvo un obvio paso a cociente comprobamos también que el Teorema de la aplicación abierta se deduce del de la gráfica cerrada. Este último abre nuevos caminos para conseguir aplicaciones interesantes de este principio fundamental del Análisis Funcional ya iniciadas tímidamente en nuestro cuarto capítulo. Supongamos que X e Y son F-espacios, notemos $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$ a sus respectivas topologías de F-espacio y supongamos que disponemos de una topología de Hausdorff $\mathcal{T}$ en Y, tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_Y$ ($\mathcal{T}$ no tiene por qué ser una topología vectorial, aunque en la mayoría de las aplicaciones prácticas sí lo es). Si una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ es continua para las topologías $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}$, su gráfica será cerrada para dichas topologías, luego también lo será para las topologías $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$ y el Teorema de la gráfica cerrada nos permite concluir que T es continua para las topologías $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$. La situación anterior se presenta con tanta frecuencia que ha merecido un nombre especial:

Definición VII.1.10 . *En lo sucesivo, la letra H denotará un espacio vectorial provisto de una topología de Hausdorff. Llamaremos* **FH-espacio** *(F por Fréchet, H por Hausdorff) a todo F-espacio X tal que exista una aplicación lineal $I : X \longrightarrow H$, que sea inyectiva y continua. Es natural identificar X con $I(X)$ (como espacios vectoriales) y consideramos por tanto a X como subespacio vectorial de H; para evitar confusiones, precisemos que en X se considera siempre la topología que le convierte en F-espacio, mientras que la topología de H podría incluso no ser siquiera una topología vectorial. El tipo particular más interesante de*

FH-espacio se presenta cuando H es el EVT producto $\mathbb{K}^\Lambda$ para un cierto conjunto no vacío Λ. Un F-espacio X es un FH-espacio para $H = \mathbb{K}^\Lambda$ si, y sólo si, existe una familia $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de funcionales lineales continuos en X, que separa puntos, esto es, tal que $\cap_{\lambda\in\Lambda} \ker f_\lambda = \{0\}$. Un **FK-espacio** *es, por definición un FH-espacio para $H = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, esto es, un F-espacio en el que existe una familia numerable de funcionales lineales continuos que separa puntos. En términos más sugestivos, un FK-espacio es un F-espacio X, cuyos elementos son sucesiones y tal que, para cada número natural n, la aplicación "coordenada", $x \to x(n)$, que a cada sucesión $x \in X$ hace corresponder su n-ésimo término $x(n) \in \mathbb{K}$, es un funcional lineal continuo.*

Ejemplos-.

(i) Los espacios de sucesiones, c_0, c y ℓ_p para $0 < p \leq \infty$ son FK-espacios.

(ii) El espacio $C[0,1]$ es un FK-espacio; si $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una enumeración del conjunto de los números racionales del intervalo $[0,1]$, los funcionales lineales continuos $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ dados por:

$$f_n(x) = x(t_n) \qquad (x \in C[0,1], n \in \mathbb{N})$$

separan puntos. Análogamente se comprueba que si L es un espacio topológico localmente compacto, de Hausdorff, separable, entonces $C_0(L)$ es un FK-espacio. Si L no es separable, $C_0(L)$ es un FH-espacio para $H = \mathbb{K}^\Lambda$ donde Λ es cualquier subconjunto denso de L. Análogamente también, $\mathcal{C}(\Omega)$ (Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$), con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, es un FK-espacio.

(iii) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Consideremos el espacio $L_0(\mu)$ de las (clases de equivalencia de) funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ con la topología de la convergencia en medida. Para $0 < p \leq \infty$, $L_p(\mu)$ es un FH-espacio, con $H = L_0(\mu)$. Ello se debe a que la convergencia en $L_p(\mu)$ implica la convergencia en medida.

Los comentarios previos a la definición anterior se resumen en el siguiente enunciado:

Corolario VII.1.11 . *Sea X un F-espacio, H un espacio vectorial provisto de una topología de Hausdorff e Y un FH-espacio. Una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ es continua (para las topologías de F-espacio) si, y sólo si, es continua como aplicación de X en H.*

Como caso particular obtenemos lo siguiente:

Teorema VII.1.12. *Sea H un espacio vectorial provisto de una topología de Hausdorff y sean X e Y dos FH-espacios, con $X \subset Y$. Entonces:*

i) *La topología de X contiene a la inducida por Y.*

ii) *Ambas topologías coinciden si, y sólo si, X es cerrado en Y.*

iii) *Si $X \neq Y$, entonces X es de primera categoría en Y.*

Corolario VII.1.13 . *Para $0 < r < s \leq \infty$, la topología inducida por ℓ_s en ℓ_r está contenida estrictamente en la natural de ℓ_r, y ℓ_r es de primera categoría en ℓ_s. Además, el conjunto $\cup_{p\in\mathbb{R}^+}\ell_p$ es de primera categoría en el espacio c_0.*

La sucesión $\left\{\frac{1}{\log\,(n+1)}\right\}$ es un ejemplo de sucesión $x \in c_0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p = \infty$ para todo $p > 0$. Obsérvese sin embargo la facilidad con que se ha obtenido la "abundancia"de tales ejemplos.

Análogamente, si tomamos en el teorema anterior, $H = L_0[0,1]$, $X = L_s[0,1]$, $Y = L_r[0,1]$ con $0 \leq r < s \leq \infty$ obtenemos:

Corolario VII.1.14 . *Para $0 \leq r < s \leq \infty$, la topología inducida por $L_r[0,1]$ en $L_s[0,1]$ está contenida estrictamente en la natural de $L_s[0,1]$ y $L_s[0,1]$ es de primera categoría en $L_r[0,1]$. Además, $\cup_{s\in\mathbb{R}^+}L_s[0,1]$ es un conjunto de primera categoría en $L_0[0,1]$.*

La segunda parte del corolario anterior nos da también la “abundancia” de funciones medibles $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que $\int_0^1 |f(t)|^s \, dt = \infty$ para todo $s \in \mathbb{R}^+$. Para su deducción a partir de la primera parte usamos ahora que $\bigcup_{s\in\mathbb{R}^+} L_s[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_{\frac{1}{n}}[0,1]$.

Ya sabemos que dos topologías de FH-espacio en un mismo espacio vectorial han de coincidir. Equivalentemente, fijado H, un subespacio vectorial de H admite a lo sumo una topología que le convierta en FH-espacio.

Enunciamos este resultado poniendo claramente de manifiesto que supone una sustancial mejora del Teorema de los isomorfismos de Banach:

Corolario VII.1.15 . *Supongamos que un espacio vectorial X es un F-espacio para dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$. Si la topología $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ es de Hausdorff, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. En particular, si X es un espacio vectorial y $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de funcionales lineales en X que separa puntos, existe a lo sumo una topología en X que convierta a X en un F-espacio, haciendo que f_λ sea continuo para todo $\lambda \in \Lambda$. En particular, si un espacio vectorial X es un FK-espacio para dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Nuevamente la aplicación a espacios clásicos resulta interesante:

Corolario VII.1.16 .

i) *Para $0 < p \leq \infty$, la topología de ℓ_p es la única topología de F-espacio en ℓ_p que hace que la aplicación $x \rightarrow x(n)$ $(x \in \ell_p)$ sea continua para todo $n \in \mathbb{N}$.*

ii) *Para $0 \leq p \leq \infty$, la topología de $L_p[0,1]$ es la única topología de F-espacio en $L_p[0,1]$ con la propiedad de que la convergencia en dicha topología implique la convergencia en medida.*

iii) *Si L es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, la topología de la norma en $C_0(L)$ es la única topología de F-espacio en $C_0(L)$ que hace que la aplicación $x \rightarrow x(t)$ $(x \in C_0(L))$ sea continua para todo $t \in L$.*

Pero más interesante aún que los resultados anteriores resulta la facilidad con que podemos estudiar la continuidad de una aplicación lineal entre FH-espacios. Destacamos un resultado para FK-espacios que nos parece suficientemente ilustrativo. Probamos previamente lo siguiente:

Lema VII.1.17. *Sea X un FK-espacio y $\{a_k\}$ una sucesión de escalares. Supongamos que para cada $x \in X$ la serie $\sum_{k\geq 1} a_k x(k)$ es convergente. Entonces, definiendo*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x(k) \qquad (x \in X)$$

se obtiene un funcional lineal continuo en X.

Teorema VII.1.18 . *Sean X e Y dos FK-espacios y $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ una aplicación. Supongamos que para $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{k\geq 1} a(n,k)x(k)$ es convergente y que notando*

$$[T(x)](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(n,k)x(k) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

se tiene que $T(x) \in Y$. Entonces T es una aplicación lineal continua de X en Y.

El resultado anterior se comprende mejor viendo la función A como una matriz doblemente infinita. Es natural asociar a una tal matriz la aplicación que a cada sucesión $x \in X$ asocia el producto Ax donde x se escribe en forma de vector columna infinito, y para ello es necesario que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{k\geq 1} a(n,k)x(k)$ sea convergente. Si ello ocurre y la aplicación $x \to Ax$ toma valores en Y, tenemos una aplicación de X en Y. El teorema afirma, por tanto, que siempre que una matriz A nos permita definir una aplicación lineal de un FK-espacio X en otro Y, tal aplicación es, automáticamente, continua. En suma, toda aplicación lineal "definida matricialmente" entre dos FK-espacios es continua.

VII.2 El teorema de Banach-Steinhauss en EVT

Siguiendo la línea de la sección anterior, proponemos ahora al alumno obtener un teorema de Banach-Steinhauss para alguna clase de EVT. Para esto, tendremos en cuenta que la hipótesis de acotación puntual tiene sentido en general, mientras que la acotación en norma de una familia de operadores equivale a la acotación uniforme en cada subconjunto acotado del espacio de partida, o bien a la equicontinuidad. Empezamos aclarando la relación entre estos conceptos para EVT generales.

Proposición VII.2.19. *Sean X e Y dos EVT y Φ una familia de aplicaciones lineales de X en Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Φ *es equicontinua en cero.*

ii) Φ *es puntualmente equicontinua.*

iii) Φ *es uniformemente equicontinua.*

Cuando se verifican las afirmaciones anteriores, decimos simplemente que la familia Φ es **equicontinua***, o que Φ es un subconjunto equicontinuo de $L(X,Y)$.*

Proposición VII.2.20. *Sean X e Y dos EVT y Φ una familia de aplicaciones lineales de X en Y. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

i) Φ *está uniformemente acotada en un entorno de cero, esto es, existe un entorno de cero U en X tal que el conjunto*

$$\{T(x) : \quad x \in U,\ T \in \Phi\}$$

es acotado en Y.

ii) Φ *es equicontinua, esto es, $\bigcap_{T\in\Phi} T^{-1}(V)$ es un entorno de cero en X para cada entorno de cero V en Y.*

iii) Φ *está uniformemente acotada en cada subconjunto acotado de* X*, esto es, si* B *es un subconjunto acotado de* X*, el conjunto*

$$\{T(x) : \quad x \in B, \ T \in \Phi\}$$

es acotado en Y*.*

Se verifica siempre que i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii)*. Si* X *es localmente acotado, entonces* iii) $\Rightarrow$ i) *y si* X *es semimetrizable, entonces* iii) $\Rightarrow$ ii)*. Si* Y *es localmente acotado, se tiene que* ii) $\Rightarrow$ i)*. Finalmente, si* X *e* Y *son espacios normados cualquiera de las anteriores afirmaciones equivale a que* Φ *sea un conjunto acotado (en norma) en* $L(X,Y)$*.*

La más débil de las afirmaciones de la proposición anterior implica, obviamente, que la familia Φ está puntualmente acotada. Pasar de la acotación puntual a la uniforme sobre ciertos subconjuntos o a la equicontinuidad, con ciertas hipótesis sobre los espacios X e Y, es la idea común a todas las versiones del Principio de acotación uniforme (de ahí su nombre) o del Teorema de Banach-Steinhaus. La demostración del teorema de Banach-Steinhauss del que disponemos para espacios normados se abstrae fácilmente para obtener la siguiente generalización:

Teorema VII.2.21*.(Un Teorema de Banach-Steinhaus para EVT) Sean* X *e* Y *dos EVT y* $\Phi \subset L(X,Y)$*. Consideremos el siguiente subespacio de* X*:*

$$X_0 = \{x \in X : \Phi \text{ está acotado en } x\} \ .$$

Si X_0 *es de segunda categoría en* X*, entonces* Φ *es equicontinuo y, en particular,* $X_0 = X$*.*

La hipótesis de que X_0 sea de segunda categoría en X es en la práctica difícil de comprobar. Aunque se pierda generalidad, es más cómodo suponer, a priori, que $X_0 = X$ y asegurarse de que X es de segunda categoría, vía Teorema de Baire:

Corolario VII.2.22 .*(Teorema de Banach-Steinhaus para F-espacios) Sea X un F-espacio, Y un EVT y $\Phi \subset L(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Φ *es equicontinuo.*

ii) Φ *está uniformemente acotado en cada subconjunto acotado de X.*

iii) Φ *está puntualmente acotado.*

No sabemos si el resultado anterior se puede obtener como consecuencia del teorema de la gráfica cerrada, tal y como lo hicimos para el caso de los espacios de Banach. No obstante, si se añade que el espacio de llegada sea un $F-$espacio, las ideas expuestas en el caso de los espacios de Banach permiten obtener el resultado a partir del teorema de la gráfica cerrada.

Con vistas a obtener el corolario más importante del Teorema de Banach-Steinhaus consideramos el siguiente hecho previo.

Lema VII.2.23 . *Sea X un EVT, Y un EVT separado, Φ un subconjunto equicontinuo de $L(X,Y)$ y $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red de elementos de Φ que converge puntualmente en X a una aplicación $T : X \longrightarrow Y$. Entonces $T \in L(X,Y)$.*

La idea es aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus para conseguir la hipótesis más restrictiva del lema anterior, la equicontinuidad. Lamentablemente (o afortunadamente, según se mire) una red puntualmente convergente puede no estar puntualmente acotada. Para una sucesión las cosas sí van bien y obtenemos:

Corolario VII.2.24 .*(Teorema de cierre de Steinhaus) Sea X un EVT de segunda categoría, Y un EVT separado y $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(X,Y)$ que converge puntualmente en X. Definiendo*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \qquad (x \in X)$$

se tiene que $T \in L(X,Y)$.

Al igual que hicimos en el ambiente de los espacios normados consideramos la siguiente aplicación que nos da condiciones suficientes para asegurar la continuidad de una aplicación bilineal a partir de la continuidad separada.

Teorema VII.2.25. *Sea X un F-espacio, Y un EVT metrizable, Z un EVT arbitrario y $T : X \times Y \longrightarrow Z$ una aplicación bilineal. Si T es separadamente continua, entonces T es continua.*

Concluimos este tema tratando una cuestión que se suscita de forma natural a partir del Teorema de cierre de Steinhaus, en el ambiente particular de los espacios de Banach. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(X,Y)$ que converge puntualmente a una aplicación T. Sabemos que $T \in L(X,Y)$ pero ¿podemos afirmar algo acerca de la posible convergencia de la sucesión $\{T_n\}$ a T en la norma de $L(X,Y)$? La respuesta es negativa:

Ejemplo.- *Definamos:*

$$f_n(x) = x(n) \qquad (x \in c_0, n \in \mathbb{N}).$$

Entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de elementos de c_0^* que converge puntualmente a cero, mientras $\|f_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La siguiente observación es pertinente con este ejemplo. Si X es un espacio de Banach y $\{f_n\}$ es una sucesión de elementos en la esfera unidad de X^* que converge puntualmente a cero en X, dicha convergencia ha de ser "arbitrariamente lenta", como lo es en el ejemplo anterior. Más concretamente, no puede existir una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ de números positivos convergente a cero tal que $\left\{\frac{f_n(x)}{\varepsilon_n}\right\}$ esté acotada para cada $x \in X$, pues si tal cosa ocurriese el Teorema de Banach-Steinhaus nos diría que la sucesión $\left\{\frac{\|f_n\|}{\varepsilon_n}\right\} = \left\{\frac{1}{\varepsilon_n}\right\}$ estaría acotada.

Así pues no podemos pasar de la convergencia puntual a la uniforme con la misma facilidad que hemos pasado de la acotación puntual a la uniforme. No obstante, algo se puede hacer, como muestra el siguiente resultado.

Proposición VII.2.26. *Sean X e Y dos EVT, Φ un subconjunto equicontinuo de $L(X,Y)$ y $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red de elementos de Φ. Si $\{T_\lambda\}$ converge puntualmente en X, entonces $\{T_\lambda\}$ converge uniformemente en cada subconjunto precompacto de X.*

VII.3 Más teoremas de separación. El teorema de Krein-Milman

Al igual que en el caso de los espacios normados, si X es un EVT, llamaremos **dual topológico** o simplemente **dual** de X al espacio de las aplicaciones lineales y continuas de X en el cuerpo de escalares. Asímismo, $L(X,Y)$ denotará el espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas entre dos EVT X e Y.

A diferencia de lo que ocurría en el caso de los espacios normados, el dual de un EVT puede muy bien ser el espacio vectorial formado por el cero, como ocurre por ejemplo con los espacios ℓ_p con $0 < p < 1$. No obstante, existe una condición necesaria para que esta patología desaparezca.

Proposición VII.3.27 . *Sea X un EVT y supongamos que existe $f \in X^*$ no idénticamente nulo. Entonces existe U entorno de cero convexo en X de forma que $U \neq X$.*

Por supuesto, basta hacer $U = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$ para obtener lo que se quiere.

La simple observación anterior nos va a permitir, con la ayuda del teorema de Hahn-Banach, caracterizar la no trivialidad del dual de un EVT.

Proposición VII.3.28 . *Sea X un EVT. Si U es un entorno de cero convexo en X y $x_0 \in X \setminus U$ entonces existe $f \in X^*$ con $f(x_0) \neq 0$.*

Por supuesto, basta considerar el caso real. Ya en este caso, consideremos p_U el funcional de Minkowski en X asociado a U, que es un funcional sublineal. Hagamos $M =< x_0 >$, el subespacio generado por el vector x_0 y definamos $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $g(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$. Así g es lineal y está dominado por p_U. Como $x_0 \in X \setminus U$ sabemos que $\{x \in X : p(x) < 1\} \subset U$, con lo que $g(x_0) \neq 0$.

Podemos ahora aplicar el teorema de Hahn-Banach obteniendo un funcional lineal en X, f, que extiende a g, lo que nos dice que $f(x_0) \neq 0$, y todavía dominado por p_U. Dicha dominación y el hecho de que $p_U(x) \leq 1$ para cada $x \in U$ nos dice que f está acotado en un entorno equilibrado contenido en U, por tanto f es continuo, es decir $f \in X^*$.

Después de caracterizar la no trivialidad del dual de un EVT, conviene preguntarse cuándo dicho dual separa los puntos de X, hecho más que deseable como así ocurría en el caso de los espacios normados. Es totalmente elemental llegar a la conclusión de que el dual de un EVT X separa los puntos de X si, y sólo si, la intersección de todos los entornos de cero convexos en X se reduce al cero. Debe quedar entonces claro que la clase propicia para tener una teoría de dualidad dentro del mundo de los EVT es la de los espacios localmente convexos y separados.

Corolario VII.3.29 . *Sea X un espacio localmente convexo separado. Entonces $X^* \neq \{0\}$ y X^* separa los puntos de X.*

El siguiente resultado, otra vez consecuencia del teorema de Hahn-Banach, debe quedar como ejercicio para el alumno.

Teorema VII.3.30. *Sea X un espacio localmente convexo y M un subespacio de X. Si $f \in M^*$ entonces existe $g \in X^*$ extendiendo a f.*

Obtenemos ahora algunas consecuencias del teorema de extensión anterior.

Corolario VII.3.31 . *Sea X un espacio localmente convexo y M un subespacio de X. Denotando $M^0 = \{f \in X^* : f(m) = 0 \ \forall m \in M\}$ se tiene que:*

(i) La aplicación de X^*/M^0 en M^*, dada por $f + M^0 \to f| \ M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(ii) La aplicación de $(X/M)^*$ *en* M^0 *dada por* $\phi \to \phi \circ \pi$, *donde* π *es la proyección canónica de* X *al cociente* X/M, *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Aunque la segunda afirmación del resultado anterior no es consecuencia del teorema de extensión, la incluimos aquí por razones de complitud.

Corolario VII.3.32 . *Sea* X *un espacio localmente convexo separado y* M *un subespacio de* X. *Entonces* $\overline{M} = \cap_{f \in M^0} \mathrm{Ker} f$. *En consecuencia,* M *es denso en* X *si, y sólo si,* $M^0 = \{0\}$.

Corolario VII.3.33 . *Sea* X *un espacio locamente convexo separado. Entonces todo subespacio finito-dimensional de* X *está complementado.*

Hasta el momento, siguiendo lo expuesto en el caso de los espacios normados en el segundo capítulo, hemos obtenido un teorema de extensión de funcionales lineales continuos en espacios localmente convexos y separados así como sus consecuencias más directas. Ahora el alumno debe plantearse si es posible obtener también algún teorema de separación en el ambiente de los espacios localmente convexos o en EVT generales. Conviene recordar que ya, en el segundo capítulo tuvimos ocasión de presentar un teorema de separación de conjuntos convexos totalmente algebraico, donde la topología no aparecía, II.2.34. De dicho resultado obtendremos ahora los siguientes teoremas de separación.

Teorema VII.3.34 .*(de separación en EVT) Sea* X *un EVT y* A, B *subconjuntos convexos no vacíos de* X. *Si el interior de* A *es no vacío y disjunto con* B *entonces existe* $f \in X^*$, *no idénticamente nulo, y un escalar real* α *tales que*

$$\mathrm{Re} f(a) \leq \alpha \mathrm{Re} f(b) \ \forall a \in A, b \in B.$$

Además, si a *es un punto del interior de* A *la primera desigualdad anterior es estricta.*

Como consecuencia inmediata obtenemos la existencia de *"hiperplanos soporte"*.

Corolario VII.3.35 . *Sea X un EVT y A un subconjunto convexo, cerrado y con interior no vacío de X. Si x_0 es un punto frontera de A entonces existe $f \in X^*$, no idénticamente nulo, tal que* $\mathrm{Re}f(a) \leq \mathrm{Re}f(x_0)$ $\forall a \in A$. *Es decir, el hiperplano afín de ecuación* $\mathrm{Re}f(x) = \mathrm{Re}f(x_0)$ "pasa" *por x_0 y* "deja a un lado" *al conjunto A.*

Teorema VII.3.36.*(de separación en espacios localmente convexos) Sea X un espacio localmente convexo y A, B subconjuntos disjuntos, convexos y no vacíos de X. Si B es cerrado y A es compacto, entonces existe $f \in X^*$ y escalares reales α, β tales que*

$$\mathrm{Re}f(a) \leq \alpha < \beta \leq \mathrm{Re}f(b) \ \forall a \in A, b \in B.$$

Como consecuencia, se deduce sin dificultad que el cierre de un subconjunto convexo en un espacio localmente convexo depende exclusivamente del dual.

Corolario VII.3.37 . *Sea X un espacio localmente convexo y B un subconjunto convexo no vacío de X. Entonces*

$$\overline{B} = \{x \in X : sup\{\mathrm{Re}f(b) : b \in B\} \geq \mathrm{Re}f(x) \ \forall f \in X^*\}.$$

Hasta aquí, podemos decir que lo hecho no es más que generalizar algunos de los resultados obtenidos en el segundo capítulo de nuestro proyecto y, por tanto, el alumno debe ser otra vez quien tenga que realizar la mayor parte del trabajo.

Pretendemos ahora presentar una primera aplicación del teorema de Hahn-Banach en nuestro nuevo ambiente. En concreto, con la ayuda del teorema de representación de Riesz, el teorema de Hahn-Banach y algunos resultados de variable compleja se puede describir el dual del espacio $H(\Omega)$ de las funciones complejas holomorfas sobre el abierto del plano complejo Ω. El espacio $H(\Omega)$ es un subespacio cerrado del $F-$espacio localmente convexo y no normable $C(\Omega)$ dotado de la convergencia uniforme sobre compactos, por tanto, $H(\Omega)$ vuelve a ser un F-espacio localmente convexo. Naturalmente el dual de $H(\Omega)$ se identifica como sabemos con el cociente $C(\Omega)^*/H(\Omega)^0$, con lo que parte del trabajo se hará de hecho en el espacio $C(\Omega)$.

Teorema VII.3.38 . *Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo. Si $\phi \in H(\Omega)^*$ entonces existen un compacto $K \subset \Omega$, una medida $\mu \in M(K)$ y un ciclo Γ que rodea K en Ω tales que:*

$$\phi(f) = -\int_\Gamma f(\omega)\widetilde{\mu}(\omega)d\omega \ \forall f \in H(\Omega),$$

donde $\widetilde{\mu}$ es la transformada de Cauchy de μ, es decir,

$$\widetilde{\mu}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{d\mu(z)}{z-\omega} \ \forall \omega \in \mathbb{C} \setminus K.$$

Como consecuencia se obtiene el siguiente resultado clásico de variable compleja, donde se utiliza que un subconjunto de $C(\Omega)$ es relativamente compacto si, y sólo si, los elementos de dicho conjunto forman una familia de funciones puntualmente acotada y puntualmente equicontinua, una fácil extensión del teorema de Ascoli-Arzel ya presentado para el caso del espacio de Banach $C(K)$.

Corolario VII.3.39 . *Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo y supongamos que un subconjunto E de $\mathbb{C}\setminus\Omega$ tiene intersección no vacía con cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Entonces las funciones racionales cuyos polos pertenecen a E forman un subconjunto denso en $H(\Omega)$, para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.*

Para finalizar el tema obtendremos el teorema de Krein-Milman, una nueva consecuencia de los teoremas de separación del que se puede sacar bastante partido como se verá más adelante y que nos da condiciones suficientes para que un subconjunto de un EVT posea puntos *"extremos"*, concepto que pasamos a definir.

Definición VII.3.40 . *Sea X un espacio vectorial, $A \subset X$ y $a \in A$. Se dice que a es un punto* **extremo** *del conjunto A si la única forma de expresar a como combinación convexa de puntos de A es la trivial, esto es, si siempre que $x, y \in A$, $t \in]0,1[$ y se verifique $a = tx + (1-t)y$ se tiene que $x = y = a$. Igualmente diremos que un subconjunto B de A es una* **cara** *de A si dados $x, y \in A$, $t \in]0,1[$ tales que $tx + (1-t)y \in B$ se verifica que $x, y \in B$. El conjunto de los puntos extremos del conjunto A se denotará por $Ext(A)$.*

Es claro que el conjunto formado por un punto extremo de A es una cara de A. Es igualmente fácil observar que la propiedad *"ser cara de"* es transitiva.

El caso particular más interesante de la definición anterior se presenta cuando se trata con conjuntos convexos pues en tal caso tenemos varias reformulaciones equivalentes del concepto recién presentado.

Proposición VII.3.41 . *Sea X un espacio vectorial, A un subconjunto convexo de X y $a \in A$. Entonces son equivalentes:*

(i) $a \in Ext(A)$.

(ii) $a = \frac{x+y}{2},\ x, y \in A \Rightarrow x = y = a$.

(iii) $x \in X,\ a + x, a - x \in A \Rightarrow x = 0$.

(iv) Si F es un subconjunto finito de A y $a \in co(F)$ entonces $a \in F$.

Por supuesto, la pregunta que nos planteamos es la existencia de puntos extremos para un subconjunto de un EVT.

