Proyecto Docente

Análisis Funcional

Ginés López Pérez

Granada, 2019

Índice general

Introducción

Antes de comentar el contenido de esta memoria, procuraremos expresar nuestra idea de lo que debe ser un curso de Análisis Funcional. Suscribimos la idea del libro de Conway: es posible que dos investigadores de Análisis Funcional, tengan serias dificultades para comunicarse sus respectivos descubrimientos. Es decir, lo que se entiende por Análisis Funcional es, hoy en día, algo tan amplio que es imposible de abarcar. No obstante, es posible definir los objetos abstractos que estudia el Análisis Funcional, como dice Dieudonné: los espacios vectoriales topológicos y las aplicaciones entre ellos, con ciertas propiedades algebraicas y topológicas. Podemos añadir que, además, no se pueden perder de vista las aplicaciones, que el estudio abstracto de dichas estructuras trae consigo. Este proyecto docente se centrará en el ambiente privilegiado de los espacios de Banach y los operadores entre ellos.

En el actual plan de estudios, el Análisis Funcional se imparte en el primer cuatrimestre del tercer curso en el grado en Matemáticas, así como en el doble grado de Informática y Matemáticas y el doble grado en Física y Matemáticas, siendo además una asignatura obligatoria de 6 créditos en todos los grados anteriores. De hecho, los dobles grados anteriores son consecuencia de acuerdos entre las respectivas comisiones docentes, por lo que la asignatura de Análisis Funcional que se imparte en ellos es común con la que se imparte en el grado en Matemáticas. Se muestra a continuación el documento Verifica, correspondiente a la asignatura de Análisis Funcional del grado en Matemáticas, por el que se rigen también los dos dobles grados en los que se imparte esta asignatura. Obsérvese que el documento que se muestra a continuación es consecuencia de un Modifica previo, en el que la asignatura de Análisis Vectorial pasa a ser optativa, antes era obligatoria, y la asignatura de Análisis Funcional pasa a ser obligatoria, antes era optativa. Obsérvese además que en el documento que se muestra a continuación se conceden un total de 150 horas a la asignatura de Análisis Funcional, de las cuales 90 corresponden a trabajo individual del alumno y las 60 restantes a la docencia impartida por el profesor. Al final de esta introducción se mostrará una Guía Docente con la distribución concreta del total de horas.

entre el estudiante y el profesor. Propósito: 1) Orientar el trabajo autónomo y grupal del alumnado, 2) profundizar en distintos aspectos de la materia y 3) orientar la formación académica-integral del estudiante.		
5.5.1.7 METODOLOGÍAS DOCENTES		
Lección magistral/expositiva		
Resolución de problemas y estudio de casos prácticos		
Análisis de fuentes y documentos		
Realización de trabajos en grupo		
Realización de trabajos individuales		
5.5.1.8 SISTEMAS DE EVALUACIÓN		
SISTEMA DE EVALUACIÓN	**PONDERACIÓN MÍNIMA**	**PONDERACIÓN MÁXIMA**
Prueba escrita: exámenes de ensayo, pruebas objetivas, resolución de problemas, casos o supuestos, pruebas de respuesta breve, informes y diarios de clase.	70.0	90.0
Prueba oral: exposiciones de trabajos orales en clase, individuales o en grupo, sobre contenidos de la asignatura (seminario) y sobre ejecución de tareas prácticas correspondientes a competencias concretas.	0.0	10.0
Técnicas basadas en la asistencia y participación activa del alumno en clase, seminarios y tutorías: trabajos en grupos reducidos sobre supuestos prácticos propuestos.	0.0	20.0