Teorema VII.3.42 .*(Krein-Milman) Sea X un espacio localmente convexo y separado. Si K es un subconjunto compacto y no vacío de X entonces $K \subset \overline{co(Ext(K))}$. Además, si K es convexo se da la igualdad en la inclusión anterior.*

Como ya hemos dicho el conjunto formado por un punto extremo es una cara del conjunto ambiente, pero además esa cara es minimal. La demostración del resultado anterior se centra entonces en encontrar caras minimales del conjunto K. El lema de Zorn sería entonces aplicable para tal fin y nos quedaría ver que toda cara minimal debe ser un punto extremo. Por supuesto, cuando decimos cara se debe entender no vacía (en otro caso carecería de sentido) y además cerrada, como veremos a continuación.

Consideramos $\mathcal{F}$ el conjunto formado por las caras cerradas de K con el orden natural de la inclusión, al menos K es un elemento de $\mathcal{F}$.

La compacidad de K y la transitividad de la propiedad *"ser cara de"* permiten deducir que el orden de la inclusión en $\mathcal{F}$ es inductivo. Ahora el lema de Zorn nos dice que toda cara cerrada de K contiene otra minimal. Sea, pues, F una cara cerrada minimal de K y mostremos que que se reduce a un punto. En caso contrario, existirían $x, y \in F,\ x \neq y$ con lo que existe $f \in X^*$ de forma que $f(x) \neq f(y)$ gracias a que X^* separa los puntos de X. Ahora la compacidad de F nos asegura la existencia de $M = max\{\text{Re}f(a) : a \in F\}$. La observación crucial ahora es que el conjunto $L = \{a \in F : \text{Re}f(a) = M\}$ es una cara cerrada de F, por tanto también cara de K, estrictamente contenida en F, lo que contradice su carácter minimal en $\mathcal{F}$. En consecuencia, se ha probado que **toda cara cerrada de K contiene un punto extremo de K.**

La inclusión $K \subset \overline{co(Ext(K))}$ se basa otra vez en la misma idea anterior. Si dicha inclusión no se diera, existiría $x \in K,\ x \notin \overline{co(Ext(K))}$. Ahora el teorema de separación en espacios localmente convexos nos dice que existen $f \in X^*$ de forma que

$$sup\text{Re}f(\overline{co(Ext(K))}) < \text{Re}f(x).$$

Ahora, al igual que antes, el conjunto

$$E = \{a \in K : \text{Re}f(a) = max\text{Re}f(K)\}$$

es una cara cerrada de K de forma que $E \cap \overline{co(Ext(K))} = \emptyset$. En particular, E no corta al conjunto $Ext(K)$, una contradicción pues ya sabemos que E debe contener extremos de K.

Nos parece conveniente en este momento observar que para la existencia de puntos extremos en un conjunto compacto y no vacío de un EVT X basta que X^* separe los puntos de X, puesto que es sólo eso lo que hemos utilizado. En el caso de que K sea convexo, para obtener la igualdad que asegura el teorema anterior basta también con la misma hipótesis. Para ello hay que involucrar la topología débil del EVT X y separar los dos conjuntos !compactos! K y $\overline{co(Ext(K))}$ en el espacio localmente convexo X con su topología débil obteniendo así un resultado ligeramente más general. No obstante, el resultado presentado anteriormente es más que suficiente para obtener importantes consecuencias como mostraremos más adelante.

Los siguientes ejemplos muestran que la hipótesis de compacidad no puede suprimirse en el teorema anterior, aunque tampoco puede decirse que sea una condición necesaria.

Ejemplos.-

(i) La bola cerrada unidad del espacio de Banach c_0 (un subconjunto cerrado, convexo y acotado) carece de puntos extremos. Para ello, si $x \in B_{c_0}$ es claro que $x + e_n, x - e_n \in B_{c_0}$ para n suficientemente grande, donde $\{e_n\}$ es la base canónica de c_0.

(ii) Es fácil comprobar que

$$Ext(B_{\ell_1}) = \{\lambda e_n : n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1\},$$

donde ahora $\{e_n\}$ es la base canónica de ℓ_1. En consecuencia se tiene que $B_{\ell_1} = \overline{co(Ext(B_{\ell_1}))}$.

Pasamos ahora a considerar un *"recíproco"* del teorema de Krein-Milman, útil para detectar puntos extremos de un conjunto convexo y compacto, que nos dice, en algún sentido, que los puntos extremos proporcionan la forma más sencilla de generar un conjunto por envolvente convexo cerrada. Para su demostración es crucial observar que la envolvente convexa (sin necesidad de cerrar) de la unión finita de compactos es compacta.

Teorema VII.3.43 .*(Krein-Milman revertido) Sea X un espacio localmente convexo y separado y A un subconjunto convexo, compacto y no vacío de X. Si E es un subconjunto de A tal que $A = \overline{co}(E)$ entonces $Ext(A) \subset \overline{E}$.*

Comenzamos ahora con algunas aplicaciones del teorema de Krein-Milman. La primera de ellas es consecuencia del análisis de la demostración de la existencia de puntos extremos en dicho teorema.

Teorema VII.3.44 .*(Principio de optimización de Bauer) Sea X un EVT de forma que X^* separa los puntos de X, K un subconjunto convexo, compacto y no vacío de X y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y semicontinua superiormente (resp. cóncava y semicontinua inferiormene). Entonces f alcanza su máximo (resp. mínimo) en un punto extremo de K.*

Por supuesto, la información novedosa del resultado anterior no estriba en la existencia de máximo (resp. mínimo) sino en el hecho de que éste deba alcanzarse en un punto extremo.

Involucraremos ahora el teorema de Banach-Alaoglú, junto con el de Krein-Milman, puesto que nos proporciona conjuntos compactos para la topología localmene convexa débil$-*$ de un espacio de Banach dual. La razón de no haber presentado el teorema de Krein-Milman en nuestro tercer capítulo para obtener allí los resultados que presentaremos a continuación se debe a que en aquel momento hubiéramos tenido que hacer un resultado para cada topología conocida hasta el momento en un espacio de Banach.

Como consecuencia del teorema de Krein-Milman, Banach-Alaoglú y el Principio de optimización de Bauer obtenemos.

Teorema VII.3.45 . *Los puntos extremos de la bola unidad del dual de un espacio normado X separan los puntos de X. En concreto, para cada $x \in X$ existe $f \in Ext(B_{X^*})$ tal que $f(x) = \|x\|$.*

Obtenemos de inmediato ahora una aplicación curiosa.

Corolario VII.3.46 . *Si X es un espacio normado, el operador identidad es un punto extremo de la bola unidad del espacio $L(X)$.*

En el capítulo que sigue encontraremos más aplicaciones de los teoremas de Krein-Milman y Banach-Alaoglú.

BIBLIOGRAFIA: Para las nuevas versiones de los teoremas de separación hemos seguido el texto de Berberian [3], aunque en [26] pueden encontrarse más versiones equivalentes. De éste texto hemos obtenido nuestro tratamiento del teorema de Krein-Milman. Lo referente al teorema de Banach-Steinhauss se puede encontrar en forma análoga en [58], [57], [43] y [45], siendo éste último el que hemos seguido. Por último, otra vez los textos de Wilansky [58] y [57] han sido los preferidos para los teoremas de la aplicación abierta y gráfica cerrada.

Capítulo VIII

DUALIDAD EN EVT.

Como ya pusimos de manifiesto en la introducción a la dualidad entre espacios normados en nuestro tercer capítulo, la utilidad de dicha teoría se centra en la interrelación de propiedades entre un espacio y su dual, así como la consideración de distintas topologías en un mismo espacio que den el mismo dual. Comenzamos presentando el concepto de par dual, que es el ambiente idóneo donde desarrollar la teoría hasta llegar a las topologías débiles en este ambiente más general y obtener el primer invariante de dualidad: el teorema del bipolar que era sólo conocido para subespacios. En el segundo tema se ofrece el teorema de Alaoglú-Bourbaki, generalización del ya conocido teorema de Banach-Alaoglú para espacios normados. En este momento obtenemos interesantes aplicaciones de éste último junto con el teorema de Krein-Milman, partiendo de la caracterización de los puntos extremos de la bola unidad de los espacios $C(K)$ *hasta llegar a obtener como consecuencia el teorema clásico de Banach-Stone, la compactificación de Stone-Cech y el teorema de Stone-Weierstrass. Los dos últimos temas de este capítulo pueden muy bien servir para que el alumno que lo desee tenga material sobre el que profundizar. Ellos se describen las topologías compatibles con un par dual y se llega a un nuevo invariante de dualidad: la acotación (teorema de Mackey). Por último, se presenta el teorema de complitud de Grothendieck que describe la completación de un espacio localmente convexo como un subespacio de funcionales sobre su dual, hecho totalmente inocente en el mundo de los espacios normados. Para terminar, se presenta el teorema de Krein-Smulian que da información nada trivial aún en el caso de los espacios de Banach, obteniendo como consecuencia una visión completa de las propiedades de la trasposición de aplicaciones lineales y continuas entre espacios de Banach.*

VIII.1 Pares duales

Parece ya suficiente motivación la lectura de los últimos resultados del tema anterior para desarrollar una teoría de dualidad en el marco de los espacios localmente convexos. Primeramente empezamos definiendo el ambiente general donde esta teoría se desarrollará.

Definición VIII.1.1 . *Un* **par dual** *es, por definición, un par de espacios vectoriales* (X, Y) *junto con una aplicación bilineal* $< ., . >$ *(***dualidad***) de* $X \times Y$ *en* $\mathbb{K}$ *que no es degenerada, en el sentido siguiente:*

(i) Si $x \in X$ *y* $< x, y >= 0$ *para cada* $y \in X$*, entonces* $x = 0$*.*

(ii) Si $y \in Y$ *y* $< x, y >= 0$ *para cada* $x \in X$*, entonces* $y = 0$*.*

Por supuesto, la ventaja del concepto anterior es la igualdad de condiciones en que se encuentran los espacios X e Y, al contrario de lo que ocurría hasta ahora al considerar un espacio X y trabajar con su dual X^*.

Para convencernos de que este grado de generalidad recoge lo que podemos entender que es la *"dualidad"* entre dos espacios mostramos los siguientes ejemplos:

(i) Si X es un espacio localmente convexo y X^* denota su dual topológico, podemos convertir al par (X, X^*) en un par dual definiendo $< x, f >= f(x)$ para cada $x \in X, f \in X^*$. Este par dual será llamado **canónico** de X, puesto que es el marco donde hemos trabajado hasta el momento.

(ii) Sea X un espacio vectorial e Y un subespacio de $X^\#$, el dual algebraico de X, esto es, un subespacio del espacio de las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{K}$. Si Y separa los puntos de X, es decir, si $\cap_{f \in Y} Ker f = \{0\}$, podemos convertir al par (X, Y) en un par dual definiendo $< x, f >= f(x)$ para cada $x \in X, f \in Y$.

Mostramos ahora que todo par dual responde al esquema de nuestro segundo ejemplo. Si (X,Y) es un par dual con dualidad $< .,. >$. Para cada $y \in Y$ definimos $\widetilde{y}$ la aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$ dada por $\widetilde{y}(x) =< x, y >$ para cada $x \in X$. Identificando cada $y \in Y$ con $\widetilde{y}$, podemos identificar a todos los efectos el espacio vectorial Y con el subespacio $\widetilde{Y} = \{\widetilde{y} : y \in Y\}$ del dual algebraico de X, gracias a la no degeneración de la función de dualidad. Este mismo hecho nos dice también que $\widetilde{Y}$ separa los puntos de X.

No obstante, sería aún más deseable que todo par dual también responda al esquema de nuestro primer ejemplo. Para tal fin, empezamos definiendo la topología débil, al igual que se hizo en el caso de los espacios normados, pero ahora en el ambiente de los pares duales.

Definición VIII.1.2 . *Sea (X,Y) un par dual con dualidad $< .,. >$. La topología* **débil** *en X asociada al par dual (X,Y) es, por definición, la topología inicial en X para los elementos de Y, que como sabemos se identifica con un subespacio del dual algebraico de X que separa puntos. Dicha topología será denotada por $\sigma(X,Y)$.*

El hecho de la intercambiabilidad de los dos espacios de un par dual hace que la anterior definición nos dé también una topología en la segunda coordenada del par, pero no insistiremos más sobre este hecho. Por otra parte, si para cada subconjunto finito $J \subset Y$ y para cada $\varepsilon > 0$ hacemos $U(J,\varepsilon) = \{x \in X : | < x, y > | \leq \varepsilon\}$ obtenemos una base de entornos de cero en X para la topología $\sigma(X,Y)$.

Teorema VIII.1.3 . *Sea (X,Y) un par dual con dualidad $< .,. >$. Entonces $(X, \sigma(X,Y))$ es un espacio localmente convexo y separado para el que se verifica que $(X, \sigma(X,Y))^* = Y$, donde dicha igualdad ha de entenderse como isomorfismo de espacios vectoriales.*

Viendo los elementos de Y como aplicaciones lineales de X en $\mathbb{K}$, como ya se dijo, la única parte no del todo directa del resultado anterior es obtener la inclusión $(X, \sigma(X,Y))^* \subset Y$. Para ello sea $f \in (X, \sigma(X,Y))^*$

y $U = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$ que es un entorno de cero en X para la topología $\sigma(X,Y)$. El hecho de que dicha topología sea inicial nos dice que podemos encontrar dentro de U un entorno de cero equilibrado básico para la misma topología, lo que nos lleva a la existencia de $y_1, \dots, y_n \in Y$ tales que $\cap_{i=1}^n Ker\widetilde{y}_i \subset Ker f$, de donde se deduce fácilmente lo que queremos.

Abstraemos a continuación lo de esencial que verifica la topología débil asociada a un par dual

Definición VIII.1.4. *Se dice que una topología $\mathcal{T}$ en X es* **compatible** *con el par dual (X,Y) si $\mathcal{T}$ es una topología localmente convexa tal que $(X,\mathcal{T})^* = Y$.*

Recogemos a continuación algunas propiedades de la topología débil asociada a un par dual, algunas de ellas ya obtenidas para el caso de los espacios normados.

Proposición VIII.1.5 . *Sea (X,Y) un par dual con dualidad $< .,. >$. Entonces se verifica:*

(i) $\sigma(X,Y)$ *es normable si, y sólo si, X, equivalentemente Y, es finito-dimensional.*

(ii) $\sigma(X,Y)$ *es metrizable si, y sólo si, Y tiene dimensión numerable.*

(iii) Una red $\{x_\lambda\}$ en X converge a $x \in X$, para la topología $\sigma(X,Y)$ si, y sólo si, la sucesión de escalares $\{< x_\lambda, y >\}$ converge a $< x, y >$ para cada $y \in Y$. Análogamente, $\{x_\lambda\}$ es $\sigma(X,Y)-$Cauchy si, y sólo si, la sucesión de escalares $\{< x_\lambda, y >\}$ es convergente para cada $y \in Y$.

(iv) Un subconjunto A de X es $\sigma(X,Y)-$acotado si, y sólo si, el conjunto de escalares $\{< a, y >: a \in A\}$ es acotado para cada $y \in Y$.

La formalización en el lenguaje de los pares duales del primer invariante de dualidad se consigue mediante la noción de *“polaridad”*, ya conocida en el ambiente de los espacios normados para subespacios. Introducimos ahora de forma general esta noción de la que existen dos tipos, ambos de interés.

Definición VIII.1.6 . *Sea (X, Y) un par dual y A un subconjunto no vacío de X. Se definen el* **polar real** *A^r y el* **polar absoluto** *A^0, de A mediante:*

$$A^r = \{y \in Y : \mathrm{Re} < a, y > \leq 1 \ \forall a \in A\},$$

$$A^0 = \{y \in Y : | < a, y > | \leq 1 \ \forall a \in A\},$$

.

Análogas definiciones se tienen para B^r y B^0, siendo ahora B un subconjunto de Y. En particular, para $A \subset X$, tienen sentido los **bipolares** A^{rr} y A^{00}, que vuelven a ser subconjuntos de X.

La siguiente observación es consecuencia de la definición anterior y de las propiedades de la topología débil asociada a un par dual: si (X, Y) es un par dual la familia de conjuntos $\{J^0 : J \subset Y, J \text{ finito}\}$ es una base de entornos de cero en X, para la topología $\sigma(X, Y)$.

Recogemos a continuación las propiedades elementales en relación con el concepto de polaridad.

Proposición VIII.1.7. *Sea (X, Y) un par dual y A un subconjunto no vacío de X.*

(i) *$A^0 = (DA)^r$. En particular, si A es equilibrado se tiene que $A^r = A^0$.*

(ii) *A^r es un subconjunto convexo de Y. Además, A^r es cerrado para cualquier topología en Y que sea compatible con el par dual (X, Y).*

(iii) *A^0 es un subconjunto* **absolutamente convexo**, *esto es, convexo y equilibrado, de Y. Además A^0 también es cerrado para cualquier topología en Y que sea compatible con el par dual (X, Y).*

(iv) *Si A es un cono, se tiene*

$$A^r = \{y \in Y : \mathrm{Re} < a, y > \leq 0 \ \forall a \in A\},$$

$$A^0 = \{y \in Y :< a, y >= 0 \ \forall a \in A\}.$$

En particular, las dos nociones de polaridad coinciden para subespacios con la que ya conocemos en el caso de los espacios normados.

(v) $A^r = [\overline{co}(A \cup \{0\})]^r$, $A^0 = [\overline{co}(DA)]^0$, *donde los cierres se toman en cualquier topología en X compatible con el par dual (X, Y).*

(vi) *Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de X, se tiene*

$$(\cup_{i \in I} A_i)^r = \cap_{i \in I} A_i^r, \ (\cup_{i \in I} A_i)^r = \cap_{i \in I} A_i^r.$$

(vii) $A \subset A^{rr}$, $A \subset A^{00}$.

(viii) $tA^0 = \frac{1}{t} A^0$ *para cada escalar no nulo t.*

(ix) $\emptyset \neq A_1 \subset A_2 \subset X \Rightarrow A_2^r \subset A_1^r, \ A_2^0 \subset A_1^0$.

(x) $A^r = A^{rrr}, \ A^0 = A^{000}$.

Pasamos ya a establecer el primer invariante de dualidad en nuestro marco general de los pares duales, que no es sino una aplicación más de los teoremas de separación obtenidos en el anterior capítulo junto con las propiedades de la polaridad presentadas anteriormente.

Teorema VIII.1.8.*(del bipolar) Sea (X, Y) un par dual y A un subconjunto no vacío de X. Entonces se verifica:*

$$A^{rr} = \overline{co}(A \cup \{0\}), \ A^{00} = \overline{co}(DA),$$

donde el cierre se puede tomar para cualquier topología en X compatible con el par dual.

La segunda igualdad se deduce de la primera teniendo en cuenta una propiedad ya presentada: $A^{00} = (\mathbb{D}A)^{rr}$. Para la primera igualdad, las propiedades de polaridad nos proporcionan una inclusión. Para mostrar la otra inclusión, sea $x \in X$ tal que $x \notin \overline{co}(A \cup \{0\})$. Un argumento de separación nos proporciona un $y \in Y$ tal que

$$sup\{\mathrm{Re} < a, y >: a \in \overline{co}(A \cup \{0\})\} < \mathrm{Re} < x, y > .$$

El primer miembro de esta igualdad es positivo, así podemos elegir $\rho > 0$ de forma que

$$\mathrm{Re} < a, y > \leq \rho < \mathrm{Re} < x, y > \quad \forall a \in A.$$

Tenemos entonces que $\frac{y}{\rho} \in A^r$, luego $x \notin A^{rr}$.

La familia $\mathcal{R}$ de los conjuntos cerrados y absolutamente convexos de X tiene estructura de retículo sin más que definir las operaciones (ínfimo y supremo) por:

$$\wedge_{i \in I} A_i = \cap_{i \in I} A_i \ , \quad \vee_{i \in I} A_i = \overline{co(\cup_{i \in I} A_i)}$$

donde $\{A_i : \ i \in I\}$ es una familia arbitraria de elementos de $\mathcal{R}$. También tenemos en Y el correspondiente retículo $\mathcal{R}^{'}$. Del teorema del bipolar se deduce que la aplicación $A \to A^{\circ}$ de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ es un antiisomorfismo de retículos. Como aplicación práctica de este hecho podemos calcular el polar de una intersección de elementos de $\mathcal{R}$:

$$(\cap_{i \in I} A_i)^{\circ} = \vee_{i \in I} A_i^r = \overline{co(\cup_{i \in I} A_i^{\circ})}.$$

En particular, si $\{M_i : \ i \in I\}$ es una familia arbitraria de subespacios cerrados de X, se tiene

$$(\cap_{i \in I} M_i)^{\circ} = \overline{\left(\sum_{i \in I} M_i^{\circ}\right)}.$$

Pasamos ahora a considerar la dualidad de aplicaciones lineales. Conviene modificar ligeramente la notación que hemos usado hasta aquí para adecuarla al tipo de problema que ahora vamos a considerar.

Definición VIII.1.9. *Sean* (X, X_1) *e* (Y, Y_1) *dos pares duales; diremos que una aplicación lineal* $T : X \to Y$ *es* σ**-continua** *cuando sea continua para las topologías* $\sigma(X, X_1)$ *y* $\sigma(Y, Y_1)$.

De las propiedades de las topologías débiles y el criterio de continuidad para una aplicación que toma valores en un espacio que porta una topología inicial obtenemos inmediatamente el siguiente resultado básico sobre dualidad de aplicaciones lineales, que incluye la definición de trasposición.

Proposición VIII.1.10. *Sean* (X, X_1) *e* (Y, Y_1) *dos pares duales; para una aplicación lineal* $T : X \to Y$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) T *es* σ*-continua.*

ii) *Existe una aplicación* $S : Y_1 \to X_1$ *tal que:*

$$\langle Tx, v \rangle = \langle x, Sv \rangle \qquad \forall x \in X,\ \forall v \in Y_1.$$

Caso de que se cumplan i) y ii) se tiene que la aplicación S *es única, se la denomina* **traspuesta** *de* T *y se la denota por* T^*. *Además,* T^* *es lineal y* σ*-continua, con* $T^{**} = T$. *Como consecuencia, la aplicación* $T \to T^*$ *es una biyección lineal del espacio vectorial* $L_\sigma(X, Y)$ *de las aplicaciones lineales* σ*-continuas de* X *en* Y *sobre el espacio análogo* $L_\sigma(Y_1, X_1)$.

Así podemos decir que, en la situación de la proposición anterior, las aplicaciones T y T^* están "en dualidad". Pero ¿cómo repercuten sobre T^* las posibles propiedades adicionales de T? Vamos a conseguir respuestas plenamente satisfactorias a esta pregunta, en todas sus posibilidades. El primer paso para ello es la siguiente observación, ya conocida en el ambiente de los espacios normados:

Lema VIII.1.11. *Sean* (X, X_1) *e* (Y, Y_1) *pares duales y* $T : X \to Y$ *una aplicación lineal* σ*-continua. Para cualquier subconjunto no vacío* A *de* X *se tiene:*

$$(T^*)^{-1}(A^\circ) = T(A)^\circ.$$

En particular (tómese $A = X$),

$$\ker T^* = T(X)^\circ,$$

luego T^* es inyectiva si, y sólo si, $T(X)$ es $\sigma(Y, Y_1)$-denso en Y.

No conviene olvidar la total simetría entre T y T^*. Por ejemplo, si B es un subconjunto de Y_1 el lema anterior nos dice también que

$$T^{-1}(B^\circ) = T^*(B)^\circ.$$

Pero pasando a un resultado mucho más importante, consecuencia del teorema del bipolar, tenemos lo siguiente:

Teorema VIII.1.12 .*(del homomorfismo débil) Sean (X, X_1) e (Y, Y_1) pares duales y $T : X \to Y$ una aplicación lineal σ-continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Existen topologías compatibles en X e Y para las cuales T es un homomorfismo.*

ii) *T es un σ-homomorfismo, esto es, un homomorfismo para las topologías $\sigma(X, X_1)$ y $\sigma(Y, Y_1)$.*

iii) *$T^*(Y_1)$ es cerrado en X_1 para la topología $\sigma(X_1, X)$.*

Corolario VIII.1.13 . *Sean (X, X_1) e (Y, Y_1) pares duales y T una aplicación lineal σ-continua de X en Y*

i) *$T(X) = Y$ si, y sólo si, T^* es un σ-monomorfismo de Y_1 en X_1.*

ii) *T es biyectiva si, y sólo si, T^* es un σ-monomorfismo y $T^*(Y_1)$ es $\sigma(X_1, X)$-denso en X_1.*

iii) *T es un σ-epimorfismo si, y sólo si, T^* es un σ-monomorfismo y $T^*(Y_1)$ es $\sigma(X_1, X)$-cerrado.*

iv) *T es un σ-isomorfismo si, y sólo si, lo es T^*, en cuyo caso se tiene $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Si revisamos los tres últimos enunciados observaremos que, en su conjunto, nos permiten traducir cualesquiera propiedades algebraicas y/o topológicas de T en términos de T^*. Tal vez merezca la pena resaltar que ciertas propiedades de T repercuten en "las mismas" propiedades para T^*; aparte de la afirmación iv) del último corolario, tenemos, directamente del Teorema del homomorfismo débil, que T es un σ-homomorfismo con imagen $\sigma(Y, Y_1)$-cerrada si, y sólo si, T^* es un σ-homomorfismo con imagen $\sigma(X_1, X)$-cerrada.

Concluimos este tema descendiendo al caso concreto del par dual (X, X^*) donde X es un ELC separado y X^* es su dual topológico. Puesto que todo par dual responde a esta descripción, no se trata de un caso particular; simplemente tratamos de hacer hincapié en el hecho de que en X tenemos una topología de partida $\mathcal{T}$ que es compatible con el par dual pero puede ser distinta (y en la mayoría de los casos interesantes lo es) de $\sigma(X, X^*)$. Por otra parte debemos presentar también las topologías débil y débil$-*$ en el nuevo ambiente de los espacios localmente convexos.

Definición VIII.1.14. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un ELC separado, X^* su dual topológico y consideremos el par dual (X, X^*). La topología $\sigma(X, X^*)$ recibe el nombre de* **topología débil** *de X (sería más riguroso decir topología débil de $(X, \mathcal{T})$), y se denotará usualmente por w ($w(X)$, $w(\mathcal{T})$, $w(X, \mathcal{T})$ si es necesario ser más preciso). La topología $\sigma(X^*, X)$ recibe el nombre de* **topología débil-$*$** *de X^* y se denotará por w^*.*

Sea $(X, \mathcal{T})$ un ELC separado; ya sabemos que (X, w) es también un ELC separado y que la familia

$$\{J^\circ : \ J \subset X^*, \ J \ \text{ finito } \}$$

es base de w-entornos de cero, formada por conjuntos absolutamente convexos y w-cerrados. Una red $\{x_\lambda\}$ en X *converge débilmente* a $x \in X$ si, y sólo si $\{x^*(x_\lambda)\} \to x^*(x)$ para cada $x^* \in X^*$. El dual topológico de (X, w) vuelve a ser X^*; tenemos por tanto dos topologías en X, $\mathcal{T}$ y w, compatibles con el par dual (X, X^*), y es claro que $w \subset \mathcal{T}$. Puede darse la igualdad; de hecho se da cuando X es finito-dimensional. Un ejemplo más sugestivo de igualdad es el siguiente: sea $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{T}$ la topología producto; puesto que $\mathcal{T}$ es, por definición, la mínima topología que hace continuos a los funcionales $x \to x(n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y estos funcionales son también continuos para w, deducimos que $\mathcal{T} \subset w$, luego $\mathcal{T} = w$; tenemos así también un ejemplo en que w es metrizable y completa. Sin embargo, veremos en el próximo tema que para la inmensa mayoría de los casos interesantes se tiene $w \neq \mathcal{T}$, w no es metrizable y tampoco es completa.

Más interesantes resultan ahora algunas de las cuestiones referentes a la dualidad de aplicaciones lineales. Como consecuencia inmediata del teorema del homomorfismo débil, obtenemos:

Corolario VIII.1.15 . *Sean X e Y dos ELC separados y T una aplicación lineal de X en Y.*

i) *Si T es continua (para las topologías de partida en X e Y), entonces T es* **débilmente continua**, *esto es, continua para las topologías débiles de X e Y. Concretamente se tiene:*

$$T^*(g) = g \circ T \qquad \forall g \in Y^*.$$

ii) *Si T es un homomorfismo (para las topologías de partida en X e Y), entonces T es un* **homomorfismo débil** *esto es, un homomorfismo para las topologías débiles de X e Y.*

La primera parte del corolario anterior tiene un recíproco parcial que vamos a comentar. Observamos que todo espacio de Fréchet Y es un FH-espacio para conveniente espacio topológico de Hausdorff H; en efecto, basta tomar $H = (Y, w)$. Esta idea abre el camino para aplicar el Teorema de la gráfica cerrada, obteniendo que si X e Y son espacios de Fréchet y $T : X \to Y$ es una aplicación lineal débilmente continua, entonces T es continua.

La segunda parte de dicho corolario tiene consecuencias importantes. Si X es un ELC separado y M un subespacio de X, la identidad de M en X es un monomorfismo luego es también un homomorfismo débil. Si M

es cerrado, la proyección canónica de X sobre X/M es un epimorfismo débil. En otras palabras, hemos probado:

Corolario VIII.1.16 . *Sea X un ELC separado y M un subespacio de X. Consideramos M como ELC separado con la topología inducida por la de X y, si M es cerrado, consideramos X/M como ELC separado con la topología cociente. Entonces, la topología débil de M es la inducida en M por la débil de X y, si M es cerrado, la topología débil de X/M es la cociente de la débil de X.*

Usando el mismo razonamiento pasamos a dar contenido topológico a las identificaciones de los duales de subespacios y cocientes.

Corolario VIII.1.17 . *Sea X un ELC separado y M un subespacio cerrado de X.*

i) *La aplicación $f \to f|_M$, de X^* en M^* es un epimorfismo cuando en X^* y M^* se consideran las respectivas topologías débil-$*$. Como consecuencia, la aplicación $f + M^\circ \to f|_M$, de X^*/M° sobre M^* es un isomorfismo considerando en X^*/M° la topología cociente de la débil-$*$ de X^* y en M^* su topología débil-$*$.*

ii) *Si π es la proyección canónica de X sobre X/M, entonces la aplicación: $\varphi \to \varphi \circ \pi$ de $(X/M)^*$ en M° es un isomorfismo cuando en $(X/M)^*$ se considera su topología débil-$*$ y en M° la inducida por la débil-$*$ de X^*.*

Concluimos este tema con algunas observaciones adicionales sobre la topología débil-$*$. Si X es un ELC separado, la topología débil-$*$ de X^* no es otra que la de la convergencia puntual; si se quiere, es la topología inducida en X^* por $\sigma(X^\#, X)$ o llegando más lejos, por la topología producto de $\mathbb{K}^X$. Puesto que X^* separa los puntos de X, tenemos que X^* es denso en $X^\#$ para la topología $\sigma(X^\#, X)$, un hecho que merece ser destacado.

Corolario VIII.1.18 . *Si X es un ELC separado, para cada funcional lineal f en X existe una red de funcionales lineales continuos en X que converge puntualmente a f en X. Como consecuencia, si existe un funcional lineal discontinuo en X, (X^*, w^*) no es completo.*

Si ahora X es un ELC metrizable de dimensión infinita, sabemos que $X^* \neq X^\#$ y observamos cuán lejos está el Teorema de cierre de Steinhaus de ser cierto para redes. Sin embargo, mirando el aspecto positivo, el mencionado teorema nos dice lo siguiente:

Proposición VIII.1.19 . *Si X es un espacio de Fréchet, (X^*, w^*) es secuencialmente completo.*

Tenemos pues abundantes ejemplos de EVT (de hecho ELC separados) que son secuencialmente completos y no son completos.

VIII.2 El teorema de Alaoglú-Bourbaki

Iniciamos el camino hacia el Teorema de Alaoglú-Bourbaki con una observación casi obvia:

Lema VIII.2.20 . *Sea (X, Y) un par dual y A un subconjunto no vacío de X.*

i) *Si A es absorbente, A° es $\sigma(Y, X)$-acotado.*

ii) *Si A es $\sigma(X, Y)$-acotado, A° es absorbente.*

La demostración es evidente, al contrario del que presentamos a continuación, consecuencia del hecho de que la precompacidad de un conjunto para una topología inicial equivale a la precompacidad de las imágenes del conjunto por las aplicaciones que determinan dicha topología inicial.

Proposición VIII.2.21 . *Sea (X, Y) un par dual. Todo subconjunto $\sigma(X, Y)$-acotado de X es $\sigma(X, Y)$-precompacto.*

Sea ahora X un ELC separado y U un entorno de cero en X; considerando el par dual (X, X^*), los dos resultados anteriores nos dicen que U° es w^*-precompacto y también sabemos que es w^*-cerrado. Lamentablemente (X^*, w^*) rara vez es completo, pero trabajando en el par dual $(X, X^\#)$ se puede probar:

Teorema VIII.2.22 .*(de Alaoglú-Bourbaki) Sea X un ELC separado y U un entorno de cero en X. Entonces U° es un subconjunto w^*-compacto de X^*. Equivalentemente, todo subconjunto equicontinuo de X^* es w^*-relativamente compacto.*

Ya se vio que si X es un espacio normado y X^* es separable (en norma) entonces X es separable, no siendo cierto el recíproco. Ahora podemos establecer:

Corolario VIII.2.23 . *Sea X un ELC separado, separable, y sea U un entorno de cero en X. Entonces U°, con la topología débil-$*$, es un espacio métrico compacto. Como consecuencia, si X es metrizable, X^* con la topología débil-$*$ es separable.*

Obsérvese que al decir que X^* es separable en la topología débil-$*$ afirmamos, pura y simplemente, que existe una familia numerable de elementos de X^* que separa los puntos de X. Como consecuencia obtenemos que todo espacio de Fréchet separable es un FK-espacio. Recordemos que ℓ_∞ es un FK-espacio, es decir, ℓ_∞^* es w^*-separable, mientras que ℓ_∞ no es separable.

El Teorema de Alaoglú-Bourbaki, al proporcionarnos abundantes ejemplos de conjuntos convexos compactos en ciertos ELC separados, nos permite poner en juego el Teorema de Krein-Milman, del que hasta ahora no habíamos obtenido demasiado partido. Una sencilla caracterización de los puntos extremos en la bola unidad del dual de $C(K)$, que deducimos del Teorema de Krein-Milman "revertido", nos permite obtener fácilmente el Teorema clásico de Banach-Stone, que describe los isomorfismos isométricos de $C(K)$ sobre $C(H)$, siendo K y H espacios topológicos compactos de Hausdorff, y sobre todo, prueba que el compacto K está determinado por el espacio de Banach $C(K)$. Un argumento del mismo tipo, aplicado ahora al espacio $C_b(\Omega)$ de las funciones continuas y acotadas en un espacio de Hausdorff completamente regular Ω, nos permite hacer una elegante construcción de la compactación de Stone-Cech de Ω, sirviendo el Teorema de Banach-Stone para probar la unicidad. Finalmente, la combinación de los Teoremas de Banach-Alaoglú y Krein-Milman con el de representación de Riesz permite dar una demostración del Teorema de Stone-Weierstrass debida a L. De Branges (1959). El argumento permite de hecho probar un resultado debido a Bishop del cual se deduce el Teorema de Stone-Weierstrass.

La mayor parte del trabajo en este tema se desarrollará en espacios de funciones continuas. Para evitar tediosas repeticiones fijamos la siguiente terminología:

Notacion.- Si Ω es un espacio topológico de Hausdorff, completamente regular, $C_b(\Omega)$ denotará el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas de Ω en $\mathbb{K}$ con su norma natural

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : \ t \in \Omega\} \qquad (x \in C_b(\Omega)).$$

Para $t \in \Omega$ definimos $\delta_t : C_b(\Omega) \to \mathbb{K}$ por:

$$\delta_t(x) = x(t) \qquad (x \in C_b(\Omega)).$$

Es claro que $\delta_t \in C_b(\Omega)^*$ y que $\|\delta_t\| = 1$. Cuando ello no dé lugar a confusión usaremos simplemente el término "compacto" como abreviatura de "espacio topológico compacto de Hausdorff". Nótese que si K es un compacto, $C_b(K) = C(K)$, el espacio de las funciones continuas de K en el cuerpo escalar que se considere. Como siempre $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| \leq 1\}$ y $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| = 1\}$; usaremos libremente el hecho elemental de que $\mathbb{T} = Ext(\mathbb{D})$.

En la demostración de los resultados que siguen se usará la siguiente caracterización de los puntos extremos de las bolas unidad de $C(K)$ y

$C(K)^*$, para K compacto. En el caso de $C(K)$ las cosas son realmente fáciles, para $C(K)^*$ usaremos la w^*-compacidad de su bola y el Teorema de Krein-Milman revertido.

Teorema VIII.2.24 . *Para K compacto se tiene:*

i) $Ext(B_{C(K)}) = \{x \in C(K) : \ x(K) \subset \mathbb{T}\}$.

ii) $Ext(B_{C(K)^*}) = \mathbb{T}\tilde{K}$ *donde* $\tilde{K} = \{\delta_t : \ t \in K\}$.

Como consecuencia fácil del teorema anterior obtenemos:

Corolario VIII.2.25 .*(Teorema de Banach-Stone clásico) Sean H y K compactos y Φ un isomorfismo isométrico de $C(H)$ sobre $C(K)$. Entonces existe un homeomorfismo σ de K sobre H y una función $\theta \in C(K)$ con $\theta(K) \subset \mathbb{T}$, tales que:*

$$[\Phi(x)](t) = \theta(t)x(\sigma(t))$$

para $t \in K$ y $x \in C(H)$. En particular, si los espacios de Banach $C(H)$ y $C(K)$ son isométricamente isomorfos, entonces H y K son homeomorfos.

Usando la idea de que K es homeomorfo a un subconjunto w^*-compacto de la bola unidad de $C(K)^*$, se puede obtener de manera muy elegante la compactación de Stone-Cech de un espacio de Hausdorff completamente regular:

Lema VIII.2.26 . *Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. La aplicación $t \to \delta_t$ es un homeomorfismo de Ω sobre un subconjunto de $B_{C_b(\Omega)^*}$, con la topología w^*.*

Teorema VIII.2.27 .*(Compactación de Stone-Cech) Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Existe un espacio topológico compacto de Hausdorff $\beta\Omega$ y un homeomorfismo I de Ω sobre un* *subconjunto denso de $\beta\Omega$. Además, para cada función continua y acotada $x : \Omega \to \mathbb{R}$ existe una (única) función $\tilde{x} \in C(\beta\Omega)$ verificando que $\tilde{x}(I(t)) = x(t)$ para $t \in \Omega$ y*

$$\max\{|\tilde{x}(s)| : \ s \in \beta\Omega\} = \sup\{|x(t)| : \ t \in \Omega\},$$

de hecho la aplicación $x \to \tilde{x}$ es un isomorfismo isométrico de $C_b(\Omega)$ sobre $C(\beta\Omega)$. Finalmente $\beta\Omega$ es (salvo homeomorfismos) el único espacio topológico que verifica las anteriores condiciones.

Nuestro objetivo ahora es obtener una forma refinada del Teorema de Stone-Weierstrass. Necesitamos introducir el siguiente concepto:

Definición VIII.2.28. *En lo sucesivo K será un compacto fijo y usaremos que el espacio de Banach $C(K)$ es también un álgebra con el producto definido puntualmente. Dada una subálgebra A de $C(K)$ se dice que un subconjunto E de K es A-**antisimétrico** si toda función $x \in A$ que tome solamente valores reales en E es constante en E. En el caso real esto significa simplemente que toda función de A es constante en E.*

Teorema VIII.2.29.*(de antisimetría de Bishop) Sea A una subálgebra cerrada de $C(K)$ que contenga a las funciones constantes y sea $x \in C(K)$. Si para cada subconjunto A-antisimétrico E de K existe una función de A que coincide con x en E, entonces $x \in A$.*

Supongamos ahora que la subálgebra cerrada A de $C(K)$ separa los puntos de K y contiene a las constantes. En el caso real, todo subconjunto A-antisimétrico de K se reduce a un punto y la condición sobre x en el teorema anterior se cumple, trivialmente, para cualquier $x \in C(K)$, luego $A = C(K)$. En el caso complejo, suponiendo adicionalmente que A es *autoadjunta*, es decir, verifica $a^* \in A$ si $a \in A$, donde $a^*(t) = \overline{a(t)}$ (complejo conjugado) para $t \in K$, llegamos al mismo resultado. Se obtiene así:

Corolario VIII.2.30 .*(Teorema de Stone-Weierstrass). Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y A una subálgebra cerrada de $C(K)$ que contiene a las funciones constantes y separa los puntos de K. En el caso complejo supongamos además que A es autoadjunta. Entonces $A = C(K)$.*

Ni que decir tiene, el corolario anterior extiende al teorema clásico de aproximación de Weierstrass según el cual los polinomios son densos en $C[0, 1]$. Este hecho da lugar a la prueba más natural de la separabilidad de $C[0, 1]$. En realidad, ya conocíamos este resultado por ser $C[0, 1]$ un espacio de Banach con base.

VIII.3 Topologías polares

Hasta ahora, dado un par dual (X, Y), sólo hemos usado la mínima topología compatible en X, $\sigma(X, Y)$. Cuando hemos dispuesto de otra topología compatible en X, tal topología era de hecho anterior al par dual; piénsese, por ejemplo, que en el caso de un espacio normado X la topología de la norma es compatible con el par dual (X, X^*). En primer lugar describiremos las topologías en X compatibles con el par dual (Teorema de Mackey-Arens). Usando esta descripción, deducimos la existencia de una máxima topología en X compatible con el par dual (X, Y) (topología de Mackey), de la que se da además, una base de entornos de cero.

A continuación conoceremos un nuevo invariante de dualidad, la acotación (Teorema de Mackey), resultado que obtendremos como consecuencia del Teorema de Banach-Mackey: En un ELC separado todo tonel absorbe a todo conjunto convexo, acotado y completo.

Presentaremos en primer lugar, las topologías polares, para ver a continuación que todas las topologías compatibles pertenecen a esta clase. Dado un par dual (X, Y) y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Y $\sigma(Y, X)$-acotados, consideramos en X la topología localmente convexa generada por las seminormas $\{p_A : A \in \mathcal{A}\}$, siendo

$$p_A(x) = \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in A\} \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Para que dicha topología sea separada, con $\{A^\circ : A \in \mathcal{A}\}$ como base de entornos de cero, es suficiente imponer a la familia $\mathcal{A}$ las siguientes condiciones:

i) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \exists A_3 \in \mathcal{A} : A_1 \cup A_2 \subset A_3$.

ii) $\forall A \in \mathcal{A} \quad \exists A_1 \in \mathcal{A} :\ 2A \subset A_1$.

iii) $Y = \cup_{A\in\mathcal{A}} A$.

Si $\mathcal{A}$ verifica las condiciones anteriores se le llamará **familia polar** y a la topología que determina en X, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, **topología polar** para $\mathcal{A}$ o bien topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathcal{A}$.

Es claro que la topología $\sigma(X, Y)$ es una de estas topologías polares, la de la convergencia puntual. Definimos la topología de Mackey $\tau(X, Y)$ como la topología polar en X asociada a la familia de todos los subconjuntos de Y absolutamente convexos y $\sigma(Y, X)$-compactos. Es fácil demostrar que toda topología localmente convexa es una topología polar:

Proposición VIII.3.31 . *Toda topología localmente convexa y separada $\mathcal{T}$ en un espacio vectorial X es la topología de la convergencia uniforme sobre la familia de subconjuntos equicontinuos de X^*.*

Ya disponemos de todos los resultados necesarios para caracterizar las topologías compatibles con un par dual:

Teorema VIII.3.32 .*(de Mackey-Arens) Sea (X, Y) un par dual. Una topología localmente convexa y Hausdorff $\mathcal{T}$ sobre X es compatible con el par dual si, y sólo si, es la topología de la convergencia uniforme sobre una familia de subconjuntos absolutamente convexos y $\sigma(Y, X)$-compactos de Y. En particular, la topología de Mackey es la topología más fina en X compatible con el par dual.*

Probaremos ahora que en un ELC separado X, los conjuntos acotados para cualquier topología compatible son los mismos, en particular la topología de Mackey y la débil tienen los mismos conjuntos acotados. Por tanto, nos encontramos así con un nuevo invariante de dualidad, la acotación. Para ello empezamos probando:

Proposición VIII.3.33. *Si X es un EVT, y $B \subset X$ es un tonel (conjunto absolutamente convexo, absorbente y cerrado), entonces B absorbe a cualquier subconjunto convexo y compacto de X.*

Una vez probado el resultado anterior no resulta demasiado complicado establecer:

Teorema VIII.3.34.*(Banach-Mackey) Si X es un ELC separado y B es un tonel en X, entonces B absorbe a todo subconjunto convexo, acotado y completo de X.*

Si A es un subconjunto $\sigma(X,Y)$-acotado de X y U un entorno de cero cerrado y absolutamente convexo, entonces A° es un tonel y U° es w*-compacto, por el Teorema de Alaoglú-Bourbaki. Por tanto, usando el teorema anterior, A° absorbe a U°, y por tanto $U = U^{\circ\circ}$ absorbe a $A^{\circ\circ}$ y, con mayor razón a A. Es decir, A es acotado en la topología de partida de X. Hemos probado:

Teorema VIII.3.35.*(Mackey) Si (X,Y) es un par dual, los subconjuntos acotados de X son los mismos para cualquier topología compatible con el par dual.*

Teniendo en cuenta el hecho de que para un espacio normado infinito-dimensional, la topología de la norma es estrictamente más fina que la débil, el operador identidad de (X,w) en $(X,\|\cdot\|)$ no es continuo, pero conserva conjuntos acotados.

Como, dado un par dual (X,Y), hemos usado varias topologías en X, intentaremos aclarar la relación entre la continuidad de aplicaciones cuando se consideran en ambos espacios las topologías de partida, las topologías débiles asociadas al par dual o bien la topología de Mackey en ambos espacios.

En primer lugar, veremos que ciertas propiedades de un operador se pueden traducir en propiedades de su adjunto. Por ejemplo:

Proposición VIII.3.36. *Sean X e Y dos ELC; un operador $T : X \longrightarrow Y$ débilmente continuo es continuo si, y sólo si, T^* aplica conjuntos equicontinuos de Y^* en conjuntos equicontinuos de X^*.*

Usando el resultado anterior se pueden obtener las siguientes relaciones, alguna de las cuales era ya conocida:

Corolario VIII.3.37. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal entre dos ELC. Entonces*

i) *Si T es débilmente continua, también lo es T^*.*

ii) *Si T es débilmente continua, T es Mackey continua.*

iii) *Si T es débilmente continua, entonces T^* es Mackey continua.*

iv) *Si T es continua, T es débilmente continua. El recíproco no es cierto.*

Dependiendo de la marcha del curso, se puede presentar una aplicación que aparte de los teoremas de Hahn-Banach y Banach-Steinhauss precisa también del teorema de Mackey. Nos referimos al teorema de Dunford para espacios de Fréchet que asegura la equivalencia entre la holomorfía débil y la holomorfía de una función definida sobre un abierto del plano complejo con valores en un espacio de Fréchet, como puede verse en [45]. No obstante, se precisaría presentar una integral para funciones valuadas en tales espacios, como la integral Pettis, por lo que no parece oportuno reproducir dicha aplicación aquí.

VIII.4 Los teoremas de Grothendieck y Krein-Smulian

Es fácil ver que todo espacio localmente convexo separado es un subespacio de un producto de espacios de Banach; por tanto, el cierre de este subespacio es una completación del ELC. Por otra parte, sabemos que todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de su bidual; el cierre en el bidual da una descripción de la completación del espacio normado. Si (X, Y) es un par dual, y en X consideramos una topología polar, el Teorema de completación de Grothendieck nos da también una descripción de la completación de X como un cierto subespacio de $Y^{\#}$. Este resultado es importante incluso para espacios normados; en este caso particular, el resultado suele conocerse como Teorema de Banach-Smulian; con este último iniciamos el tema, dado que su especial sencillez permite después comprender mucho mejor la demostración del caso general. Conseguiremos también una caracterización de la compacidad en ELC metrizables, debida a Grothendieck y uno de los resultados más importantes en la teoría de dualidad para espacios de Fréchet y en particular para espacios de Banach, el Teorema de Krein-Smulian.

Nuestro punto de partida en el presente tema será una observación completamente elemental: si X es un espacio normado y J_X denota como siempre la inyección canónica de X en su bidual, el cierre $\tilde{X}$ de $J_X(X)$ para la topología de la norma de X^{**} es la completación de X, lo que nos permite ver los elementos de la completación de X como funcionales lineales en X^*. Sea pues $f \in \tilde{X}$ y notemos que se tiene de hecho $f \in J_X(X)$ si, y sólo si, f es débil-$*$-continuo. Ahora bien, en cualquier caso existirá una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X tal que $\{J_X(x_n)\}$ converge a f en la topología de la norma de X^{**}, esto es, uniformemente en la bola unidad de X^*. Deducimos que, si bien f puede no ser débil-$*$-continuo, la restricción de f a la bola unidad de X^* sí lo es. El recíproco también es cierto, e incluso fácil de probar:

Teorema VIII.4.38 .*(de Banach-Smulian) Sea X un espacio normado,*

f un funcional lineal en X^*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) *f pertenece al cierre de $J_X(X)$ para la topología de la norma en X^{**}.*

ii) *La restricción de f a la bola unidad de X^* es débil-$*$-continua.*

iii) *La restricción de f a la bola unidad de X^* es débil-$*$-continua en cero.*

Antes de pasar a una versión mucho más general del teorema anterior, merece la pena resaltar la siguiente consecuencia importante, que ilustra muy bien su utilidad: el Teorema de la gráfica cerrada es válido para duales de espacios de Banach, con la topología débil-$*$.

Corolario VIII.4.39. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X^* \to Y^*$ una aplicación lineal. Si T tiene gráfica cerrada para las topologías débiles-$*$ de X^* e Y^*, entonces T es continua para dichas topologías.*

En la línea de las aplicaciones típicas de los teoremas de la gráfica cerrada, destacamos un caso particular interesante del corolario anterior. Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X, es fácil ver que M está complementado en X si, y sólo si, M° es un subespacio complementado de X^* para la topología w^*. Mejorando esta observación tenemos:

Corolario VIII.4.40. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X. Supongamos que X^* es suma directa (algebraica) de M° con N°. Entonces X es suma topológico-directa de M y N. Equivalentemente, si M es un subespacio cerrado del espacio de Banach X y M° admite un complemento algebraico w^*-cerrado en X^*, entonces M está complementado en X.*

Pasemos ya a obtener una importante generalización del Teorema de Banach-Smulian, consistente en sustituir el par (Z, Z^*) donde Z es un espacio normado, por un par dual arbitrario (X, Y), y la topología de la norma en Z por cualquier topología polar en X, no necesariamente compatible con el par dual, cuya completación queremos describir como un espacio de funcionales lineales en Y. El primer problema es adivinar quién hará el papel de B_{Z^*} y esto no es difícil. La topología de la norma en un espacio normado Z es la asociada a la familia polar $\{\varepsilon B_{Z^*} : \varepsilon > 0\}$ y para un funcional lineal f en Z^*, decir que $f_{|B_{Z^*}}$ es w^*-continuo en cero equivale, obviamente, a decir que $f_{|\varepsilon B_{Z^*}}$ es w^*-continuo en cero para todo $\varepsilon > 0$. Así pues, en el caso general, si X porta la topología asociada a la familia polar $\mathcal{A}$, podemos usar los propios elementos de $\mathcal{A}$ ("todos"); para imitar al máximo el caso particular, no es restrictivo suponer que los elementos de $\mathcal{A}$ son absolutamente convexos (sustitúyase $\mathcal{A}$ por la familia $\{A^{\circ\circ} : A \in \mathcal{A}\}$). Así pues, nuestro candidato a completación de $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ es el espacio $\tilde{X}$ formado por los funcionales lineales f en Y tales que $f_{|A}$ es $\sigma(Y, X)$-continuo en cero para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$. Es obvio que X es un subespacio vectorial de $\tilde{X}$ pero ¿qué topología debemos darle a $\tilde{X}$? En el caso particular, $\tilde{Z}$ heredaba la topología de la norma en Z^{**}; en otras palabras, la topología de $\tilde{Z}$ es la topología polar asociada a la familia $\{\varepsilon B_{Z^*} : \varepsilon > 0\}$ pero con respecto al par dual $(\tilde{Z}, Z^*)$. Análogamente, en el caso general, $(\tilde{X}, Y)$ es un par dual de forma natural y veremos que $\mathcal{A}$ sigue siendo una familia polar con respecto a $(\tilde{X}, Y)$. Topologizado $\tilde{X}$, es claro que $\tilde{X}$ induce en X la topología de partida y nos quedará la tarea de probar que $\tilde{X}$ es completo y que X es denso en $\tilde{X}$.