NIVEL 2: Análisis Funcional		
5.5.1.1 Datos Básicos del Nivel 2		
CARÁCTER	Obligatoria	
ECTS NIVEL 2	6	
DESPLIEGUE TEMPORAL: Semestral		
ECTS Semestral 1	**ECTS Semestral 2**	**ECTS Semestral 3**
ECTS Semestral 4	**ECTS Semestral 5**	**ECTS Semestral 6**
	6	
ECTS Semestral 7	**ECTS Semestral 8**	**ECTS Semestral 9**
ECTS Semestral 10	**ECTS Semestral 11**	**ECTS Semestral 12**
LENGUAS EN LAS QUE SE IMPARTE		
CASTELLANO	**CATALÁN**	**EUSKERA**
Sí	No	No
GALLEGO	**VALENCIANO**	**INGLÉS**
No	No	No
FRANCÉS	**ALEMÁN**	**PORTUGUÉS**
No	No	No
ITALIANO	**OTRAS**	
No	No	

NO CONSTAN ELEMENTOS DE NIVEL 3

5.5.1.2 RESULTADOS DE APRENDIZAJE

~~- **Análisis Vectorial**~~

~~* Relacionar curvas y superficies con objetos geométricos y funciones de varias variables reales.~~

~~* Conocer y saber manejar los conceptos fundamentales de la integración de funciones de varias variables.~~

~~* Resolver integrales de funciones de varias variables, integrales curvilíneas y de superficie; calcular volúmenes de recintos tridimensionales.~~

~~* Utilizar en aplicaciones a otros campos los conceptos asociados a las derivadas parciales, a las integrales de línea y de superficie, y a las integrales de dos o tres variables.~~

~~* Conocer los conceptos y resultados básicos del cálculo vectorial; conocer y saber aplicar el teorema de Stokes y sus versiones clásicas, sus derivaciones y aplicaciones más importantes.~~

- **Análisis Funcional**

* Capacidad de abstracción para el estudio de problemas típicos del Análisis Matemático desde un punto de vista funcional, comprendiendo las ventajas de los métodos funcionales para la resolución de diversos problemas.

* Familiaridad con algunos espacios de funciones de uso constante en Análisis Matemático y en sus Aplicaciones: espacios de funciones continuas, diferenciables, analíticas o armónicas, integrables, etc.

* Preparación para estudios posteriores tanto en Análisis Matemático como en otras ramas de la Matemática. Esta materia es imprescindible para una posterior iniciación a la investigación en Matemáticas.

5.5.1.3 CONTENIDOS

~~- **Análisis Vectorial**~~

~~* Integración reiterada y cambio de variables.~~

~~* Cálculo de volúmenes y otras aplicaciones.~~

~~* Teoremas clásicos del Cálculo Vectorial.~~

- **Análisis Funcional**

* Espacios normados.

* Espacios de Hilbert.

* Operadores compactos en espacios de Hilbert.

* Dualidad en espacios normados.

* Topologías débiles.

5.5.1.4 OBSERVACIONES

Requisitos previos: Para un correcto seguimiento de la materia se recomienda haber cursado las asignaturas de la materia básica *Matemáticas.*

5.5.1.5 COMPETENCIAS

5.5.1.5.1 BÁSICAS Y GENERALES

CG01 - Poseer los conocimientos básicos y matemáticos de las distintas materias que, partiendo de la base de la educación secundaria general, y apoyándose en libros de texto avanzados, se desarrollan en esta propuesta de título de Grado en Matemáticas
CG02 - Saber aplicar esos conocimientos básicos y matemáticos a su trabajo o vocación de una forma profesional y poseer las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de las Matemáticas y de los ámbitos en que se aplican directamente
CG03 - Saber reunir e interpretar datos relevantes (normalmente de carácter matemático) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética
CG04 - Poder transmitir información, ideas, problemas y sus soluciones, de forma escrita u oral, a un público tanto especializado como no especializado
CG06 - Utilizar herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos

CB1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio		
CB2 - Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio		
CB4 - Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado		
CB5 - Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía		
5.5.1.5.2 TRANSVERSALES		
CT02 - Fomentar y garantizar el respeto a los Derechos Humanos y a los principios de accesibilidad universal, igualdad ante la ley, no discriminación y a los valores democráticos y de la cultura de la paz		
CT01 - Desarrollar cierta habilidad inicial de "emprendimiento" que facilite a los titulados, en el futuro, el autoempleo mediante la creación de empresas		
5.5.1.5.3 ESPECÍFICAS		
CE01 - Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad de enunciar proposiciones en distintos campos de las matemáticas, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos		
CE02 - Conocer demostraciones rigurosas de teoremas clásicos en distintas áreas de Matemáticas		
CE03 - Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos		
CE04 - Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) y distinguirlas de aquellas puramente accidentales, y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos		
CE05 - Resolver problemas matemáticos, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las restricciones de tiempo y recursos		
CE06 - Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan		
CE07 - Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras para experimentar en matemáticas y resolver problemas		
5.5.1.6 ACTIVIDADES FORMATIVAS		
ACTIVIDAD FORMATIVA	**HORAS**	**PRESENCIALIDAD**
Lección magistral (Clases teóricas-expositivas). Descripción: Presentación en el aula de los conceptos fundamentales y desarrollo de los contenidos propuestos. Propósito: Transmitir los contenidos de la materia, motivando al alumnado a la reflexión y a la mentalidad crítica, facilitándole el descubrimiento de las relaciones entre diversos conceptos.	40	100
Actividades prácticas (Clases prácticas). Descripción: Actividades a través de las cuales se pretende mostrar al alumnado cómo debe actuar a partir de la aplicación de los conocimientos adquiridos. Propósito: Desarrollo en el alumnado de las habilidades instrumentales de la materia.	15	100
Evaluación. Descripción: Actividades evaluativas: exámenes orales o escritos, presentación de trabajos o informes individuales o en grupo, ...Propósito:	5	100

Evaluar el trabajo y la adquisición de competencias del estudiante.		
Actividades individuales (Estudio y trabajo autónomo). Descripción: 1) Actividades (guiadas y no guiadas) propuestas por el profesor para profundizar en aspectos concretos de la materia para que el estudiante avance en la adquisición conocimientos y procedimientos de la materia, 2) Estudio individualizado de los contenidos de la materia. Propósito: Favorecer en el estudiante la capacidad para autorregular su aprendizaje, planificándolo y adecuándolo a sus especiales condiciones e intereses.	80	0
Tutorías académicas. Descripción: manera de organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se basa en la interacción entre el estudiante y el profesor. Propósito: 1) Orientar el trabajo autónomo y grupal del alumnado, 2) profundizar en distintos aspectos de la materia y 3) orientar la formación académica-integral del estudiante.	10	0

5.5.1.7 METODOLOGÍAS DOCENTES
Lección magistral/expositiva
Resolución de problemas y estudio de casos prácticos
Análisis de fuentes y documentos
Realización de trabajos en grupo
Realización de trabajos individuales

5.5.1.8 SISTEMAS DE EVALUACIÓN

SISTEMA DE EVALUACIÓN	PONDERACIÓN MÍNIMA	PONDERACIÓN MÁXIMA
Prueba escrita: exámenes de ensayo, pruebas objetivas, resolución de problemas, casos o supuestos, pruebas de respuesta breve, informes y diarios de clase.	70.0	90.0
Prueba oral: exposiciones de trabajos orales en clase, individuales o en grupo, sobre contenidos de la asignatura (seminario) y sobre ejecución de tareas prácticas correspondientes a competencias concretas.	0.0	10.0
Técnicas basadas en la asistencia y participación activa del alumno en clase, seminarios y tutorías: trabajos en grupos reducidos sobre supuestos prácticos propuestos.	0.0	20.0