Teorema VIII.4.41 .*(de completación de Grothendieck) Sea (X, Y) un par dual, $\mathcal{T}$ una topología polar en X y $\mathcal{A}$ una familia polar de subconjuntos absolutamente convexos de Y tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Consideremos el subespacio $\tilde{X}$ de $Y^{\#}$ formado por los funcionales lineales en Y cuya restricción a cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ es $\sigma(Y, X)$-continua en cero. Notemos que $X \subset \tilde{X}$, luego $\tilde{X}$ separa los puntos de Y, así que $(\tilde{X}, Y)$ es "canónicamente" un par dual. Entonces:*

i) *$\mathcal{A}$ es una familia polar con respecto al par dual $(\tilde{X}, Y)$.*

ii) *Si* $\tilde{\mathcal{T}}$ *es la topología polar en* $\tilde{X}$ *asociada a la familia* $\mathcal{A}$*,* $\tilde{\mathcal{T}}$ *induce en* X *la topología de partida* $\mathcal{T}$*.*

iii) X *es denso en* $\tilde{X}$ *para la topología* $\tilde{\mathcal{T}}$*.*

iv) *El ELC separado* $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ *es completo.*

En resumen, $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ *es la completación del ELC separado* $(X, \mathcal{T})$*.*

Descrita la completación tenemos, obviamente, un criterio de complitud:

Corolario VIII.4.42 .*(Teorema de complitud de Grothendieck) Sea* (X, Y) *un par dual y* $\mathcal{A}$ *una familia polar en* Y *formada por conjuntos absolutamente convexos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X *es completo para la topología polar* $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$*.*

ii) *Si* f *es un funcional lineal en* Y *tal que, para cada* $A \in \mathcal{A}$*,* $f_{|A}$ *es* $\sigma(Y, X)$*-continuo en cero, entonces* f *es* $\sigma(Y, X)$*-continuo.*

El caso particular más interesante de los resultados anteriores se presenta cuando tenemos de hecho una topología en X compatible con el par dual (X, Y), obteniéndose por tanto una descripción de la completación de cualquier ELC separado; es lógico entonces tomar como $\mathcal{A}$ la familia de los polares de los entornos de cero en X:

Definición VIII.4.43 . *Sea* X *un ELC separado y* f *un funcional lineal en* X^**; se dice que* f *es* **casi-w^*-continuo** *si para cada entorno de cero* U *en* X *se tiene que la restricción de* f *a* U° *es* w^**-continua en cero. Notemos que basta comprobar tal condición para los elementos de cualquier base de entornos de cero en* X*; en particular, si* X *es un espacio normado, un funcional lineal* f *en* X^* *es casi-*w^**-continuo si, y sólo si, la restricción de* f *a la bola unidad de* X^* *es* w^**-continua en cero.*

Corolario VIII.4.44 . *Sea $(X, \mathcal{T})$ un ELC separado y $\tilde{X}$ el espacio vectorial formado por los funcionales lineales casi-w^*-continuos en X^*. Existe una topología $\tilde{\mathcal{T}}$ en $\tilde{X}$ tal que $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ es la completación de $(X, \mathcal{T})$. Concretamente, $\tilde{\mathcal{T}}$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de la forma U° donde U es un entorno de cero en X.*

Corolario VIII.4.45. *Para un ELC separado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X es completo.*

ii) *Todo funcional lineal casi-w^*-continuo en X^* es w^*-continuo.*

Corolario VIII.4.46 . *Sea X un ELC separado, completo y separable, todo funcional lineal secuencialmente continuo en (X^*, w^*) es continuo.*

Aparentemente el corolario VIII.4.44 es tan general como el teorema VIII.4.41; con la notación de dicho teorema, $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ es un ELC separado y su completación puede por tanto describirse usando el corolario VIII.4.44. Ahora bien, el teorema VIII.4.41 describe la completación de $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ en términos de funcionales lineales en Y sin necesidad de que se tenga $Y = (X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})^*$; naturalmente podemos sustituir Y por $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})^*$ para aplicar el corolario VIII.4.44, pero algunas veces esto no es una buena idea. El teorema VIII.4.41 nos ofrece una posibilidad mucho mejor, tomar $X = Z$, $Y = Z^*$ y la familia $\mathcal{A}$ de los subconjuntos absolutamente convexos y acotados de Z.

En busca ya del tercer resultado importante de este tema, es natural preguntarse si los funcionales lineales casi-w^*-continuos en el dual X^* de un ELC separado son los funcionales lineales continuos para alguna topología razonable en X^*. Ello motiva el siguiente concepto:

Definición VIII.4.47. *Sea X un ELC separado y A un subconjunto de X^*; se dice que A es* **casi-w^*-cerrado** *si $A \cap U^\circ$ es w^*-cerrado para cada entorno de cero U en X. Es claro que los conjuntos casi-w^*-cerrados* *son los conjuntos cerrados para una (única) topología en X^*, topología que denotaremos por aw^*. En realidad, en lo que sigue no será preciso manejar la topología aw^*.*

La relación entre los funcionales casi-w^*-continuos y los hiperplanos casi-w^*-cerrados es la que cabe esperar. El siguiente enunciado recoge este hecho, mejora nuestro conocimiento de los funcionales lineales casi-w^*-continuos y nos da una primera propiedad de los conjuntos casi-w^*-cerrados que será útil más adelante.

Lema VIII.4.48 . *Sea X un ELC separado.*

i) *Los conjuntos casi-w^*-cerrados de X^* se conservan por traslaciones. Equivalentemente, las traslaciones son homeomorfismos para la topología aw^*.*

ii) *Para un funcional lineal f en X^*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- **a)** *f es casi-w^*-continuo.*
- **b)** $\ker f$ *es casi-w^*-cerrado.*
- **c)** *Para cada entorno de cero U en X, $f_{|U^\circ}$ es w^*-continuo en todo punto de U°.*

Podemos ahora obtener:

Corolario VIII.4.49 . *Un ELC separado X es completo si, y sólo si, todo hiperplano (resp. hiperplano afín) casi-w^*-cerrado en X^* es w^*-cerrado.*

La pregunta general ¿cuando un conjunto casi-w^*-cerrado es w^*-cerrado? surge inevitablemente. Una respuesta a dicha pregunta es, sin embargo, otro de los resultados más profundos e importantes en teoría de dualidad, el Teorema de Krein-Smulian, que se deducirá fácilmente del siguiente resultado:

Teorema VIII.4.50 . *Sea X un ELC metrizable. Un subconjunto de X^* es casi-w^*-cerrado si, y sólo si, es cerrado para cualquiera de las siguientes topologías en X^*:*

- *La topología $\mathcal{T}_{c_0}$ de la convergencia uniforme sobre las sucesiones convergentes a cero en X.*

- *La topología $\mathcal{T}_K$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de X.*

- *La topología $\mathcal{T}_{pc}$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos precompactos de X.*

En resumen $\mathcal{T}_{c_0} = \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{pc} = aw^*$.

Pese a su apariencia muy técnica, el teorema anterior encierra gran cantidad de información que ahora vamos a extraerle poco a poco. Empecemos por la igualdad $\mathcal{T}_{pc} = \mathcal{T}_{c_0}$. Tal igualdad significa que todo subconjunto precompacto de X está contenido en el bipolar del conjunto de los términos de una sucesión convergente a cero; teniendo en cuenta el Teorema del bipolar obtenemos:

Corolario VIII.4.51 .*(Grothendieck) Si X es un ELC metrizable, todo subconjunto precompacto de X está contenido en el cierre de la envolvente absolutamente convexa del conjunto de los términos de una sucesión convergente a cero.*

Pasando a la principal consecuencia del teorema VIII.4.50, dicho teorema nos dice que la topología aw^* es una topología localmente convexa en X^*, más que eso, es una topología *polar* con respecto al par dual (X, X^*), siempre que X sea metrizable. Estudiamos ahora cuándo esta topología es compatible con el par dual; si esto ocurre, todo funcional lineal casi-w^*-continuo en X^* es w^*-continuo, pero esto equivale a la complitud de X. De hecho se tiene:

Corolario VIII.4.52 . *Para un ELC metrizable X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X es completo.*

ii) *El cierre de la envolvente convexa de cada subconjunto compacto de X es compacto (se dice que X tiene la propiedad de convexidad compacta).*

iii) *La topología aw^* en X^* es compatible con el par dual (X, X^*).*

Destaquemos la principal consecuencia del corolario anterior: si las topologías w^* y aw^* tienen el mismo dual, tendrán los mismos conjuntos convexo-cerrados:

Corolario VIII.4.53 .*(Teorema de Krein-Smulian) Si X es un espacio de Fréchet, todo subconjunto convexo casi-w^*-cerrado de X^* es w^*-cerrado. Equivalentemente, un subconjunto A de X^* es débil-$*$-cerrado si, y sólo si, $A \cap U^\circ$ es débil-$*$-cerrado para cada entorno de cero U en X.*

Podemos ahora establecer:

Corolario VIII.4.54 . *Si X es un espacio de Fréchet separable, todo subconjunto convexo de X^*, que sea secuencialmente cerrado para la topología débil-$*$, es débil-$*$-cerrado.*

Aún en el caso particular de un espacio de Banach, el Teorema de Krein-Smulian es un resultado profundo y de gran utilidad. Además, la definición de conjunto casi-w^*-cerrado se vuelve más manejable en este caso:

Corolario VIII.4.55 . *Si X es un espacio de Banach, un subconjunto convexo A de X^* es débil-$*$-cerrado si (y sólo si), para cada $\rho > 0$, el conjunto*

$$A \cap \rho B_{X^*} = \{x^* \in A : \ \|x^*\| \leq \rho\}$$

es débil-$*$-cerrado.

Para un subespacio las cosas son aún más fáciles:

Corolario VIII.4.56 .*(Teorema de Banach-Dieudonné) Si X es un espacio de Banach, un subespacio M de X^* es débil-$*$-cerrado si (y sólo si) el conjunto*

$$M \cap B_{X^*} = \{x^* \in M : \ \|x^*\| \leq 1\}$$

es débil-$*$-cerrado.

Enseguida veremos una importante aplicación del Teorema de Banach-Dieudonné; antes vamos a dar unos ejemplos para discutir la necesidad de las hipótesis de los resultados anteriores y ver hasta qué punto sus tesis no se pueden mejorar.

Ejemplos.-

i) *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, existe un conjunto casi-w^*-cerrado en X^* que no es w^*-cerrado.* En efecto, sea $E = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores linealmente independientes que converja a cero en norma. Entonces E° es entorno de cero en la topología aw^*. Si E° fuese entorno de cero en la topología débil-$*$, E estaría contenido en un subespacio finito-dimensional de X. Así pues, $aw^* \neq w^*$, como se quería; la palabra "convexo" no puede suprimirse en el Teorema de Krein-Smulian.

ii) *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Fréchet, $(X^*, \tau(X^*, X))$ es estrictamente hipercompleto, esto es, en su dual, los conjuntos convexos w^*-cerrados coinciden con los convexos casi-w^*-cerrados.* Por tanto existen espacios estrictamente hipercompletos que no son metrizables. En efecto, lo que se afirma es que si A es un subconjunto convexo de X y $A \cap U^\circ$ es cerrado para cada entorno de cero U en la topología $\tau(X^*, X)$, entonces A es cerrado. Pero si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A que converge a un $x \in X$, tomando $K = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, K es compacto, luego $\overline{\text{co}}\ (\mathbb{D}K)$ es compacto y $U = K^\circ$ es entorno de cero para $\tau(X^*, X)$, luego $A \cap K^{\circ\circ}$ es cerrado y $x \in A$.

Daremos una vistosa aplicación del Teorema de Banach-Dieudonné, en la que también intervienen el Teorema de la aplicación abierta de Banach y el Teorema de Banach-Alaoglú:

Lema VIII.4.57. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$T^*(Y^*)$ es débil-$*$-cerrado en X^*.*

ii) *$T^*(Y^*)$ es cerrado en la topología de la norma de X^*.*

Podemos dar ahora la visión completa de las propiedades de la trasposición para aplicaciones lineales continuas entre espacios de Banach.

Corolario VIII.4.58 . *Sean X e Y dos espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$T(X)$ es cerrado en la topología de la norma de Y.*

ii) *$T(X)$ es débilmente cerrado en Y.*

iii) *$T^*(Y^*)$ es cerrado en la topología de la norma de X^*.*

iv) *$T^*(Y^*)$ es débil-$*$-cerrado en X^*.*

v) *T es un homomorfismo para las topologías de la norma en X e Y.*

vi) *T es un homomorfismo para las topologías débiles de X e Y.*

vii) *T^* es un homomorfismo para las topologías de la norma de Y^* y X^*.*

viii) *T^* es un homomorfismo para las topologías débil-$*$ de Y^* y X^*.*

Por último, siguiendo los textos de [19] y [42], podemos establecer una nueva aplicación nada despeciable del teorema de complitud de Grothendieck:

Teorema VIII.4.59.*(Eberlein-Smulian) Sea X un ELC separado y completo y A un subconjunto de X. Entonces A es débilmente relativamente compacto si, y sólo si, toda sucesión en A tiene un valor adherente débil en X.*

En el caso particular de los espacios de Banach, obtenemos nueva información sobre la compacidad débil.

Corolario VIII.4.60. *Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto débilmente cerrado de X. Entonces A es débil compacto si, y sólo si, A es secuencialmente débil compacto.*

BIBLIOGRAFIA: Hemos seguido los textos de Wilansky [58] y Kthe [32] para el estudio de los pares duales y la dualidad de las aplicaciones lineales. También del primero de ellos hemos tomado lo referente al teorema de Alaoglú-Bourbaki. Para las aplicaciones de éste último resultado junto con el teorema de Krein-Milman son textos de interés [28], [31] y [29], del que hemos tomado el teorema de Stone-Weierstrass a partir del de Krein-Milman, demostración debida a L. De Branges. Para el estudio de las topologías polares y el teorema de Mackey hemos seguido muy de cerca el texto de Narici-Beckenstein [38]. Otra vez el texto de Wilansky, [58], ha sido el preferido para el desarrollo del último tema.

Capítulo IX

INTRODUCCION A LAS DISTRIBUCIONES.

Digamos ante todo que este capítulo pretende ser sólo un escaparate que sirva de motivación al alumno para el estudio de las distribuciones. Desde el punto de vista de las aplicaciones, los espacios de distribuciones proporcionan probablemente la forma más convincente de justificar la utilidad de los espacios localmente convexos, de hecho gran parte de la investigación en la teoría general de ELC ha estado siempre orientada hacia su aplicación a los espacios de distribuciones.

La topología del espacio de las funciones test $\mathcal{D}(\Omega)$ se define sin pasar por los conceptos generales de límite inductivo y topología localmente convexa final que aunque aclaradores parecen excesivos para aplicarlos en este proyecto sólo al espacio de las funciones test. Obtenemos entonces algunas propiedades interesantes del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$: es un espacio no metrizable, localmente convexo, separado y completo verificando la propiedad de Heine-Borel (de hecho un espacio de Montel si se prueba su reflexividad, conceptos no tratados en este proyecto). Tras el estudio de la continuidad de funcionales en $\mathcal{D}(\Omega)$ llegamos al espacio de las distribuciones como el dual topológico del de las funciones test. Terminamos nuestro primer tema viendo funciones y medidas como distribuciones, definiendo la derivada de una distribución y estudiando algunas propiedades del producto de convolución que se define sólo para una distribución y una función test, como preparativo para el próximo tema dedicado a las aplicaciones. Primeramente describimos cómo presentar al alumno el célebre teorema de Ehrenpreis-Malgrange sobre la existencia de soluciones fundamentales para ecuaciones lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes que hemos plagiado de [44]. Terminamos con una aplicación al mundo de la geometría (diferencial) mostrando la existencia de geodésicas en un marco bastante general o si se quiere demostramos el siguiente principio físico: "una partícula que se mueve libremente en una superficie sigue siempre el camino más corto que es el que consume mínima energía."

IX.1 Funciones test y distribuciones

Siguiendo el texto [45], la teoría de las distribuciones está motivada por el lícito deseo de derivar, *"en algún sentido"*, funciones que no son derivables. Para conseguirlo, el objetivo es extender el cálculo a una clase de nuevos objetos (distribuciones) más amplia que la clase de las funciones diferenciables. A modo de motivación, deberemos empezar por ver las funciones de otra forma a la acostumbrada y no como correspondencias entre dos conjuntos. En concreto, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es localmente integrable, esto es, f es medible e integrable en cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, podemos ver a f como un funcional lineal que lleva a cada función ϕ en el escalar $\int_{\mathbb{R}} f\phi$, para una conveniente clase de funciones ϕ (funciones test). Dicha clase de funciones es $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, el espacio de funciones indefinidamente derivables con soporte compacto. De esta forma, f se puede ver como un funcional lineal bien definido en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Por otra parte, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es un subespacio denso en $C_c(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones continuas de soporte compacto con la norma uniforme, con lo que el valor del funcional que define f determina la función f salvo en un conjunto de medida nula.

Si además $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tenemos, gracias a la fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta la compacidad del soporte de ϕ que:

$$\int_{\mathbb{R}} f'\phi = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Observando que el segundo miembro de la igualdad tiene perfecto sentido aunque f no sea derivable y que nos proporcionan funcionales lineales en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, podemos entender, que para f localmente integrable, la derivada $k-$ésima de f ha de venir dada por el funcional lineal en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definido por: $\phi \to (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)}$, donde $\phi^{(k)}$ denota la derivada $k-$ésima de la función ϕ.

Las distribuciones (esa clase de objetos más amplia que la de las funciones diferenciables) van a ser los funcionales lineales en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ que sean continuos para una cierta topología, por supuesto localmente convexa y separada, en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Así, si Λ es una distribución, su derivada debería de venir dada por la igualdad:

$$\Lambda'(\phi) = -\Lambda(\phi').$$

Esta somera motivación permite ver cuáles son los pasos a seguir, para los cuales empezamos a presentar las definiciones formales.

En lo sucesivo d será un número natural fijo y Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$. Consideremos $C^\infty(\Omega)$, el espacio de las funciones de clase C^∞ en Ω con valores complejos, cuya topología es la asociada a la familia de seminormas $\{p_N : N \in \mathbb{N}\}$ dada por:

$$p_N(f) = max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leq N\} \ \forall f \in C^\infty(\Omega),$$

donde $\{K_N\}$ es cualquier sucesión exhaustiva de compactos de Ω,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$$

es un multiíndice, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ y

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}(f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}(x) \ \forall x \in \Omega, f \in C^\infty(\Omega).$$

Es fácil comprobar que $C^\infty(\Omega)$ es completo con lo que es un espacio de Fréchet. Conviene también recordar que $\{f_n\} \to f \in C^\infty(\Omega)$ cuando $\{D^\alpha f_n\}$ converge a $D^\alpha f$ uniformemente en cada compacto de Ω, para todo multiíndice α.

Como consecuencia del teorema de Ascoli-Arzelá, destacamos la siguiente propiedad del espacio $C^\infty(\Omega)$, de donde se puede deducir que dicho espacio no es localmente acotado y, por tanto, no normable, en virtud del criterio de normabilidad de Kolmogorov.

Proposición IX.1.1 . *El espacio $C^\infty(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel, esto es, todo subconjunto cerrado y acotado de $C^\infty(\Omega)$ es compacto.*

Definición IX.1.2 . *Sea K un subconjunto compacto de Ω (sólo nos interesa el caso en que K tiene interior no vacío). Notaremos $\mathcal{D}(K)$ al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones que se anulan en $\Omega \setminus K$.*

Claramente $\mathcal{D}(K)$ es un subespacio cerrado de $C^\infty(\Omega)$. Puesto que la familia de seminormas $\{p_N : N \in \mathbb{N}\}$ es creciente (podemos olvidar un número finito de ellas sin afectar a la topología asociada), mientras que, tomando N suficientemente avanzado ($K \subset K_N$) se tiene claramente

$$p_N(f) = max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K, |\alpha| \leq N\} \ \forall f \in \mathcal{D}(K),$$

vemos que la topología inducida por $C^\infty(\Omega)$ en $\mathcal{D}(K)$ coincide con la asociada a la sucesión de normas $\{\| \ \|_N : N \in \mathbb{N}\}$ en $D(K)$ dada por:

$$\|f\|_N = max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K, |\alpha| \leq N\} \ \forall f \in \mathcal{D}(K), N \in \mathbb{N}.$$

En lo sucesivo, $\mathcal{D}(K)$ portará siempre la topología $\mathcal{T}_K$ asociada a dicha sucesión de normas. Nótese que en realidad ni el espacio $\mathcal{D}(K)$ ni la topología $\mathcal{T}_K$ dependen del abierto Ω. De hecho podríamos haber empezado con $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Recogemos ahora las principales propiedades del espacio $\mathcal{D}(K)$, consecuencia de ser cerrado en $C^\infty(\Omega)$.

Proposición IX.1.3 . *Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$, el espacio $\mathcal{D}(K)$ es un espacio de Fréchet con la propiedad de Heine-Borel. Si H es otro compacto de $\mathbb{R}^d$ cuyo interior contiene a K entonces $\mathcal{T}_H$ induce en $\mathcal{D}(K)$ la topología $\mathcal{T}(K)$ y $\mathcal{D}(K)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{D}(H)$.*

El espacio que realmente nos interesa es el siguiente.

Definición IX.1.4 . *Una* **función test** *en Ω es, por definición, una función $f \in C^\infty(\Omega)$ de soporte compacto, es decir, tal que $f \in \mathcal{D}(K)$ para algún compacto $K \subset \Omega$. Notaremos $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio de las funciones test en Ω, que además verifica:*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \cup_{N=1}^\infty \mathcal{D}(K_N),$$

donde $\{K_N\}$ es cualquier exhaución de compactos en Ω.

Nuestro próximo objetivo es presentar la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$. Obsérvese que las normas $\| \, \|_N$ utilizadas para $\mathcal{D}(K)$ siguen teniendo sentido para $\mathcal{D}(\Omega)$ y generan, por tanto, una topología localmente convexa metrizable en $\mathcal{D}(\Omega)$. El problema es que dicha topología no es completa ya que de hecho $\mathcal{D}(\Omega)$ es de primera categoría en sí mismo. Fue L. Schwartz, padre de la teoría de las distribuciones, quien ideó la topología apropiada del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, que pasamos a definir.

Proposición IX.1.5. *La familia de subconjuntos*

$$\mathcal{B} = \{W \in \mathcal{D}(\Omega) : W \text{ es convexo, equilibrado y } W \cap \mathcal{D}(K) \in \mathcal{T}_K$$

$$\text{para todo compacto } K \subset \Omega\}$$

es una base de entornos de cero para una topología localmente convexa y separada $\mathcal{T}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Además $\mathcal{T}$ no es más que la familia de todas las uniones de conjuntos de la forma $\phi + W$ donde $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $W \in \mathcal{B}$. A partir de ahora cualquier referencia topológica al espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ se entenderá respecto de la topología $\mathcal{T}$.

Merece la pena resaltar que si en la definición de $\mathcal{B}$ sustituimos los compactos de Ω por una exhaución compacta en Ω obtenemos la misma topología en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Recogemos en el siguiente enunciado las propiedades más interesantes del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposición IX.1.6.

(i) Un conjunto convexo y equilibrado $V \in \mathcal{D}(\Omega)$ es abierto si, y sólo si, $V \in \mathcal{B}$.

(ii) La topología $\mathcal{T}_K$ de todo $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ coincide con la topología de subespacio que $\mathcal{D}(K)$ hereda de $\mathcal{D}(\Omega)$.

(iii) Si $A \in \mathcal{D}(\Omega)$ es acotado, entonces existen $K \in \Omega$ compacto y una sucesión $\{M_N\} \subset \mathbb{R}$ tales que $A \subset \mathcal{D}(K)$ y

$$\|\phi\|_N \leq M_N \ \forall \phi \in A, \ \ N \in \mathbb{N}.$$

(iv) $\mathcal{D}(\Omega)$ *tiene la propiedad de Heine-Borel.*

(v) *Si* $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *es una sucesión de Cauchy, entonces existe* $K \subset \Omega$ *compacto tal que* $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$ *verificándose*

$$lim_{n,m\to+\infty}\|\phi_n - \phi_m\|_N = 0 \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

(vi) *Si* $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *es una sucesión con límite cero, entonces existe* $K \subset \Omega$ *compacto que contiene al soporte de las funciones* $\{\phi_n\}$ *y para todo multiíndice* α *la sucesión* $\{D^\alpha\phi_n\} \to 0$ *uniformemente.*

De las propiedades anteriores se desprende fácilmente la complitud secuencial del espacio de las funciones test. Pasamos ahora a la complitud de dicho espacio.

Primero una observación evidente; si $\mathcal{F}$ es un filtro en un EVT y $\mathcal{U}$ es el filtro de entornos de cero, entonces

$$\mathcal{F} + \mathcal{U} = \{F + U : F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$$

es una base de filtro; si $\mathcal{F}$ es de Cauchy también lo es $\mathcal{F} + \mathcal{U}$, por la continuidad de la suma; si $\mathcal{F} + \mathcal{U}$ converge, también converge $\mathcal{F}$, ya que $\mathcal{F} + \mathcal{U} \subset \mathcal{F}$.

Proposición IX.1.7. *Sea* $\{K_N\}$ *una exhaución compacta en* Ω *y* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Existe un número natural* N *tal que:*

$$(F + U) \cap \mathcal{D}(K_N) \neq \emptyset$$

para cualquier $F \in \mathcal{F}$ *y cualquier entorno de cero* U *en* $\mathcal{D}(\Omega)$.

De lo contrario existiría una sucesión $\{U_n\}$ de entornos de cero en $\mathcal{D}(\Omega)$ y una sucesión $\{F_n\}$ de elementos de $\mathcal{F}$ tales que

$$(F_n + U_n) \cap \mathcal{D}(K_n) = \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Se puede suponer sin perder generalidad que cada U_n es absolutamente convexo y contiene a U_{n+1}. Sea U la envolvente absolutamente convexa de $\cup_{n=1}^{\infty}(U_n \cap \mathcal{D}(K_n))$ y veamos que

$$(F_n + U) \cap \mathcal{D}(K_n) = \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

En efecto, si para algún natural n, $x \in (F_n + U) \cap \mathcal{D}(K_n)$, podríamos escribir

$$x = a + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$$

con $a \in F_n$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $x_j \in U_j \cap \mathcal{D}(K_j)$ para $j = 1, 2, \dots, k$, $\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \leq 1$ y no hay inconveniente en suponer $n < k$. Entonces $\sum_{j=n+1}^{k} \alpha_j x_j \in U_{n+1}$, luego

$$x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = a + \sum_{j=n+1}^{k} \alpha_j x_j \in \mathcal{D}(K_n) \cap (F_n + U_{n+1}) \subset \mathcal{D}(K_n) \cap (F_n + U_n),$$

una contradicción; se verifica por tanto (2).

Puesto que $U \cap \mathcal{D}(K_n) \supset U_n \cap \mathcal{D}(K_n)$, cada conjunto $U \cap \mathcal{D}(K_n)$ es entorno de cero en $\mathcal{D}(K_n)$, luego U es entorno de cero en $\mathcal{D}(\Omega)$. Usando que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy obtenemos un $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset U$. Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, por ser $F \cap F_n \neq \emptyset$ ($\mathcal{F}$ es un filtro), tenemos

$$F - (F \cap F_n) \subset U, \quad \text{luego} \quad F \subset F_n + U,$$

y aplicando (2),

$$F \cap \mathcal{D}(K_n) = \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

una contradicción.

Corolario IX.1.8 . *El espacio* $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T})$ *es completo.*

Sea $\{K_N\}$ una exhaución compacta en Ω, $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{U}$ el filtro de entornos de cero en X y

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} + \mathcal{U} = \{F + U : F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}.$$

Es claro que $\tilde{\mathcal{F}}$ es una base de filtro de Cauchy contenida en $\mathcal{F}$ y bastará probar que $\tilde{\mathcal{F}}$ converge. Por la proposición anterior, existe un natural N tal que $\tilde{F} \cap \mathcal{D}(K_N) \neq \emptyset$ para $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$. En resumen, podemos suponer desde el principio que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $F \cap \mathcal{D}(K_N) \neq \emptyset$ para $F \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}_N = \{F \cap \mathcal{D}(K_N) : F \in \mathcal{F}\}$ es un filtro de Cauchy en $\mathcal{D}(K_N)$, luego $\mathcal{F}_m \to x \in \mathcal{D}(K_N)$. Para cualquier $F \in \mathcal{F}$ y cualquier entorno de cero U en $\mathcal{D}(\Omega)$ tenemos entonces que

$$F \cap \mathcal{D}(K_N) \in \mathcal{F}_N \ , \quad x + (U \cap \mathcal{D}(K_N)) \in \mathcal{F}_N,$$

luego $(x+U) \cap F \neq \emptyset$; así $x \in \overline{F}$ para $F \in \mathcal{F}$, esto es, x es un valor adherente al filtro $\mathcal{F}$, pero un filtro de Cauchy que tiene un valor adherente es convergente.

Gracias al teorema de Baire obtenemos, en particular, la no metrizabilidad del espacio de las funciones test, por ser completo y de primera categoría en sí mismo (de hecho basta para ello la complitud secuencial). Sin embargo sorprenderá bastante la siguiente caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales que salen de $\mathcal{D}(\Omega)$, consecuencia de la metrizabilidad de los espacios $\mathcal{D}(K)$ y las propiedades presentadas en la proposición IX.1.6.

Proposición IX.1.9 . *Sea Y un espacio localmente convexo y separado y $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:*

(i) T es continua.

(ii) T es acotada, esto es, transforma acotados en acotados.

(iii) T es secuencialmente continua.

(iv) Para cada $K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ compacto, la restricción de T al espacio $\mathcal{D}(K)$ es continua.

Corolario IX.1.10 . *Todo operador diferencial D^α es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{D}(\Omega)$ en sí mismo.*

Pongamos ya nombre a los elementos del dual del espacio de las funciones test.

Definición IX.1.11 . *Una distribución en Ω es un funcional lineal y continuo en $\mathcal{D}(\Omega)$. Notaremos, como es usual, $\mathcal{D}'(\Omega)$ al espacio de las distribuciones en Ω, es decir, al dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

La caracterización de la continuidad de una aplicación lineal que sale del espacio de las funciones test, obtenida en la anterior proposición, nos permite hacer lo propio con las distribuciones.

Corolario IX.1.12 . *Sea Λ un funcional lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$. Entonces son equivalentes:*

(i) *Λ es una distribución.*

(ii) *Para cada $K \subset \Omega$ compacto existen $N \in \mathbb{N}$ y $C \in \mathbb{R}$ tales que*

$$|\Lambda(\phi)| \leq C\|\phi\|_N \ \forall \phi \in \mathcal{D}(K).$$

Ejemplos.-

(i) **Funciones:** Sea φ una función localmente integrable en Ω, es decir, $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función medible-Lebesgue y se tiene $\int_K |\varphi| \, d\lambda < \infty$ para cualquier compacto $K \subset \Omega$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

Para $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene $f\varphi \in L_1(\lambda)$, luego podemos definir un funcional lineal Λ_φ en $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\Lambda_\varphi(f) = \int_\Omega f\varphi \, d\lambda \qquad (f \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Para K compacto y $f \in \mathcal{D}(K)$ se tiene

$$|\Lambda_\varphi(f)| \leq \left(\int_K |\varphi| \, d\lambda\right) \|f\|_0.$$

luego $\Lambda_\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En particular, a cada $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ hemos asociado una distribución Λ_φ.

(ii) **Medidas:** Generalizando parte de lo dicho en i) (concretamente el caso $\varphi \in L_1(\Omega)$), sea $\mu \in M(\Omega)$, una medida de Borel compleja en Ω y pongamos

$$\Lambda_\mu(f) = \int_\Omega f \, d\mu \qquad (f \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Entonces

$$|\Lambda_\mu(f)| \leq |\mu|(\Omega)\ \|f\|_0 \qquad (f \in \mathcal{D}(\Omega))$$

así que $\Lambda_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Como caso particular, se obtiene la distribución que suele denominarse la medida δ_x **de Dirac en** x, dada por $\delta_x(\phi) = \phi(x)$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

iii) Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y pongamos

$$\Lambda(f) = f'(0) \qquad (f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

Es inmediato que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Λ no es una función y tampoco es una medida.

Como dijimos, al principio de este capítulo la clase de las distribuciones nos va a permitir asignar una derivada a funciones que no son derivables. La igualdad obtenida en dicha motivación da pie a dar la siguiente

Definición IX.1.13 . *Sea $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y α un multiíndice. Se define* **la distribución derivada $\alpha-$ésima de** Λ, *denotada por $D^\alpha\Lambda$, mediante:*

$$(D^\alpha\Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\phi)\ \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{9.1}$$

Si f es una función localmente integrable en Ω, se define **la distribución derivada $\alpha-$ésima de** f *mediante $D^\alpha f = D^\alpha\Lambda_f$, también conocida como derivada en sentido distribucional de f. Es fácil comprobar a estas alturas que realmente la igualdad 9.1 define una distribución en Ω.*

Si f es una función localmente integrable y la derivada $D^\alpha f$ existe en sentido ordinario tenemos entonces dos posibles definiciones para dicha derivada: $\Lambda_{D^\alpha f}$ y $D^\alpha\Lambda_f$. La fórmula de integración por partes nos da la igualdad de ambas si f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta el orden $|\alpha|$. En caso contrario, hay que exigir la continuidad absoluta de la función f.

Dado que $\mathcal{D}'(\Omega)$ es el dual topológico del espacio localmente convexo y separado $\mathcal{D}(\Omega)$, disponemos en el espacio de las distribuciones de la topología w^*, única topología que consideraremos en dicho espacio. El siguiente resultado, consecuencia del teorema de cierre de Steinhauss, proporciona la posibilidad de derivar término a término en una sucesión de distribuciones.

Corolario IX.1.14 . *Sea* $\{\Lambda_n\}$ *una sucesión de distribuciones en* Ω *y supongamos que para cada* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *existe el límite* $\lim_n \Lambda_n(\phi) = \Lambda(\phi)$. *Entonces* $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *y la sucesión* $\{D^\alpha \Lambda_n\}$ *converge a* $D^\alpha \Lambda$ *para cada multiíndice* α*, en el espacio de las distribuciones.*

Para finalizar este tema, partiremos de la convolución de dos funciones para definir después la convolución de una distribución y una función de clase C^∞.

Definición IX.1.15 . *Si* u *es una función compleja definida en* $\mathbb{R}^n$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$*, definimos las funciones* $\tau_x u$ *y* $\tilde{u}$ *mediante:*

$$(\tau_x u)(y) = u(y - x), \ \tilde{u}(y) = u(-y) \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Para dos funciones complejas u *y* v *definidas en* $\mathbb{R}^n$*, se define su* **convolución** $u * v$ *mediante:*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x - y)dy \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

supuesto que dicha integral existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$*, en el sentido de Lebesgue. Según la notación anterior, la convolución se puede escribir:*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\tau_x \tilde{v})(y)dy \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos entonces

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \widetilde{\phi}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Puesto que la igualdad $\int (\tau_x u)v = \int u(\tau_{-x} v)$ *se verifica para funciones* u *y* v*, se define la traslación* $\tau_x u$ *para* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *mediante:*

$$(\tau_x u)(\phi) = u(\tau_{-x}\phi) \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), x \in \mathbb{R}^n.$$

Nótese que la convolución es siempre una función. A continuación recogemos algunas propiedades que nos serán de utilidad en las aplicaciones del tema siguiente, como las más características digamos que la convolución conmuta con las traslaciones y derivaciones así como el efecto regularizador.

Proposición IX.1.16 . *Sean u una distribución en $\mathbb{R}^n$ y $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

(i) $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y* $D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi)$ *para todo multiíndice* α.

(iii) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi$.

IX.2 Aplicaciones

Pretendemos en este tema presentar algunas aplicaciones al mundo de las ecuaciones diferenciales y al de la geometría (diferencial) del desarrollo hecho en el tema anterior sobre el espacio de las distribuciones.

Nuestro primer objetivo es presentar el célebre teorema de Ehrenpreis y Malgrange sobre existencia de solución fundamental en ecuaciones en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes. Comenzamos introduciendo la notación precisa. Si P es un polinomio de n variables con coeficientes complejos no nulo que denotaremos en la forma

$$P(z_1, \ldots, z_n) = \sum c_\alpha z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n},$$

se define el **operador diferencial** asociado a P mediante

$$P(D) = \sum c_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ denota como siempre un multiíndice.

El producto escalar usual en $L_2(\mathbb{R}^n)$ será denotado por $< \, , \, >$ y la norma de dicho espacio por $\| \, \|$.

Una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y de coeficientes constantes responde a la forma

$$P(D)u = v,$$

donde $P(D)$ es un operador diferencial no nulo asociado a un polinomio P, v es una función dada y u es una solución de dicha ecuación.

El primer paso consiste en ver que el problema planteado tiene solución $u \in L_2(\Omega)$, siendo Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, siempre que el dato $v \in L_2(\Omega)$. (Como es usual, siempre que no cause problemas veremos los elementos de L_2 como funciones y no como clases de equivalencia). Para ello, se precisará una desigualdad que no esconde otra cosa que la estructura de espacio de Hilbert.

Proposición IX.2.17 .*(Desigualdad de Hrmander) Si $P(D)$ es un operador diferencial no nulo con coeficientes constantes, entonces para cada abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|P(D)\phi\| \geq C\|\phi\| \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Corolario IX.2.18. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $v \in L_2(\Omega)$ y $P(D)$ un operador diferencial no nulo con coeficientes constantes. Entonces existe $u \in L_2(\Omega)$ tal que $P(D)u = v$, donde las derivadas de la función u han de ser entendidas en el sentido distribucional.*

El hecho de que u sea solución de la ecuación significa que

$$< v, \phi >=< u, P(D)^*\phi > \ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $P(D)^*$ denota el operador adjunto de $P(D)$ que es un operador lineal y continuo en $\mathcal{D}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

La desigualdad de Hrmander junto con el hecho de que los operadores diferenciales con coeficientes constantes conmutan nos dice que

$$\|P(D)^*\phi\| \geq C\|\phi\| \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{9.2}$$

para alguna constante positiva C. Consideremos ahora el siguiente subespacio de $L_2(\Omega)$:

$$E = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \psi = P(D)^*\phi \text{ para alguna } \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

La desigualdad 9.2 muestra que la aplicación de E en $\mathbb{C}$ dada por: $\psi \to < v, \phi >$ con $\psi = P(D)^*\phi$, es un funcional conjungado lineal y continuo en E como subespacio de $L_2(\Omega)$, que podemos extender al cierre $\overline{E}$. La autodualidad de un espacio de Hilbert nos proporciona ahora una función $u \in \overline{E}$ que es solución de nuestro problema.

El siguiente paso hacia nuestro objetivo, que no detallaremos, consiste en resolver nuestra ecuación en $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que una función compleja definida en $\mathbb{R}^n$ pertenece a $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si su módulo al cuadrado es una función integrable en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.

Digamos que el siguiente resultado esconde una nueva desigualdad, consecuencia directa de la de Hrmander, y utiliza de forma ingeniosa las propiedades de regularidad del producto de convolución de dos funciones.

Teorema IX.2.19 . *Si $P(D)$ es como hasta ahora y $v \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $u \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ verificando*

$$P(D)u = v,$$

donde otra vez las derivadas de u se entienden en sentido distribucional.

Corolario IX.2.20 .*(Ehrenpreis-Malgrange) Cada operador diferencial no nulo $P(D)$ con coeficientes constantes en $\mathbb{R}^n$ tiene una solución fundamental, esto es, existe una distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ verificando $P(D)\Lambda = \delta_0$, donde δ_0 es la distribución de Dirac en el origen.*

Para su comprobación, consideramos la función H en $\mathbb{R}^n$ en la forma:

$$H(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ si } x_i > 0 \ \forall i \text{ y } H = 0 \text{ en otro caso.}$$

El interés de la función H es el ser solución de nuestra ecuación para un operador diferencial particular, en concreto se tiene:

$$(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n})H = \delta_0.$$

El teorema anterior nos proporciona una función $u \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ verificando $P(D)u = H$. Consideremos ahora la distribución

$$\Lambda = (\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n})u.$$

Tenemos ahora, gracias otra vez a que los operadores diferenciales con coeficientes constantes conmutan, que

$$P(D)\Lambda = P(D)(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n})u = (\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n})P(D)u = \delta_0.$$

Las propiedades del producto de convolución estudiadas en el tema anterior permiten obtener la siguiente consecuencia, en la que la solución a nuestra ecuación es de hecho una función regular.

Corolario IX.2.21. *Si $P(D)$ es como hasta ahora y $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ verificando $P(D)u = v$.*

Pasamos ahora a presentar una aplicación al mundo de la geometría diferencial sobre existencia de geodésicas.

Definición IX.2.22. *Sea M un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Una curva continua $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ se dirá* **rectificable** *si su derivada distribucional $\nabla\gamma \in L_1([0,1],\mathbb{R}^n)$. En tal caso se define la* **longitud de** γ *mediante*

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\nabla\gamma(s)| ds,$$

donde $|\ |$ denotará la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Definimos también la energía de la curva γ, cuando $\nabla\gamma \in L_2([0,1],\mathbb{R}^n)$, mediante:

$$E(\gamma) = \int_0^1 |\nabla\gamma(t)|^2 dt.$$

Para llegar a la existencia de geodésicas en cualquier cerrado de $\mathbb{R}^n$ que contenga curvas rectificables utilizaremos, además del teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue, la siguiente propiedad de las distribuciones en $\mathbb{R}$.

Proposición IX.2.23 . *Sea* $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *con derivada nula, esto es,* $\Lambda'(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Entonces existe una función constante* λ *de forma que* $\Lambda = \Lambda_\lambda$.

Para su comprobación, obsérvese que por tener Λ derivada nula se verifica que $\Lambda(D\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donde D denota el operador en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en sí mismo que asocia a cada función su derivada. El hecho de que la imagen de D sea el conjunto de aquellas funciones $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 0$ nos dice que

$$Ker\Lambda_{\mathbf{1}} \subset Ker\Lambda,$$

donde **1** es la función constantemente 1. Se deduce entonces que los funcionales Λ y $\Lambda_{\mathbf{1}}$ son proporcionales, como se quería.

Corolario IX.2.24 . *Si* $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *y* Λ' *es una función localmente integrable* g, *entonces* Λ *es una función absolutamente continua* f *y, en consecuencia, la derivada de* f *como distribución y como función es* g.

Teorema IX.2.25. *Sean* M *un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *y* $x \neq y \in M$. *Supongamos que existe* γ *una curva rectificable en* M *uniendo los puntos* x, y, *esto es,* $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. *Entonces existe* $\widetilde{\gamma}$ *curva rectificable en* M *uniendo los puntos* x *e* y, *verificando*

$$L(\widetilde{\gamma}) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ curva rectificable en M con } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

es decir, $\widetilde{\gamma}$ *es una* **geodésica** *en* M *uniendo los puntos* x *e* y.

Consideremos el subconjunto

$$B = \{f \in L_2([0,1], \mathbb{R}^n) : \gamma_f(s) := x + \int_0^s f(t)dt \in M \ \forall s \in [0,1],$$
$$\gamma_f(1) = y\}.$$

Para cada $s \in [0,1]$ la aplicación lineal de $L_2([0,1], \mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{R}^n$ dada por: $f \to \int_0^s f(t)dt$ es $w-$continua y, por tanto, B es $w-$cerrado, ya que M es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Además la aplicación $\widetilde{E}$ de B en $\mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{E}(f) = E(\gamma_f) = \int_0^1 |f(s)|^2 ds \ \forall f \in B,$$

es débilmente semicontinua inferiormente. Además, como el conjunto $\{f \in B : \widetilde{E}(f) \leq \alpha\}$ es acotado para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que $\widetilde{E}$ alcanza mínimo en B, en cuanto probemos que $B \neq \emptyset$.

Para cada γ curva rectificable en M uniendo x e y consideremos la aplicación $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$T(s) = L(\gamma)^{-1} \int_0^s |\nabla\gamma(t)| dt \ \forall s \in [0,1].$$

Es claro que T es una aplicación absolutamente continua y sobreyectiva, por tanto cerrada. Además $T(s_1) = T(s_2)$ si, y sólo si, la curva γ es constante en el intervalo formado por s_1 y s_2. Obtenemos entonces una curva continua $\gamma^* : [0,1] \longrightarrow M$ de forma que $\gamma^*(T(s)) = \gamma(s) \ \forall s \in [0,1]$. La curva γ no es más que una reparametrización de γ^*, por lo que se llega sin dificultad a que $L(\gamma^*) = L(\gamma)$, ya que gracias al corolario anterior $(\nabla\gamma^* \circ T)T' = \nabla\gamma$, igualdad que hay que entender en $L_2([0,1], \mathbb{R}^n)$.

Gracias a la última igualdad y a la definición de T obtenemos que

$$\int_0^{T(s)} |\nabla\gamma^*(t)| dt = T(s)L(\gamma),$$

lo que nos dice, otra vez en sentido casi por doquier, que $|\nabla\gamma^*| = L(\gamma)$. Tenemos entonces ya la no vaciedad de B tomando como $f = \nabla\gamma^*$.

Para cualquier curva γ en M rectificable uniendo x e y tenemos las desigualdades

$$E(\gamma) \geq L(\gamma)^2 = L(\gamma^*)^2 = E(\gamma^*).$$

Si consideramos ahora $f_0 \in B$ donde $\widetilde{E}$ alcanza mínimo y hacemos $\gamma_0 = \gamma_{f_0}$ tenemos gracias a las desigualdades anteriores que $E(\gamma_0) = E(\gamma_0^*)$.

Finalmente tenemos que

$$L(\gamma_0) = L(\gamma_0^*) = E(\gamma_0^*)^{\frac{1}{2}} \leq E(\gamma^*)^{\frac{1}{2}} = L(\gamma^*) = L(\gamma),$$

para cada γ curva rectificable en M uniendo x, y. Basta tomar entonces $\widetilde{\gamma} = \gamma_0^*$.

Además obsérvese que se obtiene que la curva $\widetilde{\gamma}$ tiene módulo del gradiente constante casi por doquier, lo que hace que podamos interpretar el resultado físicamente diciendo: *"una partícula que se mueve en una superficie entre dos puntos sigue un camino de longitud y energía mínimas con velocidad constante."*

BIBLIOGRAFIA: Referencias obligadas para la teoría de las distribuciones son el libro de L. Schwartz [49] y la enciclopédica obra de Gelfand et al. [22]. El libro de Horvath [27] contiene el marco general de topología localmente convexa final de la que se dota al espacio de las funciones test de forma bastante asequible. Nosotros hemos seguido a [45] en nuestro primer tema. La forma de llegar al teorema de Ehrenpreis-Malgrange la hemos seguido de [44]. Más información a este respecto relacionada con transformada de Fourier, distribuciones temperadas, etc, puede encontrarse en [45]. Por último, el teorema sobre existencia de geodésicas lo hemos encontrado en [40], aunque por supuesto un libro apropiado de geometría diferencial es [51].

Capítulo X

INTRODUCCION A LAS ALGEBRAS DE BANACH.

El presente capítulo es una introducción a lo que hoy se denomina Teoría Espectral, parte fundamental del Análisis Funcional e históricamente la más antigua. El estudio abstracto de las álgebras de Banach, ambiente apropiado en el que se desarrolla la teoría, data de 1.940 con los trabajos de I. Gelfand.

Comenzamos nuestro primer tema presentando el concepto de álgebra normada y los procesos canónicos de renormación equivalente, completación y unitización que permiten situarse en el ambiente más deseable, el de álgebra de Banach unital. Estudiamos los elementos inversibles de un álgebra de Banach unital usando ya el radio espectral. El segundo tema combina resultados de la variable compleja con los del Análisis Funcional para obtener, después de presentar el espectro, la no vaciedad de éste para un elemento de un álgebra normada compleja con unidad, de donde se deduce el teorema de Gelfand-Mazur. Dedicamos el tercer tema al teorema de Gelfand-Naimark para el caso conmutativo, tras presentar la transformación de Gelfand y concluir que dicha trasformación es perfecta en el ambiente de las C^*-álgebras. El último tema se dedica a un breve estudio de los operadores compactos tras el que se presenta la teoría de Riesz-Schauder. Hasta ahora no habíamos encontrado el lugar apropiado para presentar una teoría de operadores, que como se verá encuentra aquí su marco más apropiado, ya que sin duda el espacio de los operadores en un espacio de Banach es el ejemplo más importante de álgebra de Banach.

X.1 Elementos inversibles de un álgebra

El presente tema tiene un carácter principalmente preparatorio. Precisamos gran parte de la nomenclatura algebraica que va a usarse e introducimos formalmente el concepto abstracto de álgebra de Banach, que ha aparecido implícitamente alguna vez en este proyecto docente. Repasamos los procedimientos canónicos (renormación equivalente, completación, unitización) que permiten, hasta cierto punto, mejorar progresivamente las propiedades de un álgebra normada hasta situarse en el caso de un álgebra de Banach unital. De paso obtenemos un resultado debido a Gelfand, que a veces se conoce como "teorema de la representación regular" y que muestra cualquier álgebra normada (asociativa) como subálgebra del álgebra $L(X)$ de los operadores en un espacio de Banach X. Pasamos entonces al estudio de los elementos inversibles de un álgebra de Banach unital, usando ya el concepto de "radio espectral", y de las propiedades básicas del paso a inverso.

Todas las álgebras que van a aparecer en este capítulo son álgebras asociativas reales o complejas. Concretamos por tanto el significado que tendrá la palabra "álgebra" junto con alguna nomenclatura de carácter puramente algebraico:

Definición X.1.1 . *Diremos que un espacio vectorial A es un* **álgebra** *cuando se tenga definida una aplicación bilineal de $A \times A$ en A, llamada* **producto** *y denotada por yuxtaposición,*

$$(a, b) \to ab \quad (a, b \in A),$$

que es **asociativa***, esto es,*

$$(ab)c = a(bc) \quad (a, b, c \in A).$$

Una **subálgebra** *de A es un subespacio vectorial M de A que verifica $MM \subset M$. Si de hecho se tiene que $AM \subset M$ y $MA \subset M$ diremos que M es un* **ideal** *de A. Si ahora B es otra álgebra sobre el mismo cuerpo que A, una aplicación lineal $T : A \to B$ que verifique*

$$T(xy) = T(x)T(y) \quad (x, y \in A)$$

recibirá el nombre de **homomorfismo de álgebras**. *Cuando* T *sea inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) diremos que* T *es un* **monomorfismo** *(resp.* **epimorfismo**, **isomorfismo** *) de álgebras. Si* $T : A \to B$ *es un homomorfismo de álgebras,* $T(A)$ *es una subálgebra de* B *y* $\ker T$ *es un ideal de* A*. Recíprocamente, si* M *es un ideal de un álgebra* A*, el espacio vectorial cociente* A/M *es un álgebra con el producto definido por*

$$(x+M)(y+M) = xy + M \qquad (x, y \in A),$$

denominada **álgebra cociente** *de* A *por* M*, la proyección canónica* $\pi : A \to A/M$ *es un epimorfismo de álgebras y* $\ker \pi = M$*. En general, si* $T : A \to B$ *es un homomorfismo de álgebras,* $A/\ker T$ *y* $T(A)$ *son álgebras isomorfas. Una* **unidad** *para un álgebra* A *es un elemento* $I \in A$ *(evidentemente único) que verifica* $Ia = aI = a \quad (a \in A)$*. Si* M *es un ideal de* A*, entonces* $I + M$ *es la unidad del álgebra cociente* A/M*. Dada un álgebra* A*, podemos considerar el espacio vectorial* $A \times \mathbb{K}$*, que es un álgebra con el producto definido por*

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

para $a, b \in A, \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$*. Es inmediato que* $A \times \mathbb{K}$ *con este producto es un álgebra con unidad* $I = (0, 1)$*, que recibe el nombre de* **unitización** *de* A *y se denota por* A_1*. La aplicación* $a \to (a, 0)$ *de* A *en* A_1 *es un monomorfismo de álgebras y su imagen* $A \times \{0\}$ *es un ideal de* A_1*. Es costumbre identificar* A *con* $A \times \{0\}$ *y considerar* A *como un ideal de* A_1*. Cada elemento* $x \in A_1$ *se expresa entonces de manera única, en la forma* $x = a + \lambda I$ *con* $a \in A$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Si* A *es un álgebra con unidad* I*, un elemento* $a \in A$ *es* **inversible** *en* A *cuando existe* $b \in A$ *tal que* $ab = ba = I$*; el tal elemento* b *es único, se le denomina* **inverso** *de* a *y escribimos* $b = a^{-1}$*. Notaremos por* $\mathrm{Inv}(A)$ *al conjunto de los elementos inversibles de* A*. Es claro que* $\mathrm{Inv}(A)$*, con el producto heredado de* A*, es un grupo. Finalmente diremos que un álgebra* A *es* **conmutativa** *cuando lo sea su producto, esto es* $ab = ba \quad (a, b \in A)$*. Es claro que la conmutatividad se hereda por subálgebras y se conserva en el paso a cociente y en el paso de un álgebra a su unitización.*

Nótese que la noción de homomorfismo de álgebras colisiona en cierto modo con el uso bastante cómodo que hasta ahora habíamos hecho del término “homomorfismo”. Deberemos por tanto someter dicho uso a una mayor disciplina:

En lo sucesivo llamaremos **homomorfismo topológico** a una aplicación lineal continua $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios vectoriales topológicos, tal que T es abierta cuando se la considera como aplicación de X sobre $T(X)$. El mismo criterio se aplicará a los términos mono- , epi- , e isomorfismo

Si en un álgebra A disponemos de una norma $\|\cdot\|$, el axioma natural de buena avenencia entre la norma y el producto de A consiste en que el producto sea una aplicación bilineal continua, esto es, que exista una constante $M > 0$ tal que

$$\|ab\| \leq M\|a\|\|b\| \quad (a, b \in A).$$

Poniendo $|a| = M\|a\| \quad (a \in A)$, tenemos una norma equivalente en A que verifica

$$|ab| \leq |a||b| \quad (a, b \in A),$$

luego no es restrictivo suponer que $M = 1$.

Definición X.1.2. *Se dice que un álgebra A, es un* **álgebra normada** *si existe una norma $\|\cdot\|$ en A verificando:*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad (a, b \in A).$$

Si, además, la norma $\|\cdot\|$ es completa, decimos que A es un **álgebra de Banach**. *Dos álgebras normadas A y B se dirán* **topológicamente isomorfas** *cuando exista un isomorfismo topológico de A sobre B que sea también un isomorfismo de álgebras. Dos álgebras normadas* **isométricamente isomorfas** *son idénticas a todos los efectos. Diremos que un álgebra normada A es* **unital** *si tiene unidad I, verificándose que $\|I\| = 1$.*

La primera parte del siguiente enunciado se deduce claramente de la continuidad del producto en un álgebra normada. Para la segunda, aparte de una comprobación rutinaria, se debe recordar que el cociente de un espacio normado (resp. de Banach) por un subespacio cerrado, es un espacio normado (resp. de Banach).

Proposición X.1.3 .

i) *En un álgebra normada el cierre de una subálgebra (resp. ideal) es una subálgebra (resp. ideal).*

ii) *Si A es un álgebra normada (resp. de Banach) y M es un ideal cerrado de A, entonces el álgebra cociente A/M es un álgebra normada (resp. de Banach) con la norma cociente.*

El primer ejemplo de álgebra normada apareció ya implícitamente, casi al mismo tiempo que el primer ejemplo de espacio normado. Enseguida veremos que se trata de algo más que un simple ejemplo.

Ejemplo.- Si $X \neq 0$ es un espacio normado, $L(X)$, con la norma usual de operadores y la composición como producto, es un álgebra normada unital, cuya unidad es el operador identidad en X. Además $L(X)$ es un álgebra de Banach si, y sólo si, X es un espacio de Banach.

En lo sucesivo trabajaremos sobre todo con álgebras de Banach unitales. Bueno será comentar brevemente las construcciones que permiten conseguir tales perfecciones. La completación de un álgebra normada se obtiene fácilmente a partir de la de un espacio normado:

Proposición X.1.4 . *Si A es un álgebra normada, existe un álgebra de Banach $\hat{A}$ y un isomorfismo isométrico de álgebras ϕ de A sobre una subálgebra densa de $\hat{A}$. El par $(\hat{A}, \phi)$ es único salvo isomorfismos de álgebras isométricos y se dice que $\hat{A}$ es la* **completación** *del álgebra normada A. Suele identificarse A con $\phi(A)$ y considerar A como una subálgebra densa de $\hat{A}$. Si A tiene unidad I entonces I también es unidad de $\hat{A}$; $\hat{A}$ es conmutativa si, y sólo si, lo es A.*

La unitización de un álgebra normada puede convertirse de varias formas en un álgebra normada. La siguiente es la más sencilla aunque no siempre se utiliza.