NIVEL 2: Variable Compleja I

5.5.1.1 Datos Básicos del Nivel 2

CARÁCTER	Obligatoria
ECTS NIVEL 2	6

DESPLIEGUE TEMPORAL: Semestral

ECTS Semestral 1	ECTS Semestral 2	ECTS Semestral 3

Los requisitos previos para este programa son dos cursos de Algebra Lineal y Topología, junto con las asignaturas de Cálculo y Análisis, que se imparten en los dos primeros cursos del grado. Por otro lado, hemos incluido algunas aplicaciones en nuestro programa que requieren conocimientos de Variable compleja y de Teoría de la Medida. La primera se imparte actualmente en el primer cuatrimestre del tercer curso del grado en Matemáticas. Respecto a la segunda, hemos creído conveniente no utilizar más que la integral de Lebesgue, que sí debe ser conocida por el alumno, para tener de esta manera cubiertos los conocimientos necesarios para nuestras aplicaciones.

Pasamos ya a describir el contenido de nuestro programa, que se dedicará exclusivamente de los espacios normados.

Nos parece conveniente comenzar con un primer capítulo dedicado a las propiedades básicas de los espacios normados, puesto que el conocimiento de éstos varía mucho de una promoción a otra. Piénsese que el conocimiento del alumno de los espacios normados, antes de llegar a este curso, se imparte en un año junto con el cálculo diferencial en varias variables y la integral de Lebesgue.

Empezamos, ya dentro de nuestro primer capítulo, definiendo la estructura de espacio normado y exponiendo una larga lista de ejemplos, para familiarizar al alumno con los conceptos básicos, y posibilitando una primera toma de contacto mediante la comprobación de detalles que se dejan al alumno en la lista de ejemplos. En el segundo tema, presentamos las formas posibles que puede adoptar la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados y definimos el espacio de operadores, dando entrada al espacio dual. El último tema se dedica al estudio de los espacios normados de dimensión finita, destacando el teorema de Tihonov, que nos garantiza la equivalencia entre dos cualesquiera normas en un espacio vectorial de dimensión finita, y el teorema de Riesz, que caracteriza la dimensión finita de un espacio normado a través de su compacidad local, poniendo de manifiesto la «escasez» de conjuntos compactos en dimensión infinita.

Nuestro segundo capítulo está dedicado al teorema de Hahn-Banach, que motivamos con el problema de extensión de funcionales continuos. El primer tema de este capítulo está dedicado a la versión analítica del teorema, que nos asegura la no trivialidad del dual de un espacio normado. Esto nos permite ya tener un primer contacto con la teoría de dualidad. En nuestro segundo tema nos dedicamos a las aplicaciones, para poner de manifiesto la gran versatilidad del teorema de Hahn-Banach, uno de los más importantes principios del Análisis Funcional. Destacamos la existencia de medias invariantes en todo semigrupo abeliano, como consecuencia de una reformulación equivalente a la versión analítica del teorema de Hahn-Banach, el clásico problema de los momentos y el teorema de Markov-Kakutani, un resultado de punto fijo que deducimos de la versión geométrica del teorema que nos ocupa. Por último, obtenemos la versión geométrica, dejando patente su equivalencia con la analítica, y dando entrada a los teoremas de separación.

Nuestro tercer capítulo está dedicado a la teoría de dualidad en espacios normados, que puede ser considerada como una prolongación del teorema de Hahn-Banach. Comenzamos en el primer tema definiendo la topología débil de un espacio normado y la débil-* de su dual, estudiando sus propiedades más importantes. La motivación para ello es la carencia de subconjuntos compactos para la topología de la norma.

El segundo tema se dedica al teorema del bipolar en espacios normados, que se presenta sólo para subespacios. Presentamos los teoremas de Goldstine y Banach-Alaoglú en nuestro tercer tema, mostrando la «abundancia» de compactos para la topología débil, en espacios reflexivos y para la topología débil-*, en espacios duales. Como aplicaciones destacamos el teorema de Milman-Pettis (convexidad uniforme implica reflexividad), el teorema de Mazur que muestra la universalidad del espacio de las funciones continuas en $[0,1]$, entre la clase de los espacios de Banach separables, la complementación de c_0 en cualquier espacio de Banach separable y la complementación de ℓ_∞ en cualquier espacio de Banach. Dedicamos el último tema al Teorema de Krein-Milman junto a sus posibles aplicaciones, entre las que destacamos la solución a un problema de control óptimo asociado a una ecuación diferencial ordinaria.