Proposición X.1.5. *Sea A un álgebra normada; definiendo*

$$\|a + \lambda I\| = \|a\| + |\lambda| \qquad (a \in A, \lambda \in \mathbb{K})$$

se obtiene una norma de álgebra en la unitización A_1 del álgebra A, que convierte a A_1 en un álgebra normada unital y hace que A sea un ideal cerrado de A_1. Además A_1 es completa si, y sólo si, lo es A.

El siguiente enunciado recoge algunas propiedades de la que suele denominarse **representación regular** de un álgebra normada. En particular obtenemos que un álgebra normada con unidad puede renormarse equivalentemente para hacerla unital. La demostración es completamente elemental.

Proposición X.1.6 . *Sea A un álgebra normada. Para cada $a \in A$ consideremos el* **operador de multiplicación** *por la izquierda por a, esto es, la aplicación $L_a : A \to A$ dada por*

$$L_a(x) = ax \qquad (x \in A)$$

i) *$L_a \in L(A)$ y $\|L_a\| \le \|a\| \quad \forall a \in A$.*

ii) *La aplicación $\lambda : A \to L(A)$ definida por*

$$\lambda(a) = L_a \quad (a \in A),$$

es un homomorfismo de álgebras continuo.

iii) *Si A tiene unidad $I \neq 0$, λ es un monomorfismo topológico. Por tanto, definiendo*

$$|a| = \|L_a\| \quad (a \in A)$$

se obtiene una norma equivalente en A con la cual A es un álgebra normada unital.

iv) *Si A es unital, entonces λ es isométrica.*

De las tres proposiciones anteriores deducimos fácilmente un resultado bastante vistoso, aunque, como suele ocurrir con este tipo de teoremas de representación tan generales, su utilidad es bastante limitada:

Corolario X.1.7 .*(Gelfand) Si A es un álgebra normada, existe un espacio de Banach X y un isomorfismo de álgebras, isométrico, de A sobre una subálgebra de $L(X)$.*

Antes de entrar en la parte más importante de este tema, el estudio de la inversibilidad en álgebras de Banach unitales, hacemos un inciso para mostrar una bonita aplicación del Teorema de la gráfica cerrada. El siguiente es un ejemplo (probablemente el más elemental) de los que suelen denominarse teoremas de continuidad automática.

Proposición X.1.8 . *Sea A un álgebra de Banach con la siguiente propiedad:*

$$a \in A, \quad ax = xa = 0 \quad \forall x \in A \quad \Rightarrow a = 0.$$

Sea $T : A \to A$ una aplicación lineal verificando que

$$xT(y) = T(x)y \qquad (x, y \in A).$$

Entonces T es continua.

Pasemos ya al estudio de la inversibilidad en un álgebra de Banach unital A. Notando por I a la unidad de A, el resultado básico consiste en que, cuando $a \in A$ y $\|a\| < 1$, se tiene que $I - a \in \mathrm{Inv}(A)$ con

$$(I - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

donde $a^0 = I$ y la serie converge absolutamente, ya que

$$\|a^n\| \leq \|a\|^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sin embargo la anterior estimación de $\|a^n\|$ puede afinarse mediante el siguiente concepto:

Definición X.1.9 . *Si A es un álgebra normada, se define el* **radio espectral**, *$r(a)$, de un elemento $a \in A$ por:*

$$r(a) = \inf\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $0 \leq r(a) \leq \|a\|$ y que $r(\lambda a) = |\lambda| r(a)$ para cualesquiera $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Lema X.1.10. *Si A es un álgebra normada, se verifica*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (a \in A).$$

Podemos ya establecer la siguiente condición suficiente de inversibilidad, un poco más fina que la antes comentada:

Proposición X.1.11 . *Sea A un álgebra de Banach unital y sea I la unidad de A. Si $a \in A$ y $r(a) < 1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 0} a^n$ es convergente, $I - a \in \mathrm{Inv}(A)$ y se verifica que $(I-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.*

Podemos ya establecer para álgebras de Banach unitales arbitrarias:

Teorema X.1.12. *Sea A un álgebra de Banach unital y sea I la unidad de A.*

i) *Si $a \in A$, $\|I - a\| < 1$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$ y $a^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(I-a)^n$.*

ii) *$\mathrm{Inv}(A)$ es un subconjunto abierto de A.*

iii) *La aplicación $J : \mathrm{Inv}(A) \to \mathrm{Inv}(A)$ dada por*

$$J(a) = a^{-1} \qquad (a \in \mathrm{Inv}(A))$$

es de clase C^∞ y se verifica:

$$DJ(a)(x) = -a^{-1}xa^{-1}$$

para cualesquiera $a \in \mathrm{Inv}(A)$, $x \in A$.

La primera parte del teorema anterior tiene una consecuencia importante acerca de los ideales de un álgebra de Banach unital. De paso consideramos los cocientes de una tal álgebra:

Corolario X.1.13. *Sea A un álgebra de Banach unital. Si M es un ideal propio de A ($M \neq A$), se tiene $dist(I, M) = 1$. Como consecuencia, $\overline{M}$ es un ideal propio de A y todo ideal maximal de A es cerrado. El cociente de A por un ideal propio cerrado, con la norma cociente, es un álgebra de Banach unital.*

X.2 Espectro. Teorema de Gelfand-Mazur

La noción de espectro no precisa demasiada motivación, puesto que se trata de una obvia generalización del conjunto de autovalores de una matriz cuadrada; ese mismo caso particular justifica el que nos limitemos al caso complejo. Conviene resaltar que el espectro es una noción puramente algebraica:

Definición X.2.14. *Sea A un álgebra compleja con unidad I. Llamaremos* **espectro** *de un elemento $x \in A$, al conjunto de números complejos definido por:*

$$Sp(A, x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - x \notin \text{Inv } (A)\}$$

y escribiremos simplemente $Sp(x)$ cuando no sea preciso especificar el álgebra ambiente A. La **función resolvente** *del elemento x es la función $\rho(x, \cdot) : \mathbb{C} \setminus Sp(x) \to A$ definida por*

$$\rho(x, \lambda) = (\lambda I - x)^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus Sp(x)).$$

Si A es el álgebra de las fracciones racionales en una indeterminada, con coeficientes complejos, todo elemento de A que no sea múltiplo de la unidad tiene espectro vacío. Si B es la subálgebra de A formada por los polinomios, se tiene que $Sp(B, x) = \mathbb{C}$ para cualquier $x \in B$ que no sea múltiplo de la unidad. Así pues, el espectro de un elemento puede ser vacío, puede no ser acotado, y depende esencialmente del álgebra ambiente.

La no vaciedad del espectro de un elemento de un álgebra normada compleja unital es uno de los resultados fundamentales de la teoría de álgebras normadas. Si añadimos complitud del álgebra el espectro resulta ser, además, compacto. Concretamente, por aplicación directa de los resultados del tema anterior tenemos:

Teorema X.2.15. *Sea A un álgebra de Banach compleja unital, $x \in A$, y ρ la función resolvente de x.*

i) *$Sp(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Concretamente se tiene*

$$|\lambda| \leq r(x) \quad \forall \lambda \in Sp(x).$$

ii) *ρ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus Sp(x)$ con:*

$$\rho'(\lambda) = -\rho(\lambda)^2.$$

iii) *Para $|\lambda| > r(x)$ se tiene*

$$\rho(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

iv) *Para $|\lambda| > \|x\|$ se tiene*

$$\|\rho(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}$$

y, en particular $\lim_{\lambda \to \infty} \rho(\lambda) = 0$.

Aunque el resultado se va a mejorar posteriormente, la siguiente "confabulación" del clásico Teorema de Liouville con el de Hahn-Banach merece ser expuesta:

Corolario X.2.16 .*(Gelfand) El espectro de un elemento de un álgebra normada compleja con unidad no es vacío.*

Una consecuencia muy importante: no existen "cuerpos" en el mundo de las álgebras normadas complejas, aparte de $\mathbb{C}$:

Corolario X.2.17 .*(Teorema de Gelfand-Mazur) $\mathbb{C}$ es la única álgebra normada compleja de división.*

El corolario anterior es el punto de partida de la que suele conocerse como Teoría de Gelfand. De momento vamos a mejorar la información dada por el corolario de Gelfand.

Teorema X.2.18 .*(Fórmula de Gelfand-Beurling) Para cualquier elemento x de un álgebra de Banach compleja unital A, se verifica que*

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(x)\} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Merece la pena llamar la atención sobre el hecho de que el primer miembro de la fórmula de Gelfand-Beurling no depende para nada de la norma de A, mientras el segundo no se altera si sustituimos la norma de A por cualquier otra norma equivalente. Así pues, la fórmula también es válida para cualquier norma completa en A que haga el producto continuo.

Aunque más adelante aparecerán otros muchos y más interesantes, merece la pena detenerse a considerar el siguiente ejemplo sencillo, para resaltar que los resultados anteriores dan toda la información que se puede tener en general sobre el espectro de un elemento de un álgebra de Banach compleja unital: es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$.

Ejemplo.- Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$ y consideremos el álgebra de Banach (conmutativa) $C(K)$ de las funciones continuas de K en $\mathbb{C}$, con la norma uniforme y el producto puntual. Si ponemos

$$u(z) = z \qquad (z \in K),$$

es evidente que $Sp(C(K), u) = K$.

Analizamos en el resultado que sigue la dependencia del espectro respecto del álgebra ambiente:

Proposición X.2.19 . *Sea A una subálgebra cerrada de un álgebra de Banach unital B y supongamos que A contiene a la unidad de B. Para $x \in A$ se verifica:*

i) $Sp(A, x) \supset Sp(B, x)$.

ii) $\partial Sp(A, x) \subset \partial Sp(B, x)$. *En particular, si $Sp(A, x)$ tiene interior vacío, entonces $Sp(A, x) = Sp(B, x)$.*

iii) *$Sp(A,x)$ es la unión de $Sp(B,x)$ con una cierta familia (posiblemente vacía) de componentes conexas acotadas de $\mathbb{C}\setminus Sp(B,x)$.*

Como consecuencia, si $\mathbb{C}\setminus Sp(B,x)$ es conexo (en particular, si se verifica que $Sp(B,x)\subset\mathbb{R}$), entonces $Sp(A,x)=Sp(B,x)$.

La utilidad de la proposición anterior estriba en la posibilidad de "localizar" el espectro, esto es, fijada el álgebra B y el elemento $x\in B$, tratar de buscar la mínima subálgebra A de B tal que $I,x\in B$ y se tenga $Sp(B,x)=Sp(A,x)$. Trivialmente, si hacemos que $(\lambda I-x)^{-1}\in A$ para $\lambda\in\mathbb{C}\setminus Sp(B,x)$ tendremos la igualdad de espectros. La segunda parte de la proposición anterior nos dice que es suficiente hacer que $(\lambda I-x)^{-1}\in A$ para un valor λ en cada componente conexa acotada de $\mathbb{C}\setminus Sp(B,x)$:

Corolario X.2.20 . *Sea B un álgebra de Banach unital, $x\in B$ y Λ un subconjunto de $\mathbb{C}$ que tenga intersección no vacía con cada componente conexa acotada de $\mathbb{C}\setminus Sp(B,x)$. Sea A la mínima subálgebra cerrada de B tal que $I,x\in A$ y $(\lambda I-x)^{-1}\in A$ para todo $\lambda\in\Lambda$. Entonces*

$$Sp(A,x)=Sp(B,x).$$

En particular, si $\mathbb{C}\setminus Sp(B,x)$ es conexo, se puede tomar $\Lambda=\emptyset$ y A es la subálgebra cerrada de B engendrada por $\{I,x\}$.

Concluimos este tema con un resultado sencillo que nos da una importante propiedad del espectro, la función $a\to Sp(a)$ es "semicontinua superiormente", como función multivaluada:

Proposición X.2.21 . *Sea A un álgebra de Banach unital, $x\in A$ y Ω un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $Sp(x)\subset\Omega$. Existe un $\delta>0$ tal que,*

$$y\in A\ ,\quad \|y-x\|<\delta \quad\Rightarrow\quad Sp(y)\subset\Omega.$$

X.3 El Teorema de Gelfand-Naimark conmutativo

Existe una especie de principio general de estrategia, útil para el estudio de cualquier estructura matemática: examinar los morfismos en el más sencillo (no trivial) de los objetos que la posean. La aplicación del mismo a la estructura de álgebra de Banach compleja nos lleva directamente a la consideración de los funcionales lineales multiplicativos de un tal álgebra en $\mathbb{C}$. Un magistral trabajo de I. Gelfand, publicado en 1941, demuestra la utilidad de tal forma de proceder, al menos en el ambiente de las álgebras de Banach conmutativas.

Tratamos en este tema la teoría de Gelfand en el ambiente más natural y cómodo, un álgebra de Banach compleja conmutativa unital A. Una combinación de Algebra (teoría elemental de anillos conmutativos) y Análisis (Teoremas de Hahn-Banach, Banach-Alaoglú y Gelfand-Mazur) permite estudiar con suma facilidad las propiedades fundamentales de la transformación de Gelfand de A, que de alguna forma representa los elementos de A como funciones continuas en un espacio topológico compacto de Hausdorff K, con la propiedad fundamental de que el espectro de cada elemento de A coincide con la imagen de la función que lo representa. Analizamos las condiciones sobre el álgebra A que hacen que la representación obtenida vaya siendo progresivamente más "fiel"; la suma perfección (isomorfismo isométrico de álgebras) se consigue para las C^*-álgebras. Esta clase de álgebras de Banach es, sin duda, la más importante, y son el modelo abstracto de las subálgebras cerradas autoadjuntas de $L(H)$ donde H es un espacio de Hilbert complejo. El Teorema de Gelfand-Naimark conmutativo, afirma que no existen más C^*-álgebras conmutativas unitales que las del tipo $C(K)$; en cierto modo tal resultado es la culminación de la teoría de Gelfand. A partir de él se obtiene fácilmente el cálculo funcional continuo en un elemento normal de una C^*-álgebra del que incluimos algunas aplicaciones interesantes.

Lo que hoy día se conoce como "Teoría de Gelfand" es el resultado de la confluencia de ideas algebraicas bastante sencillas con los potentes resultados analíticos desarrollados en los temas anteriores. Vayamos analizando poco a poco este conjunto de ideas.

Sea A un *álgebra*, $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo, y supongamos que f es multiplicativo, esto es,

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in A)$$

o, si se quiere, f es un epimorfismo de álgebras. Es claro que $\ker f$ es un ideal *propio* ($\ker f \neq A$) de A y, de hecho, $\ker f$ es un ideal *maximal* de A, más aún, es un subespacio propio maximal. Si A tiene *unidad*, I, se tiene claramente que $f(I) = 1$ y $\ker f$ no puede contener elementos inversibles; si A es *compleja* y $x \in A$, de $f(x)I - x \in \ker f$ deducimos que $f(x) \in Sp(x)$.

Sea ahora A un *álgebra de Banach (real o compleja) unital* y f como antes. Los ideales maximales de A son cerrados, luego $\ker f$ es cerrado y f es continuo. En el caso de que A no tenga unidad, consideramos su unitización A_1 y extendemos f de la forma obvia, haciendo $f(I) = 1$. Así pues:

Lema X.3.22. *Sea A un álgebra de Banach y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal multiplicativo. Entonces f es continuo y $\|f\| \leq 1$. Si A es unital y $f \neq 0$, entonces $\|f\| = f(I) = 1$.*

Es obvio que los funcionales lineales multiplicativos no nulos en un álgebra de Banach unital A forman un subconjunto débil-$*$-cerrado de la bola unidad de A^*; el Teorema de Banach-Alaoglú nos permite enunciar:

Lema X.3.23 . *Si A es un álgebra de Banach unital, el conjunto de los funcionales lineales multiplicativos no nulos en A es un subconjunto débil-$*$-compacto de la esfera unidad de A^*.*

Merece la pena observar que no siempre existen funcionales lineales multiplicativos no nulos; el álgebra de las matrices 2×2 con coeficientes complejos carece de ideales propios, salvo $\{0\}$. Como un ideal M de un álgebra A con unidad es propio si, y sólo si $I \notin M$, aplicando el lema de Zorn tenemos que *todo ideal propio de un álgebra con unidad está contenido en un ideal maximal.* Todo elemento no inversible x está contenido en un ideal propio, por tanto en uno maximal. *Si A es un* *álgebra conmutativa con unidad y M es un ideal maximal de A, $A\backslash M$ es un álgebra de división.*

Tras las anteriores consideraciones algebraicas, usemos de nuevo elementos analíticos. Sea A un *álgebra de Banach compleja conmutativa unital*; para cualquier $x \in A$, $Sp(x) \neq \emptyset$; tomemos $\lambda \in Sp(x)$; sea M un ideal maximal de A tal que $\lambda I - x \in M$; M es cerrado luego $A\backslash M$ es un álgebra normada compleja de división. Aplicando el Teorema de Gelfand-Mazur, existe un isomorfismo de álgebras $\Phi : A\backslash M \longrightarrow \mathbb{C}$; si $f = \Phi \circ \pi$ donde $\pi : A \longrightarrow A\backslash M$ es la proyección canónica, f es un funcional lineal multiplicativo no nulo en A, pero además $f(x) = \lambda$ para el elemento arbitrariamente prefijado $x \in A$ y el también arbitrario $\lambda \in Sp(x)$.

Sólo queda poner nombre adecuado a los objetos que han tomado parte en la discusión anterior para enunciar con comodidad lo que se ha demostrado.

Definición X.3.24. *Si A es un álgebra de Banach compleja conmutativa, llamaremos* **carácter** *de A a todo funcional lineal multiplicativo no nulo en A y notaremos Ω_A al conjunto de los caracteres de A. Obsérvese que sólo hemos probado que $\Omega_A \neq \emptyset$ en el caso de que A sea unital, único caso que vamos a tratar en este tema. Si A es unital, sabemos que Ω_A es un subconjunto débil-$*$-compacto del espacio dual A^*. Consideraremos siempre a Ω_A como espacio topológico compacto de Hausdorff con la topología inducida por la débil-$*$ de A^*; entonces $C(\Omega_A)$ es también un álgebra de Banach conmutativa unital. Para $x \in A$, $\hat{x} \in C(\Omega_A)$ será la función definida por*

$$\hat{x}(t) = t(x) \qquad (t \in \Omega_A);$$

suele decirse que $\hat{x}$ es la **transformada de Gelfand** *del elemento x, mientras que la aplicación $x \to \hat{x}$, de A en $C(\Omega_A)$ recibe el nombre de* **transformación de Gelfand** *de A; escribiremos $\hat{A} = \{\hat{x} : \ x \in A\}$.*

Destacamos en el siguiente enunciado las propiedades más importantes de la transformación de Gelfand.

Teorema X.3.25 . *Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa unital.*

i) *Los ideales maximales de A coinciden con los núcleos de los caracteres.*

ii) *La transformación de Gelfand de A es un homomorfismo de álgebras de A en $C(\Omega_A)$.*

iii) *Para $x \in A$ se tiene*

$$\{\hat{x}(t) : \ t \in \Omega_A\} = Sp(A, x),$$

equivalentemente, $x \in \mathrm{Inv}(A)$ si, y sólo si, ningún carácter de A se anula en x.

Una primera consecuencia, nada despreciable:

Corolario X.3.26 . *Sea A un álgebra de Banach compleja unital. Entonces*

$$\|\hat{x}\| = r(x) \qquad (x \in A).$$

Como consecuencia, el radio espectral es una seminorma submultiplicativa en A, esto es

$$r(x+y) \leq r(x) + r(y), \quad r(xy) \leq r(x)r(y) \qquad (x, y \in A).$$

Pensemos en la posibilidad de que la transformación de Gelfand sea inyectiva:

Definición X.3.27. *El* **radical** *de un álgebra de Banach compleja unital A es la intersección de todos los ideales maximales de A y se denota por $Rad(A)$. Claramente, $Rad(A)$ es un ideal cerrado de A; se dice que A es* **semisimple** *cuando $Rad(A) = \{0\}$.*

Corolario X.3.28 . *Sea A un álgebra de Banach compleja unital. Se tiene*

$$Rad(A) = \{x \in A : \hat{x} = 0\} = \{x \in A : r(x) = 0\} =$$
$$= \{x \in A : Sp(x) = \{0\}\}.$$

Por tanto, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) *A es semisimple.*

ii) *Ω_A separa los puntos de A.*

iv) *El radio espectral es una norma en A.*

Aplicando el Teorema del homomorfismo de Banach y el lema anterior obtenemos:

Corolario X.3.29 . *Sea A un álgebra de Banach compleja unital. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *A es semisimple y $\hat{A}$ es una subálgebra cerrada de $C(\Omega_A)$.*

ii) *La transformación de Gelfand de A es un monomorfismo topológico.*

iii) *El radio espectral es una norma en A, equivalente a la de partida.*

iv) *Existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\|x^2\| \geq \alpha \|x\|^2 \qquad \forall x \in A.$$

La descomposición espectral de un operador normal T en un espacio de Hilbert complejo H, generalización natural, aunque no tan intuitiva, de la obtenida en el Capítulo V para el caso en que T es compacto, se obtendrá haciendo uso de forma esencial de la teoría de Gelfand aplicada a la subálgebra cerrada de $L(H)$ engendrada por $\{I, T, T^*\}$. Dicha subálgebra, llámese A, hereda toda la riqueza estructural de $L(H)$, concretamente es un álgebra de Banach compleja y es fácil ver que para $S \in A$ se tiene $S^* \in A$, luego A también hereda la involución de $L(H)$. Olvidando de momento dos perfecciones adicionales de A, tiene unidad (porque hemos decidido incluírsela) y es conmutativa (lo que equivale, precisamente, a que T sea normal) motivamos la siguiente noción abstracta:

Definición X.3.30. *Una* C^***-álgebra** *es un álgebra de Banach compleja A, dotada de una involución multiplicativa, $a \to a^*$ $(a \in A)$, que verifica:*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (a \in A).$$

Nótese que **la involución de una C^*-álgebra es isométrica**, *ya que de $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$, deducimos $\|a\| \leq \|a^*\|$, pero también tenemos $\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$. Podemos ahora decir que, si H es un espacio de Hilbert complejo, $L(H)$ con la norma usual de operadores, el producto definido por composición y la involución $T \to T^*$, donde T^* denota el adjunto del operador $T \in L(H)$, es una C^*-álgebra. Además $L(H)$ es unital y es conmutativa si, y sólo si, H es unidimensional (el caso $H = \{0\}$ se entenderá siempre descartado). Un subconjunto S de una C^*-álgebra A se dirá* **autoadjunto** *cuando se tenga $a^* \in S$ para todo $a \in S$. En particular, un elemento $a \in A$ es autoadjunto cuando $a = a^*$. Si A es una C^*-álgebra y B es una subálgebra cerrada y autoadjunta de A, es claro que B, con la norma, producto e involución heredados de A, es una C^*-álgebra; diremos que B es una* C^***-subálgebra** *de A. Si A, B son dos C^*-álgebras y $f : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras que verifica*

$$f(a^*) = f(a)^* \quad (a \in A),$$

diremos que f es un $*$**-homomorfismo**.

Ejemplos.-

i) Si H es un espacio de Hilbert complejo, los operadores compactos en H forman una subálgebra (de hecho ideal) cerrada y autoadjunta de $L(H)$. Así, $K(H)$ es una C^*-subálgebra de $L(H)$. Es fácil ver que $K(H)$ tiene unidad si, y sólo si, H es finito dimensional.

ii) Si L es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, el álgebra de Banach $C_0(L)$ es claramente una C^*-álgebra (conmutativa) con la involución definida por

$$x^*(t) = \overline{x(t)} \quad (t \in L, x \in C_0(L)).$$

$C_0(L)$ tiene unidad si, y sólo si, L es compacto.

Definición X.3.31. *Sea A una C^*-álgebra; se dice que un elemento $a \in A$ es* **normal** *cuando $aa^* = a^*a$. Es obvio que todo elemento autoadjunto de A es normal; por otra parte, cualquier elemento $a \in A$ se expresa de manera única como $a = b + ic$ con b y c autoadjuntos, concretamente $b = \frac{1}{2}(a + a^*)$, $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$; es claro que $a^* = b - ic$, luego a es normal si, y sólo si, $bc = cb$. Si una C^*-álgebra A tiene unidad $I \neq 0$, conviene observar que $I^* = I$, $\|I\| = 1$. Dado $a \in A$, suele denotarse por $C^*[a]$ a la subálgebra cerrada de A engendrada por $\{I, a, a^*\}$. Por ser la involución multilicativa y continua $C^*[a]$ es autoadjunta, luego es la mínima C^*-subálgebra de A que contiene a $\{I, a\}$. Claramente a es normal si, y sólo si, $C^*[a]$ es conmutativa.*

Se comprende fácilmente el interés del primer resultado importante de este tema, conocido como "Teorema de Gelfand-Naimark conmutativo", que afirma que no existen más C^*-álgebras conmutativas unitales que las de la forma $C(K)$ con K compacto. Su demostración será una fácil aplicación del Teorema de Stone-Weierstrass, junto con los siguientes resultados previos, de interés en sí mismos:

Lema X.3.32. *Sea A una C^*-álgebra con unidad y x un elemento autoadjunto de A. Entonces $Sp(x) \subset \mathbb{R}$.*

Lema X.3.33. *Sea A una C^*-álgebra y x un elemento normal de A, entonces:*

$$\|x^2\| = \|x\|^2 = r(x)^2.$$

Como consecuencia, $\|a\|^2 = r(a^*a)$ para todo $a \in A$.

Teorema X.3.34 .*(de Gelfand-Naimark conmutativo) Sea A una C^*-álgebra conmutativa con unidad y Ω_A el espacio de los caracteres de A. La transformación de Gelfand es un $*$-isomorfismo isométrico de A sobre $C(\Omega_A)$.*

La extensión del resultado anterior al caso no unital pasa por la unitización de una C^*-álgebra, para lo que no se precisa la conmutatividad. La comprobación de todas las afirmaciones del siguiente enunciado no ofrece especial dificultad, y tampoco demasiado interés:

Proposición X.3.35 . *Sea A una C^*-álgebra; si para $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos:*

$$(a + \lambda I)^* = a^* + \overline{\lambda} I$$

$$\|a + \lambda I\| = \sup\{\|ax + \lambda x\| : \ x \in A, \|x\| \leq 1\}$$

obtenemos una involución y norma en la unitización A_1 de A, que extienden a las de A y con las cuales A_1 es una C^*-álgebra.

Aplicando el teorema de Gelfand-Naimark a la unitización, obtenemos sin dificultad:

Teorema X.3.36 . *Sea A una C^*-álgebra conmutativa y Ω_A el espacio de los caracteres de A (localmente compacto, de Hausdorff). La transformación de Gelfand de A es un $*$-isomorfismo isométrico de A sobre $C_0(\Omega_A)$.*

Como caso particular del Teorema de Gelfand-Naimark conmutativo obtenemos una identificación, hasta ahora insospechada, de dos espacios de Banach que son viejos conocidos:

Corolario X.3.37. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Existe un espacio topológico de Hausdorff compacto K y una biyección lineal isométrica Φ de $L_\infty(\mu)$ sobre $C(K)$. Además Φ es un isomorfismo de álgebras y verifica que*

$$\Phi(\overline{f})) = \overline{\Phi(f)} \quad (f \in L_\infty(\mu)).$$

Antes de pasar al estudio de un cálculo funcional que se construye fácilmente a partir del teorema de Gelfand-Naimark, conviene resaltar una idea contenida implícitamente en el lema X.3.32. La fórmula de Gelfand-Beurling nos dice que el radio espectral de un elemento de un álgebra de Banach compleja unital es en realidad un concepto algebraico; en vista del lema X.3.32, la norma de una C^*-álgebra unital está determinada por su estructura algebraica. De hecho, por ejemplo, si M es una matriz 2×2, la forma más efectiva de calcular la norma de M, considerada como operador en el espacio de Hilbert complejo bidimensional, consiste en aplicar que $\|M\|$ es la raiz cuadrada del máximo de los módulos de los autovalores de M^*M . Explotando este tipo de ideas y englobando también el caso no unital tenemos:

Proposición X.3.38 . *Sean A y B dos C^*-álgebras y $\Phi : A \to B$ un $*$-homomorfismo. Entonces Φ es continuo y $\|\Phi\| \leq 1$. Como consecuencia, si Φ es un $*$-isomorfismo, entonces Φ es isométrico.*

Pero la mejor forma de sacar partido del teorema de Gelfand-Naimark consiste en desarrollar un cálculo funcional "continuo" en un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad. Para ello necesitamos previamente un par de observaciones sencillas:

Lema X.3.39. *Sea B una C^*-álgebra con unidad I, A una C^*-subálgebra de B tal que $I \in A$. Para $a \in A$ se verifica:*

$$Sp(A, a) = Sp(B, a).$$

Así pues, si a es un elemento **normal** de una C^*-álgebra unital B, podemos tomar $A = C^*[a]$ en el lema anterior y tenemos "localizado" el espectro de a en una C^*-álgebra **conmutativa**. El siguiente paso es desvelar el espacio de los caracteres de $C^*[a]$; puesto que en cierto modo $C^*[a]$ está "engendrada" por a, el siguiente resultado es esperable:

Lema X.3.40 . *Sea A una C^*-álgebra conmutativa con unidad y supongamos que $A = C^*[a]$ para algún $a \in A$. La aplicación $f \to f(a)$ es un homeomorfismo de Ω_A sobre $Sp(a)$.*

Teorema X.3.41 . *Sea B una C^*-álgebra con unidad I, a un elemento normal de B y $K = Sp(a)$. Existe un único $*$-homomorfismo*

$$\Phi : C(K) \to B$$

tal que $\Phi(f_0) = I$, $\Phi(f_1) = a$, donde $f_0, f_1 \in C(K)$ vienen dadas por $f_0(\lambda) = 1$, $f_1(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in K$. Además, Φ es isométrico y su imagen es $C^*[a]$.

En vista de los resultados anteriores, podemos introducir la siguiente nomenclatura:

Definición X.3.42 . *Si a es un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad, llamaremos* **cálculo funcional continuo** *en el elemento a al $*$-isomorfismo isométrico de $C(Sp(a))$ sobre $C^*[a]$ que aplica la función constantemente igual a 1 en la unidad de $C^*[a]$ y la aplicación identidad de $Sp(a)$ en $\mathbb{C}$ en el elemento a; su existencia y unicidad vienen aseguradas por el teorema anterior. Si $\phi \in C(Sp(a))$, notaremos $\phi[a] \in C^*[a]$ a la imagen de ϕ por dicho $*$-isomorfismo. Conviene resaltar que $\phi[a]$ queda determinado por la igualdad:*

$$\widehat{\phi[a]} = \phi \circ \widehat{a}.$$

El cálculo funcional continuo tiene las propiedades que cabe esperar.

Corolario X.3.43 . *Sea A una C^*-álgebra con unidad y a un elemento normal de A.*

i) $Sp(\phi[a]) = \phi(Sp(a)) \quad (\phi \in C(Sp(a)))$.

ii) *Si $\phi \in C(Sp(a))$ y ψ es una función continua en $Sp(\phi[a])$, se tiene*

$$(\psi \circ \phi)[a] = \psi[\phi[a]].$$

iii) *Si B es otra C^*-álgebra con unidad y $\rho : A \to B$ es un $*$-homomorfismo que transforma la unidad de A en la de B, se tiene:*

$$\rho(\phi[a]) = \phi[\rho(a)] \quad (\phi \in C(Sp(a)))$$

(nótese que $\rho(a)$ es normal y que $Sp(\rho(a)) \subset Sp(a)$, por lo que ϕ también es una función continua en $Sp(\rho(a))$).

Mostramos la potencia del cálculo funcional probando algunos resultados interesantes que giran alrededor del concepto de elemento "positivo" de una C^*-álgebra.

Definición X.3.44 . *Sea A una C^*-álgebra con unidad I. Decimos que un elemento $a \in A$ es* **positivo** *cuando $a = a^*$ y $Sp(a) \subset [0, \infty[$.*

Recordemos que un operador T en un espacio de Hilbert complejo H se llamaba positivo cuando verificaba que $(Tx|x) \geq 0$ para todo vector $x \in H$. Ello es coherente con la definición anterior.

Conviene también observar que, gracias al lema X.3.39 se puede resolver una aparente ambigüedad en la definición de elemento positivo; si A es una C^*-álgebra con unidad y B es una C^*-subálgebra de A que contiene a la unidad, los elementos positivos de B son también elementos positivos de A.

El siguiente resultado mejora ampliamente lo obtenido en el Capítulo V para operadores compactos en espacios de Hilbert (Corolario 4.14):

Corolario X.3.45 . *Sea A una C^*-álgebra con unidad, $a \in A$.*

i) *Si $a = a^*$, existen elementos positivos $a^+, a^- \in A$, determinados en forma única, verificando que*

$$a = a^+ - a^-, \quad a^+a^- = a^-a^+ = 0.$$

ii) *Si a es positivo y $n \in \mathbb{N}$, existe un único elemento positivo $b \in A$ tal que $b^n = a$.*

X.4 La Teoría de Riesz-Schauder

Vamos a tratar en este tema una serie de resultados cuyo descubrimiento por F. Riesz en las primeras décadas de este siglo significó en gran medida el nacimiento del Análisis Funcional. El intento de formalizar matemáticamente, consecuentemente de abstraer y generalizar, los trabajos de Fredholm sobre las ecuaciones integrales que llevan su nombre, fue el detonante para el estudio de la teoría espectral de operadores compactos, primero en espacios de Hilbert, en la línea que seguíamos en el Capítulo V, y después en espacios de Banach más generales. Utilizaremos libremente una serie de resultados posteriores a los trabajos de Riesz que permiten trabajar con más comodidad.

Comenzamos extendiendo la noción de operador compacto, introducida ya para espacios de Hilbert.

Definición X.4.46 . *Sean X e Y espacios de Banach. Se dice que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es un* **operador compacto** *si la imagen por T de la bola unidad de X es un subconjunto relativamente compacto de Y, equivalentemente, si T transforma cada subconjunto acotado de X en un subconjunto precompacto de Y, o si, para cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ admite una parcial convergente en la topología de la norma de Y. Notaremos $K(X,Y)$ al conjunto de los operadores compactos de X en Y, y escribiremos simplemente $K(X)$ en lugar de $K(X,X)$. Es claro que $K(X,Y)$ es un subespacio de $L(X,Y)$; si Z es otro espacio de Banach, $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$, es también evidente que $ST \in K(X,Z)$ siempre que $T \in K(X,Y)$ o $S \in K(Y,Z)$; en particular $K(X)$ es un ideal bilátero del álgebra de Banach $L(X)$. Si X tiene dimensión infinita, dicho ideal es propio, ya que $I \notin K(X)$ como consecuencia obvia del Teorema de Riesz*

El Teorema de Hahn-Banach nos permite construir operadores compactos no nulos entre dos espacios de Banach arbitrarios y, en realidad, estos son esencialmente los únicos operadores que se pueden construir explícitamente si no se dispone de alguna información adicional sobre la estructura de los espacios de Banach en cuestión.

Definición X.4.47 . *Si X e Y son espacios de Banach, $u \in X^*$, $v \in Y$ definimos:*

$$[u \otimes v](x) = u(x)v \quad (x \in X).$$

Es claro que $u \otimes v \in L(X,Y)$, $\|u \otimes v\| = \|u\|\|v\|$; si $u, v \neq 0$, la imagen de $u \otimes v$ es el subespacio unidimensional de Y engendrado por v. En general *llamamos* **rango** *de un operador* $T \in L(X,Y)$ *a la dimensión (algebraica) de la imagen de* T*. Notamos* $F(X,Y)$ *al subespacio de* $L(X,Y)$ *formado por los* **operadores de rango finito***. Es claro que si* Z *es otro espacio de Banach,* $T \in L(X,Y)$ *y* $S \in L(Y,Z)$*, entonces* $ST \in F(X,Z)$ *siempre que* $T \in F(X,Y)$ *o* $S \in F(Y,Z)$*; en particular* $F(X) := F(X,X)$ *es un ideal bilátero de* $L(X)$*.*

Nuestra primera observación no evidente sobre operadores compactos consiste en que $K(X,Y)$ es siempre cerrado en $L(X,Y)$, cosa que puede probarse exactamente con el mismo argumento ya usado para el caso en que $X = Y = H$ es un espacio de Hilbert. Agrupamos esta observación con otra serie de hechos elementales, en el siguiente enunciado:

Proposición X.4.48 . *Sean* X *e* Y *espacios de Banach.*

i) $F(X,Y)$ *es el subespacio de* $L(X,Y)$ *engendrado por el conjunto*

$$\{u \otimes v : \ u \in X^*, \ v \in Y\},$$

equivalentemente, todo operador $T \in F(X,Y)$ *se expresa en la forma* $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ *con* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_k \in X^*$*,* $v_k \in Y$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n$*.*

ii) $K(X,Y)$ *es un subespacio cerrado de* $L(X,Y)$ *verificándose que*

$$\overline{F(X,Y)} \subset K(X,Y).$$

En particular, $K(X)$ *es un ideal bilátero cerrado de* $L(X)$*.*

iii) *Si* $T \in K(X,Y)$*,* $\overline{T(X)}$ *es un espacio de Banach separable.*

Naturalmente se deja sentir la ausencia de la afirmación $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$, que es falsa en general, asunto que ni tan siquiera vamos a tantear, dado que incluso poner un ejemplo en que no se verifique la igualdad anterior es una tarea ardua. Sin embargo, podemos probar el siguiente resultado que cubre muchos casos interesantes:

Proposición X.4.49 . *Sean X e Y espacios de Banach; supongamos que existe una red $\{S_\lambda\}$ en $F(Y)$ verificando que*

$$\sup_\lambda \{\|S_\lambda\|\} < \infty, \qquad \{\|S_\lambda y - y\|\} \to 0, \qquad \forall y \in Y.$$

Entonces $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$. En particular, si Y posee una base de Schauder, se tiene $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$.

También en algunos espacios clásicos, como los de tipo $C(K)$, es fácil comprobar que se verifica la propiedad de aproximación:

Proposición X.4.50 . *Sea K un espacio topológico compacto y $X = C(K)$, entonces $K(X) = \overline{F(X)}$.*

Una sencilla aplicación del Teorema de la gráfica cerrada nos permitirá obtener fácilmente el hecho, en cierto modo sorprendente, de que la compacidad de un operador puede deducirse con frecuencia del sólo conocimiento de su imagen:

Teorema X.4.51 . *Sean X e Y espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$; si existe un espacio de Banach Z y un operador $S \in K(Z,Y)$ tales que $T(X) \subset S(Z)$, entonces T es compacto.*

Observamos a continuación el comportamiento de los operadores compactos con respecto a las topologías débiles, estableciendo que un operador compacto es "más que continuo". Otros resultados fundamentales del Capítulo III entrarán ahora en juego:

Teorema X.4.52 . *Sean X e Y espacios de Banach. Si $T \in K(X,Y)$, entonces T es secuencialmente continuo cuando se considera en X la topología débil y en Y la topología de la norma. Si X es reflexivo, es cierto el recíproco.*

Notemos que la hipótesis de reflexividad no puede suprimirse en el teorema anterior. La identidad de (ℓ_1, w) en $(\ell_1, \|\cdot\|)$ es secuencialmente continua y no es un operador compacto. Si se prueba el resultado anterior, aparece una idea que merece ser destacada, nueva incluso para espacios de Hilbert:

Corolario X.4.53. *Si X es un espacio de Banach reflexivo, Y un espacio de Banach arbitrario y $T \in K(X, Y)$, entonces la imagen por T de la bola cerrada unidad de X es compacta en Y.*

Con argumentos similares a los del teorema anterior se puede conseguir una caracterización de los operadores compactos, en términos de la topología débil-$*$ del espacio dual.

Proposición X.4.54. *Sean X e Y espacios de Banach, $T \in L(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T es compacto.*

ii) *T^* es continuo cuando se considera en Y^* la topología débil-$*$ y en X^* la topología de la norma.*

Concluimos nuestro breve estudio general de los operadores compactos entre espacios de Banach con el siguiente resultado importante:

Teorema X.4.55.*(Schauder) Sean X e Y espacios de Banach; un operador $T \in L(X, Y)$ es compacto si, y sólo si, lo es T^*.*

Pasamos a considerar ahora la teoría espectral para operadores compactos en espacios de Banach. Los resultados que siguen se deben a F. Riesz, salvo los que involucran al operador adjunto, que de alguna forma precisan el teorema anterior y se deben a J. Schauder, de ahí el nombre de Teoría de Riesz-Schauder con que se conocen estos resultados, a los que el Análisis Funcional debe en gran medida su propia existencia.

Teorema X.4.56. *Sea X un espacio de Banach complejo, $T \in K(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

i) *El espacio $\ker(\lambda I - T)$ es finito-dimensional.*

ii) *El espacio $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado y*

$$[\ker(\lambda I - T)]^\circ = (\lambda I - T^*)(X^*)$$

$$[\ker(\lambda I - T^*)]^\circ = (\lambda I - T)(X),$$

donde los polares se toman en el par dual (X, X^*).

Si $T : X \longrightarrow X$ es una aplicación lineal, la sucesión de espacios $\ker T^n$ es creciente. Si $\ker T^n \neq \ker T^{n+1}$ para todo n, diremos que el ascendente de T es $+\infty$; en otro caso, diremos que T tiene ascendente finito y se define su ascendente como el menor natural n tal que $\ker T^n = \ker T^m$ para todo m posterior a n. La sucesión $T^n(X)$ es decreciente; si no estaciona se dice que T tiene descendente infinito, en otro caso, se define el descendente como el mínimo natural n tal que $T^n(X) = T^m(X)$ para todo m posterior a n. En el resultado que sigue usaremos el Lema de Riesz para espacios normados: Si Y es un subespacio cerrado propio de un espacio normado X, para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento x de la esfera unidad de X tal que $dist(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Teorema X.4.57 . *Si T es un operador compacto en un espacio de Banach X, entonces para $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se verifica que $\lambda I - T$ tiene ascendente y descendente finito.*

Un operador $T \in L(X, Y)$ (X, Y espacios de Banach) se dice de Fredholm si el subespacio $\ker T$ tiene dimensión finita y $T(X)$ tiene codimensión finita. En este caso, se define el índice de Fredholm de T (Ind T) como la diferencia entre la dimensión de $\ker T$ y la codimensión de $T(X)$.

El siguiente resultado es fundamental en la teoría de Fredholm:

Proposición X.4.58 . *Sean $T : X \longrightarrow Y$ y $S : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones lineales de Fredholm. Entonces ST es Fredholm y se verifica:*

$$Ind\ ST = IndS + Ind\ T.$$

Damos la siguiente inmediata aplicación del concepto de índice de Fredholm:

Teorema X.4.59 . *Sea X un espacio de Banach, $T \in K(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

i) *El operador $\lambda I - T$ es de Fredholm y tiene índice cero.*

ii) *Si n es el ascendente (finito) de $\lambda I - T$, entonces*

$$X = \ker(\lambda I - T)^n \oplus (\lambda I - T)^n(X).$$

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene:

Corolario X.4.60 . *El operador $\lambda I - T$ es inyectivo si, y sólo si, es sobreyectivo.*

Disponemos ya de todos los elementos para conseguir la siguiente descripción del espectro de un operador compacto:

Teorema X.4.61 . *Sea T un operador compacto en un espacio de Banach X, entonces el espectro de T es numerable, todo elemento no nulo del espectro es un autovalor de T y el origen es su único posible punto de acumulación. Además si λ es un autovalor no nulo de T, entonces*

$$\dim\ \ker(\lambda I - T) = \dim\ \ker(\lambda I - T^*).$$

Nada mejor para concluir este tema que un brillante ejemplo de aplicación del teorema anterior. Daremos precisamente el ejemplo que motivó a F. Riesz para crear su teoría:

Ejemplo.- Sea $X = C[a, b]$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas en un intervalo compacto $[a, b]$ de la recta real. Consideremos una función continua

$$k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$$

y pongamos

$$[Tx](s) = \int_a^b k(s, t)x(t)\ dt \qquad (x \in X, a \le s \le b).$$

Es fácil ver que $Tx \in X$ para $x \in X$, y de hecho $T \in L(X)$, verificándose

$$\|Tx\| \le M\|x\| \qquad (x \in X)$$

donde $M = \max\{|k(s,t)| : s,t \in [a,b]\}$. El operador T así definido recibe el nombre de **operador integral de Fredholm** de núcleo k. Aplicando el Teorema de Ascoli-Arzelá se comprueba que T es un operador compacto. Para sacar todo el partido posible, es conveniente hacer la siguiente observación acerca del operador adjunto T^*. Consideremos la aplicación $J : X \to X^*$ definida por

$$[Jx](y) = \int_a^b y(t)x(t)\ dt.$$

Es claro que $Jx \in X^*$ para $x \in X$ y se prueba fácilmente que

$$\|Jx\| = \int_a^b |x(t)|\ dt$$

con lo que la aplicación J es inyectiva. Aplicando el Teorema de Fubini, para $x, y \in X$ tenemos:

$$[T^* Jx]\,(y) = \left[J(\widehat{T}x)\right](y)$$

donde $\widehat{T}$ es el operador integral de Fredholm cuyo núcleo $\widehat{k}$ viene dado por

$$\widehat{k}(s,t) = k(t,s) \qquad (s,t \in [a,b]).$$

Así pues $T^*J = J\widehat{T}$ y las propiedades de T^* que resultan del teorema anterior pueden traducirse en términos de $\widehat{T}$.

Aplicando el teorema anterior, y teniendo en cuenta las observaciones del ejemplo anterior obtenemos:

Corolario X.4.62.*(Alternativa de Fredholm) Sea $[a,b]$ un intervalo compacto en la recta real, $k : [a,b]^2 \to \mathbb{C}$ una función continua y μ un número complejo no nulo. Se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

a) *Las ecuaciones*

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(s,t)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{1}$$

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(t,s)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{2}$$

tienen solución única $x \in C[a,b]$ para cada $y \in C[a,b]$.

b) *Las ecuaciones*

$$x(s) = \mu \int_a^b k(s,t)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{3}$$

$$x(s) = \mu \int_a^b k(t,s)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{4}$$

tienen soluciones $x \in C[a,b]$ no idénticamente nulas.

Si se verifica b), las soluciones de las ecuaciones (3) *y* (4) *son subespacios de $C[a,b]$ con la misma dimensión finita; fijada $y \in C[a,b]$, la ecuación* (1) *(resp.* (2)*) tiene solución $x \in C[a,b]$ si, y sólo si,*

$$\int_a^b y(s)z(s)\ ds = 0$$

para cualquier solución z de la ecuación (4) *(resp.* (3)*). Finalmente, el conjunto de los números complejos no nulos μ para los cuales se verifica b) es numerable y carece de puntos de acumulación.*

BILIOGRAFIA: Como textos generales sobre álgebras de Banach adecuados a lo expuesto es obligado citar los de Bonsall-Dundan [4], Gelfand et al. [21], Naimark [37] y Rickart [41]. Por otra parte los textos de Berberian [3] y Conway [12] son libros generales de Análisis Funcional en los que se puede encontrar un tratamiento apropiado para este capítulo. Los que se han seguido aquí para los conceptos generales sobre álgebras de Banach, espectro y teoría de Gelfand son [4] y [41].

Nuestro breve tratamiento de los operadores compactos puede seguirse en [12], [16] y [53]. Para la teoría de Riesz-Schauder hemos seguido el texto de Murphy [36], *"plagiando"* nuestro último corolario del texto de Brown-Page [8].

APENDICE A

REDES Y FILTROS.

Exponemos a continuación los conceptos y resultados básicos referentes a la convergencia de redes y filtros que nos parece constituyen el mínimo indispensable para el correcto y cómodo desarrollo de un curso general sobre espacios vectoriales topológicos. Lamentablemente es demasiado frecuente que los alumnos no hayan estudiado estas cuestiones en cursos previos de Topología General. Aprovechamos para concretar nuestra terminología y notación a este respecto.

Nos parece importante que quede claramente expuesta la total equivalencia entre las nociones de convergencia para redes y para bases de filtro. Como resultado más destacable de este apéndice, obtenemos la caracterización de la compacidad en términos de redes o filtros, así como la análoga, pero menos conocida, caracterización de la compacidad relativa.

La necesidad de considerar una noción de convergencia más general que la de sucesiones debe justificarse con algún ejemplo sencillo, como puede ser el siguiente:

A.1 Ejemplo. Consideremos en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la topología producto y sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formado por las funciones de soporte finito. Se comprueba inmediatamente que A es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; sin embargo si una función $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es límite de una sucesión de funciones de A, entonces f se anula salvo en un conjunto numerable. Así pues, la convergencia de sucesiones no es suficiente para describir la topología de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Existen dos nociones de convergencia que extienden de forma natural la convergencia de sucesiones y permiten determinar la topología de cualquier espacio. La primera históricamente, y la más intuitiva, es la noción de convergencia de redes, que fue introducida por Moore y Smith en 1922. En 1937, Cartan introdujo la noción de convergencia de filtros, más elaborada y por tanto menos intuitiva, pero más elegante y potente en algunas demostraciones. Creemos conveniente conocer ambas nociones, dado que cada una tiene, como se ha dicho, ventajas e inconvenientes, para usar en cada caso la que nos resulte más adecuada. Deberá quedar clara la total equivalencia entre ambas nociones.

A.2 Definición. Un **conjunto dirigido** es un conjunto no vacío Λ, dotado de un preorden $\leq$, que verifica la siguiente condición (filtrante superiormente)

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \ \ \exists \lambda \in \Lambda : \ \lambda_1 \leq \lambda, \ \lambda_2 \leq \lambda.$$

Si X es un conjunto no vacío, una **red** de elementos de X es una aplicación $\varphi : \Lambda \to X$, donde Λ es un conjunto dirigido. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, con su orden usual, es un conjunto dirigido, luego una sucesión es un tipo muy particular de red. A semejanza de las sucesiones, si $\varphi : \Lambda \to X$ es una red, es costumbre escribir $x_\lambda = \varphi(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda$ y notar $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ a la red φ. Si no hay lugar a confusión se omite incluso el conjunto dirigido Λ y se escribe simplemente $\{x_\lambda\}$.

Sea ahora X un espacio topológico, $\{x_\lambda\}$ una red de elementos de X y $x \in X$. Se dice que la red $\{x_\lambda\}$ **converge** a x, y se escribe $\{x_\lambda\} \to x$ si se verifica que, para todo entorno U del punto x, puede encontrarse un índice $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\lambda \in \Lambda, \ \lambda_0 \leq \lambda \Rightarrow x_\lambda \in U.$$

Se dice que x es un **valor adherente** a la red $\{x_\lambda\}$, y escribimos $\{x_\lambda\} \rightharpoonup x$, si para todo entorno U de x y para todo $\lambda \in \Lambda$ puede encontrarse $\mu \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \mu$ y $x_\mu \in U$. Es claro que si $\{x_\lambda\} \to x$, entonces x es un valor adherente a la red $\{x_\lambda\}$, no siendo cierto el recíproco. Conviene observar que las nociones de convergencia de una red y de valor adherente extienden, obviamente, a las correspondientes para sucesiones.

A.3 Ejemplos. La noción de red convergente debe ilustrarse con algún ejemplo sugestivo, previamente conocido. Los siguientes parecen especialmente adecuados a tal fin:

i) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann, y sea Λ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$, esto es, subconjuntos finitos de $[a, b]$ que contienen a los puntos a y b. Λ es un conjunto dirigido con la relación de inclusión. Si $\lambda \in \Lambda$ y $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ podemos definir

$$S_\lambda = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup\{f(t) : \ x_{k-1} \leq t \leq x_k\},$$

esto es, S_λ es la suma superior de f con respecto a la partición λ. La red de números reales $\{S_\lambda\}$ converge a la integral de Riemann de f en $[a, b]$.

ii) Sea $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ una familia de elementos de un espacio normado. El conjunto $\mathcal{F}(\Lambda)$ de las partes finitas de Λ es un conjunto dirigido con la inclusión como relación de orden. Para $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ podemos definir $S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda$. De la definición de familia sumable se deduce inmediatamente que $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \in X$ si, y sólo si, la red $\{S_J\}$ converge a x.

Antes de mostrar que la noción de convergencia de redes nos permite caracterizar completamente la topología de cualquier espacio, consideremos la otra noción de convergencia. Para motivarla podemos razonar de la siguiente forma. Sea $\varphi \equiv \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de elementos de un conjunto X. Consideremos la familia $A(\varphi) = \{A_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X definida por:

$$A_\lambda = \{x_\mu : \ \mu \in \Lambda, \lambda \leq \mu\} \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Dicha familia cumple, obviamente, las siguientes condiciones

i) $A_\lambda \neq \emptyset \ \forall \lambda \in \Lambda$.

ii) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda,\ \exists \lambda \in \Lambda :\ A_\lambda \subset A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}$.

En el caso de que X sea un espacio topológico, la posible convergencia de la red φ, así como sus posibles valores adherentes, pueden caracterizarse en términos de la familia de conjuntos $A(\varphi)$. En efecto, dado $x \in X$, se tiene claramente que φ converge a x si, y sólo si, cada entorno de x contiene a un elemento de $A(\varphi)$ y x es valor adherente a la red φ si, y sólo si, cada entorno de x tiene intersección no vacía con cada elemento de $A(\varphi)$, equivalentemente, el conjunto de los valores adherentes a φ coincide con la intersección de los cierres de los elementos de $A(\varphi)$.

Quedan así motivadas las siguientes nociones:

A.4 Definición. Una **base de filtro** en un conjunto no vacío X es una familia no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que verifica las siguientes condiciones:

i) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B \in \mathcal{B} :\ B \subset B_1 \cap B_2$.

Si X es un espacio topológico, se dice que una base de filtro $\mathcal{B}$ en X **converge** a un punto $x \in X$ si todo entorno de x contiene a un elemento de $\mathcal{B}$, en cuyo caso escribiremos $\mathcal{B} \to x$. Se dice que $x \in X$ es un **valor adherente** a la base de filtro $\mathcal{B}$, y escribimos $\mathcal{B} \rightharpoonup x$, si todo entorno de x tiene intersección no vacía con cada elemento de $\mathcal{B}$, esto es, si x pertenece a la intersección de los cierres de los elementos de $\mathcal{B}$.

Una observación debida a G. Bruns y J. Schmidt, bastante elemental pero poco conocida, permite establecer la total equivalencia entre las nociones de convergencia para redes y bases de filtro. Sabemos ya que toda red genera de forma natural una base de filtro y vamos a ver ahora que todas las bases de filtro aparecen por ese procedimiento. En efecto, sea $\mathcal{B}$ una base de filtro en un conjunto no vacío arbitrario X. Consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{(B, b) :\ b \in B \in \mathcal{B}\},$$

que es, claramente, un conjunto dirigido con el preorden:

$$(B_1, b_1) \leq (B_2, b_2) \Leftrightarrow B_2 \subset B_1.$$

Definiendo

$$\varphi(B, b) = b \quad ((B, b) \in \Lambda)$$

obtenemos una red de elementos de X. Fijado $(B_0, b_0) \in \Lambda$ es evidente que:

$$B_0 = \{\varphi(B, b) : \ (B, b) \in \Lambda, \ (B_0, b_0) \leq (B, b)\},$$

luego la base de filtro $A(\varphi)$ asociada a la red φ coincide con $\mathcal{B}$.

Hemos probado:

A.5 Proposición. *Sea X un conjunto no vacío, Λ un conjunto dirigido y $\varphi : \Lambda \to X$ una red de elementos de X. Para $\lambda \in \Lambda$, pongamos*

$$A_\lambda = \{\varphi(\mu) : \ \mu \in \Lambda, \lambda \leq \mu\}.$$

La familia $A(\varphi) = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base de filtro en X. Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X, existe un conjunto dirigido Λ y una red $\varphi : \Lambda \to X$ tal que $\mathcal{B} = A(\varphi)$.

En el caso de que X sea un espacio topológico, la red φ converge a un punto $x \in X$ si, y sólo si, la base de filtro $A(\varphi)$ converge a x y el conjunto de valores adherentes a la red φ coincide con el conjunto de valores adherentes a la base de filtro $A(\varphi)$.

Es importante observar que para dos redes diferentes φ_1 y φ_2 en un espacio topológico, se puede tener $A(\varphi_1) = A(\varphi_2)$ con lo que las redes φ_1 y φ_2 tienen los mismos valores adherentes y una de ellas converge si, y sólo si, converge la otra. Un ejemplo sencillo se obtiene considerando las sucesiones $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$, la base de filtro asociada a ambas consta de un sólo elemento, el conjunto $B = \{-1, 1\}$. La construcción previa a la proposición anterior nos da una tercera red (que no es una sucesión) con la misma base de filtro asociada, el conjunto dirigido es $\{(B, 1), (B, -1)\}$ con un preorden bastante trivial, ya que $(B, 1) \leq (B, -1) \leq (B, 1)$.

Podríamos decir que en el paso de una red φ a la base de filtro $A(\varphi)$ "olvidamos", en gran parte, lo que hay de superfluo en la red φ a efectos de convergencia. Dando un paso más en la misma dirección, observamos que para dictaminar la posible convergencia de una base de filtro $\mathcal{B}$ en un espacio topológico X así como para determinar sus valores adherentes basta saber qué subconjuntos de X contienen algún elemento de $\mathcal{B}$. Más concretamente consideremos la familia de subconjuntos de X dada por:

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : \; \exists B \in \mathcal{B}, B \subset F\}.$$

Es claro que $\mathcal{F}$ es una base de filtro en X con la propiedad adicional de que todo subconjunto de X que contenga a un elemento de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$; en particular $\mathcal{F}$ es estable por intersecciones finitas. Motivamos así las siguientes nociones:

A.6 Definición. Un **filtro** en un conjunto no vacío X es una familia $\mathcal{F}$ no vacía de subconjuntos de X que verifica las siguientes condiciones:

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

iii) $F \in \mathcal{F}, \; F \subset G \subset X \Rightarrow G \in \mathcal{F}$.

Es claro que todo filtro es una base de filtro; recíprocamente, si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X y $\mathcal{F}$ es la familia de los subconjuntos de X que contienen a algún elemento de $\mathcal{B}$, es claro que $\mathcal{F}$ es un filtro en X, el mínimo filtro en X que contiene a $\mathcal{B}$ y le llamaremos **filtro engendrado** por la base de filtro $\mathcal{B}$.

Si X es un espacio topológico es claro que un filtro $\mathcal{F}$ en X **converge** a un punto $x \in X$ si, y sólo si, todo entorno de x pertenece a $\mathcal{F}$, esto es, $\mathcal{F}$ contiene el filtro formado por los entornos de x. Si $\mathcal{F}$ es el filtro engendrado por una base de filtro $\mathcal{B}$, es obvio que $\mathcal{F}$ converge a un punto $x \in X$ si, y sólo si, $\mathcal{B}$ converge a x. Se comprueba también fácilmente que el conjunto de valores adherentes a la base de filtro $\mathcal{B}$ coincide con el de los valores adherentes al filtro $\mathcal{F}$ engendrado por $\mathcal{B}$.

Nuevamente, al pasar de una base de filtro $\mathcal{B}$ al filtro engendrado por $\mathcal{B}$ "olvidamos" aspectos de $\mathcal{B}$ que son superfluos a efectos de convergencia. Para ilustrarlo, supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de un conjunto no vacío X, sea $k \in \mathbb{N}$ fijo y pongamos $y_n = x_{n+k}$ para $n \in \mathbb{N}$. Las bases de filtro asociadas a las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ pueden ser diferentes, pero generan el mismo filtro. No obstante, las bases de filtro son a veces preferibles a los filtros, en razón de su mayor estabilidad. Si X e Y son conjuntos no vacíos, $f : X \to Y$ una aplicación y $\mathcal{B}$ una base de filtro en X, la familia:

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) : \ B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de filtro en Y pero puede ocurrir que, siendo $\mathcal{B}$ un filtro, $f(\mathcal{B})$ no lo sea. En particular, si Y es un conjunto y X es un subconjunto no vacío de Y, con $X \neq Y$, toda base de filtro en X es una base de filtro en Y, pero ningún filtro en X puede ser un filtro en Y.

Es hora ya de mostrar que cualquier topología puede caracterizarse mediante las nociones de convergencia recien introducidas.

A.7 Proposición. *Sea X un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $x \in \overline{A}$.

ii) *Existe una red (base de filtro, filtro) en A que a converge a x.*

iii) *x es valor adherente a una red (base de filtro, filtro) en A.*

Toda propiedad topológica tendrá por tanto una reformulación en términos de convergencia de redes o bases de filtro. Separación, continuidad y compacidad son las tres propiedades topológicas para las que tal reformulación nos parece especialmente interesante.

A.8 Proposición. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $\{x_\lambda\}$ una red en X que converge a un punto $x \in X$. Entonces x es el único* *valor adherente a la red $\{x_\lambda\}$. Análogo enunciado para bases de filtro o filtros.*

Recíprocamente, si toda red (base de filtro, filtro) en X converge, a lo sumo, a un punto de X, entonces X es un espacio de Hausdorff.

A.9 Proposición. *Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *f es continua en x.*

ii) $\{x_\lambda\} \to x \Rightarrow \{f(x_\lambda)\} \to f(x)$.

iii) $\{x_\lambda\} \to x \Rightarrow \{f(x_\lambda)\} \rightharpoonup f(x)$.

iv) $\{x_\lambda\} \rightharpoonup x \Rightarrow \{f(x_\lambda)\} \rightharpoonup f(x)$.

Se verifica el resultado análogo sustituyendo la red $\{x_\lambda\}$ por una base de filtro o filtro $\mathcal{B}$ y la red $\{f(x_\lambda)\}$ por la base de filtro $\{f(B) : \ B \in \mathcal{B}\}$.

La compacidad secuencial alude a la posibilidad de extraer sucesiones parciales convergentes. Para motivar la futura caracterización de la compacidad en términos de redes o filtros, y especialmente la noción de ultrafiltro, convendrá observar la relación entre los filtros asociados a una sucesión y a una parcial suya. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de un conjunto no vacío X, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente y notamos $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\sigma$ a los filtros engendrados por $\{x_n\}$ y $\{x_{\sigma(n)}\}$ respectivamente, es evidente que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\sigma$. Si X es un espacio topológico, es ahora meridianamente claro que la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ (el filtro $\mathcal{F}_\sigma$) converge siempre que $\{x_n\}$ ($\mathcal{F}$) converja, y que todo valor adherente a la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ (al filtro $\mathcal{F}_\sigma$) es también valor adherente a $\{x_n\}$ (a $\mathcal{F}$). La relación entre la sucesión $\{x_n\}$ y su sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ se refleja en una relación mucho más sencilla, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\sigma$, entre los correspondientes filtros. Se comprende ahora el interés del siguiente concepto y del posterior resultado, consecuencia inmediata del Lema de Zorn.

A.10 Definición. Si X es un conjunto no vacío, un **ultrafiltro** en X es un filtro maximal, esto es, un filtro en X que no está contenido estrictamente en ningún otro. Por ejemplo, si x es un elemento fijo de X,

$$\mathcal{F}_x = \{A \subset X : \; x \in A\}$$

es un ultrafiltro en X.

A.11 Lema. *Todo filtro en un conjunto no vacío X está contenido en un ultrafiltro.*

Podemos ya caracterizar la compacidad en términos de redes o bases de filtro:

A.12 Teorema. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X es compacto.*

ii) *Toda red (base de filtro, filtro) en X tiene un valor adherente.*

iii) *Todo ultrafiltro en X es convergente.*

El paso de compacidad a compacidad relativa no es completamente inmediato. De hecho para obtener una caracterización similar es necesario utilizar la regularidad del espacio ambiente (véase por ejemplo [5]).

Bibliografía: El presente apéndice pretende sólamente ser una rápida exposición de las nociones mínimas sobre convergencia de redes y filtros que se precisan en el proyecto docente. Caso de que los alumnos no tengan conocimiento previo de estas nociones nos parece posible familiarizarlos con las mismas con un gasto de tiempo aceptable, nunca superior a dos horas. Nuestro tratamiento, en cuanto a contenido y orientación, es bastante análogo al que se hace en el texto de Köthe [31]. Un estudio más completo de la convergencia de redes, incluyendo por ejemplo el problema de topologizar un espacio prefijando las redes convergentes, puede verse en el texto de Kelley [30]. El texto de Bourbaki [5] prefiere los filtros. Los textos de Dugundji [15] y Wilansky [58] contienen también un estudio de la convergencia en espacios topológicos generales, tanto en términos de redes como de filtros, algo más completo que el que aquí se ha sugerido. En particular, la idea que permite establecer la total equivalencia entre las dos nociones de convergencia (Proposición A.5) se ha tomado del texto de Dugundji [15]

APENDICE B

TEORIA DE LA MEDIDA.

En este apéndice incluimos una colección de resultados básicos de Teoría de la Medida que serán útiles para el desarrollo del curso de Análisis Funcional. Primero presentamos los espacios $L_p(\mu)$ que son ejemplos clásicos de espacios normados ($p \geq 1$); si los conocimientos de medida de los alumnos son muy restringidos, se puede optar por trabajar solamente con los espacios de medida asociados a la medida de Lebesgue en un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Al menos la presentación de estos espacios pensamos que se debe de hacer en esta asignatura. Quizás algunos de los resultados que se incluyen en el apéndice, como el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz, podrían usarse sin dar una demostración, en caso de que se necesiten. Esta postura está justificada porque actualmente existe en la Licenciatura de Matemáticas una asignatura dedicada especialmente a estos tópicos, llamada precisamente Teoría de la medida.

Empezamos presentando los elementos con los que trabajaremos:

B.1 Definición. Sea Ω un conjunto; una familia $\mathcal{A}$ de partes de Ω es una σ-álgebra si es estable por complementos y por uniones numerables y $\Omega \in \mathcal{A}$. Una función $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida (positiva) si verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y para cualquier familia de conjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de la σ-álgebra $\mathcal{A}$, disjuntos dos a dos, se verifica

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Un espacio de medida es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ donde Ω es un conjunto, $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de partes de Ω y μ una medida. Si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra de partes de un conjunto Λ, una función $f : \Lambda \longrightarrow \Omega$ es medible si $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

Para probar algunas de las propiedades de la integral asociada a una medida resulta útil el siguiente Teorema de aproximación de Lebesgue:

B.2 Teorema. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función medible. Existen funciones simples (sólo toman un número finito de valores) positivas medibles $\{s_n\}$ definidas en Ω tales que*

i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.

ii) $s_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $x \in \Omega$.

Para una función característica de un conjunto $A \in \mathcal{A}$ se define $\int_\Omega \chi_A \; d\mu = \mu(A)$; para funciones simples medibles (combinación lineal de funciones características) se define la integral de la única forma posible para que sea lineal. Para una función medible y positiva f se puede definir su integral respecto de la medida μ por

$$\int_\Omega f \; d\mu = \sup\left\{\int_\Omega s \; d\mu : s \quad \text{es simple y} \quad 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Usando el Teorema de Lebesgue se puede probar:

B.3 Teorema de la convergencia monótona. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en Ω y supongamos que*

i) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$ *para todo* $x \in \Omega$.

ii) $f_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $x \in \Omega$.

Entonces f es medible y

$$\int_\Omega f_n \; d\mu \to \int_\Omega f \; d\mu.$$

Para definir la integral de una función medible valuada real, se descompone ésta en diferencia de dos positivas (su parte positiva y negativa), y se dice que la función de partida es integrable si las integrales de la parte positiva y negativa son finitas; se define la integral por linealidad.

El otro resultado de buena avenencia de la integral con la convergencia puntual es el que sigue:

B.4 Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles en Ω tales que existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Si existe una función integrable g tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in \Omega),$$

entonces, f es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \; d\mu = 0,$$

en particular, $\int_\Omega f_n \; d\mu \to \int_\Omega f \; d\mu$.

Con las desigualdades de Hölder y Minkowski como paso previo obligado, pasamos a definir los espacios normados $L_p(\mu)$.

B.5 Lema. *Sean f, g funciones medibles positivas en Ω. Se verifica:*

i) Desigualdad de Hölder: *Si $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene:*

$$\int_\Omega fg \; d\mu \leq \left(\int_\Omega f^p \; d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^q \; d\mu\right)^{1/q}.$$

ii) Desigualdad de Minkowski: *Si $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, se tiene:*

$$\left(\int_\Omega (f+g)^p \; d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega f^p \; d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega g^p \; d\mu\right)^{1/p}.$$

B.6 Definición. Para $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, definimos

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : \; f \text{ medible}, \; \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Gracias a la desigualdad de Minkowski sabemos que $\mathcal{L}_p(\mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^\Omega$, así como que la función $\nu_p : \mathcal{L}_p(\mu) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

es una seminorma. Se verifica $\nu_p(f) = 0$ si, y sólo si, f se anula salvo en un conjunto de medida nula. Sea pues

$$N(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : \ f \text{ medible}, \ \mu(\{\omega \in \Omega : \ f(\omega) \neq 0\}) = 0\}.$$

Es claro que $N(\mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\mu)$; notaremos

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu).$$

A efectos de notación, identificamos cada clase de equivalencia en $L_p(\mu)$ con uno de sus representantes. Definiendo:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in L_p(\mu)),$$

la aplicación $\|\cdot\|_p$ está bien definida y es una norma en $L_p(\mu)$. En lo sucesivo $L_p(\mu)$ se considerará siempre como espacio normado mediante $\|\cdot\|_p$. Si A es un subconjunto de Ω y existe un conjunto medible B tal que $\Omega \setminus A \subset B$ y $\mu(B) = 0$, decimos que $\omega \in A$ **casi por doquier** con respecto a la medida μ, y escribimos "$\omega \in A$ $[\mu]$-c.p.d.", omitiendo la referencia a la medida μ si no hay lugar a confusión.

En el caso particular de que se tome como σ-álgebra el conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$, y como medida μ la definida por:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{número de elementos de } A & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para A un subconjunto de Ω, al espacio $L_p(\mu)$ resultante lo notaremos por ℓ_p^Ω.

Los resultados que relacionan la convergencia puntual de funciones y la de las integrales correspondientes nos permiten obtener:

B.7 Teorema (Riesz-Fisher). *Si* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *es un espacio de medida arbitrario y* $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *es un espacio de Banach.*

Además, se puede obtener la siguiente relación entre varias de las nociones de convergencia:

B.8 Proposición. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión convergente en $L_p(\mu)$, entonces converge en medida. De toda sucesión convergente en medida $\{g_n\} \to g$ se puede extraer una sucesión parcial $\{g_{\sigma(n)}\}$ que converge puntualmente en Ω a g casi por doquier.*

Por último, usando una vez más el Teorema de aproximación de Lebesgue se puede conseguir el siguiente resultado:

B.9 Proposición. *Sea $p \geq 1$, entonces el conjunto de funciones simples en $L_p(\mu)$ es denso en norma.*

A continuación presentamos dos de los teoremas que son útiles para trabajar con algunos de los espacios que aparecerán durante el curso: el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz. Para enunciar el primero de ellos, introducimos la siguiente terminología:

B.10 Definición. Una función $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una medida compleja si verifica:

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

para cualquier sucesión $\{A_n\}$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos. Para una medida compleja λ se define su variación $|\lambda|$ como la mínima medida positiva tal que $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$ para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$. Se dice que una medida λ es **absolutamente continua** con respecto a una medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ y escribimos $\lambda \ll \mu$ cuando verifica:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

Dada una medida compleja μ y una función $f \in L_1(\mu)$, la aplicación

$$A \to \int_A f \, d\mu$$

es una medida y es inmediato ver que es absolutamente continua con respecto a μ. El Teorema de Radon-Nikodym da el recíproco al resultado anterior, al menos para medidas σ-finitas (Ω es unión de una sucesión de conjuntos medibles de medida finita).

B.11 Teorema de Radon-Nikodym. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida* σ*-finita y* λ *una medida compleja en la* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$*, absolutamente continua con respecto a* μ*. Existe una función* $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ *tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Además, si λ *es real se puede conseguir que* $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ *y, si* λ *es positiva, que* $f(\Omega) \subset [0, \infty[$*.*

El Teorema de Radon-Nikodym permite probar sin dificultad lo siguiente:

B.12 Corolario (Descomposición polar de una medida compleja). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible y* $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *una medida compleja. Existe una función medible* $h : \Omega \to \mathbb{C}$ *tal que* $|h(\omega)| = 1$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *y*

$$\lambda(E) = \int_E h \; d|\lambda| \qquad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Si λ *es una medida con valores en* $\mathbb{R}$ *se puede conseguir que* h *tome solamente los valores* 1 *y* -1*.*

Resulta también interesante la descomposición $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ de una medida real como diferencia de dos medidas positivas, conocida como **"descomposición de Jordan"** de λ, es la partición del conjunto Ω en dos conjuntos que soportan la carga positiva y negativa de λ respectivamente:

B.13 Corolario. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible y* λ *una medida real en* $\mathcal{A}$*. Existen conjuntos* $A, B \in \mathcal{A}$ *tales que* $A \cup B = \Omega$*,* $A \cap B = \emptyset$ *y*

$$\lambda^+(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda^-(E) = -\lambda(B \cap E), \qquad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Por tanto $\lambda(E) \geq 0$ *para* $E \subset A$ *y* $\lambda(E) \leq 0$ *para* $E \subset B$*.*

Se dice que los conjuntos A y B forman una **descomposición de Hahn** de Ω con respecto a la medida real λ. El par (A, B) no es en general único, pero sí lo es esencialmente, en el sentido de que si (A_1, B_1) es otra descomposición, se tiene

$$|\lambda|[(A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A)] = |\lambda|[(B \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus B)] = 0.$$

La demostración es una consecuencia de la descomposición polar de λ.

El último de los resultados que enunciaremos en este apéndice es el Teorema de representación de Riesz; para ello introducimos la siguiente notación:

B.14 Notación. Para un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, L, $C_0(L)$ será el espacio de Banach de las funciones continuas $f : L \to \mathbb{K}$ que se anulan en el infinito, esto es, tales que el conjunto $\{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto para cualquier $\varepsilon > 0$, con norma dada por:

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : \ x \in L\}.$$

B.15 Definición. Si X es un espacio topológico de Hausdorff, **una medida de Borel** en X es una medida (positiva, real o compleja) definida en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$(la mínima que generan los conjuntos abiertos) de X. Si μ es una medida de Borel positiva en X, un conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}$ es **regular exterior** con respecto a μ si verifica que:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ U \text{ abierto}, \ E \subset U \subset X\},$$

mientras que $E \in \mathcal{B}$ es **regular interior** con respecto a μ cuando

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \text{ compacto}, \ K \subset E\}.$$

La medida de Borel positiva μ se dice **regular exterior** (resp. **interior**) cuando todo conjunto de Borel es regular exterior (resp. interior) con respecto a μ, y μ es **regular** cuando es simultáneamente regular exterior e interior.

El siguiente resultado se demuestra con técnicas de medida y describe el dual topológico de algunos espacios clásicos.

B.16 Teorema de representación de Riesz. *Sea L un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff y Φ un funcional lineal continuo en $C_0(L)$. Existe una única medida de Borel (real o compleja) regular λ en L tal que:*

$$\Phi(f) = \int_L f d\lambda \qquad (f \in C_0(L)).$$

Como consecuencia, se tiene una biyección lineal isométrica de $M(L)$ sobre $C_0(L)^*$.

Bibliografía: Cualquiera de los textos generales de Teoría de la Medida, como los de Halmos [25], Cohn [11] y Valdivia [54], contiene la construcción de la integral asociada a una medida, también llamada integral de Lebesgue abstracta, con diferencias insignificantes entre unos y otros. Nos parece muy recomendable la exposición de Rudin [46]. Este texto utiliza el teorema de descripción de los duales de los espacios de Hilbert (Riesz-Fréchet) para la demostración del Teorema de Radon-Nikodym. Se puede hacer una demostración independiente, como la que aparece en Halmos [25], por ejemplo, pero es más laboriosa. El Teorema de representacioón de Riesz se puede consultar en Rudin [46] o bien el el texto de Valdivia [54].

Bibliografía.

1. G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis.* Academic Press. New York 1.966.

2. S. Banach. *Theory of Linear Operations.* North Holland. Amsterdam 1.987.

3. S. K. Berberian. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory.* Springer-Verlag. New York 1.974.

4. F. F. Bonsall and J. Duncan. *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag. Berlin 1.973.

5. N. Bourbaki. *Topologie Général.* Hermann. Paris 1.965.

6. N. Bourbaki. *Espaces Vectoriels Topologiques.* Hermann. Paris 1.966.

7. H. Brézis. *Análisis Funcional.* Alianza. Madrid 1.984.

8. A. L. Brown and A. Page. *Elements of Functional Analysis.* Van Nostrand. London 1.970.

9. G. Buskes. *The Hahn-Banach Theorem surveyed.* Dissertationes Mathematicae 327. Warszawa 1.993.

10. G. Choquet. *Course D'Analyse. Tome II: Topologie.* Masson. Paris 1.964.

11. D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhuser. Boston 1.980.

12. J. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag. New York 1.985.

13. J. Diestel. *Sequences and series in Banach spaces.* Springer-Verlag. New York 1.984.

14. J. Dieudonné. *History of Functional Analysis.* North Holland. Amsterdam 1.981.

15. J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon. Boston 1.966.

16. N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory.* Interscience. New York 1.957.

17. R. Engelking. *General Topology.* Heldermann. Berlin 1.989.

18. M. J. Field. *Differential Calculus and its applications.* Van Nostrand. New York 1.976.

19. K. Floret. *Weakly compact sets.* Lecture Notes in Math. 801. Springer-Verlag. Berlin 1.989.

20. E. Gaughan. *Introducción al análisis.* Alhambra. Madrid 1.972.

21. I. Gelfand, D. Raikov and G. Shilov. *Commutative Normed Rings.* Chelsea. New York 1.964.

22. I. Gelfand, D. Shilov, M. Graev and N. Vilenkin. *Generalized Functions.* Academic Press. New York 1.966

23. P. Habala, P. Hájek and V. Zizler. *Introduction to Banach Spaces [I].* Matfyzpress. Praha 1.996.

24. P. Habala, P. Hájek and V. Zizler. *Introduction to Banach Spaces [II].* Matfyzpress. Praha 1.996.

25. P. R. Halmos. *Introduction to Hilbert Space and The Theory of spectral Multiplicity. Second Edition.* Chelsea. New York 1.957.

26. R. Holmes. *Geometric Functional Analysis and its Applications.* Springer-Verlag. New York 1.975.

27. J. Horvath. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison Wesley. Reading 1.966.

28. G. J. O. Jameson. *Topology and Normed Spaces.* Chapmam and Hall. London 1.974.

29. H. Jarchow. *Locally Convex Spaces.* Teubner Stuttgart 1.981.

30. J. Kelley. *General Topology.* Springer-Verlag. New York 1.975

31. G. Kthe. *Topological Vector Spaces I.* Springer-Verlag. New York 1.969.

32. G. Kthe. *Topological Vector Spaces II.* Springer-Verlag. New York 1.979.

33. R. Larsen. *Functional Analysis an introduction.* Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker. New York 1.973.

34. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Springer-Verlag. Berlin 1.977.

35. A. Mukherjea and K. Photoven. *Real and Functional Analysis. Part B: Functional Analysis.* Plenum Press. New York 1.986.

36. G. Murphy. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press. San Diego 1.990.

37. M. Naimark. *Normed Algebras.* Wolters-Noordhoff. Groningen 1.972.

38. L. Narici and E. Beckenstein. *Topological Vector Spaces.* Marcel Dekker. New York 1.985.

39. G. K. Pedersen. *Analysis Now.* Springer-Verlag. New York 1.988.

40. M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics I: Functional Analysis.* Academic Press. San Diego 1.980.

41. C. Rickart. *General Theory of Banach Algebras.* Krieger. New York 1.960.

42. A. P. Robertson and W. J. Robertson. *Topological vector spaces.* Cambridge University Press. 1.973.

43. S. Rolewicz. *Metric Linear Spaces.* Reidel. Dordrecht 1.985.

44. J. P. Rosay. *A very elementary proof of the Ehrenpreis-Malgrange theorem.* Amer. Math. Monthly. 98, 6. 518-523. 1.991.

45. W. Rudin. *Functional Analysis.* Mc Graw-Hill. New York 1.973.

46. W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* Mc Graw-Hill. New York 1.966.

47. S. Sakai. *C^*-Algebras y W^*-Algebras.* Springer-Verlag. Berlin 1.971.

48. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces.* Springer Verlag. New York 1.971.

49. L. Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann. Paris 1.966.

50. I. Singer. *Bases in Banach Spaces I.* Springer-Verlarg. Berlin 1.970.

51. M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol I.* Publish or Perish, Cambridge. Massachusetts 1.970.

52. A. E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley and Sons. New York 1.958.

53. A. Taylor and D. Lay. *Introduction to Functional Analysis (Second Edition).* John Wiley and Sons. New York 1.980.

54. M. Valdivia. *Análisis Matemático V. Unidades didácticas 1-2-3.* U.N.E.D. Madrid 1.979.

55. D. Van Dulst. *Reflexive and superreflexive Banach spaces.* Mathematical Centre Tracts. 102. Amsterdam 1.978.

56. D. Werner. *A Proof of the Markov-Kakutani Fixed Point Theorem Via the Hahn-Banach Theorem.* Extracta Mathematicae 8. 1.993, (37-38).

57. A. Wilansky. *Topology for Analysis.* John Wiley and Sons. New York 1.970.

58. A. Wilansky. *Modern methods in topological vector spaces.* McGraw-Hill. New York 1.978.