Nos dedicamos en el cuarto capítulo a presentar otros dos principios del Análisis Funcional: los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss. Comenzamos presentando una herramienta imprescindible en un curso de Análisis Funcional, el teorema de Baire. En nuestro segundo tema se demuestra el teorema de la aplicación abierta, junto con sus formulaciones equivalentes: teoremas de la gráfica cerrada e isomorfismos de Banach. Aparte de las aplicaciones al mundo del Análisis Funcional, presentamos otra en el mundo de las ecuaciones diferenciales, mostrando la dependencia continua respecto de los datos y valores iniciales de cualquier sistema de ecuaciones lineales. El tercer tema se dedica al teorema de Banach-Steinhauss, que deducimos del teorema de la gráfica cerrada, si bien la herramienta principal vuelve a ser el teorema de Baire, del que se desprende un resultado más profundo de naturaleza estrictamente topológica: el principio de acotación uniforme. Entre las aplicaciones destacan la abundancia de funciones continuas cuya serie de Fourier asociada no converge puntualmente y la caracterización de las matrices conservativas mediante las llamadas condiciones de Silverman-Toeplitz.

Dedicamos el cuarto tema al apasionante mundo de las bases de Schauder en espacios de Banach, mostrando el teorema de la base de Banach-Schauder, una caracterización intrínseca de las bases, que es otra brillante aplicación del teorema de la aplicación abierta. El concepto de bases equivalentes nos sirve de excusa para motivar el teorema de Bessaga-Pelczynski, que presentamos en el último tema tras el principio de selección. Como aplicaciones, destacan el teorema de Orlicz-Pettis y el hecho de que todo operador de c_0 en un espacio de Banach que no contenga subespacios isomorfos a c_0, se pueda aproximar por operadores de rango finito, es decir dicho operador es compacto. Estos dos últimos temas pueden servir de introducción a alumnos especialmente interesados, y podrían ser material sobre el que edificar un posible trabajo fin de grado.

Nuestro quinto capítulo se dedica al estudio de los espacios de Hilbert. Varios resultados básicos muestran el gran parecido geométrico con los espacios euclídeos. Tras una visión del Análisis Funcional en el mundo de los espacios normados nos parece adecuado terminar con los espacios de Hilbert, que poseen la más rica estructura.

Los principales resultados del primer tema son los teoremas de la aproximación óptima, proyección ortogonal y Riesz-Fréchet. También hemos incluido una consecuencia de éste último, el teorema de Lax-Milgram, que resulta de utilidad en ecuaciones diferenciales.

En el segundo tema abordamos la descripción de los espacios de Hilbert, como los del tipo $\ell_2(\Gamma)$. Tras el concepto de familia sumable, se da entrada a las bases ortonormales en espacios de Hilbert, motivadas por el hecho de que con la base de ℓ_2, se puede reconstruir toda la estructura del espacio.

El primer tema del último capítulo pretende ser una introducción a la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Se prueba la densidad de los operadores de rango finito, en el espacio de los operadores compactos, y se presentan algunos ejemplos interesantes, algunos de ellos relacionados con ecuaciones integrales. Dedicamos nuestro segundo tema al teorema espectral, para operadores compactos normales, que se da en sus diferentes versiones. Dedicamos nuestro último tema a la teoría de Riesz-Schauder, sobre el estudio del espectro de operadores compactos en espacios de Banach. Hasta ahora no habíamos encontrado el lugar apropiado para ella, que encuentra aquí su marco apropiado, teniendo como referente lo hecho en el mundo de los espacios de Hilbert.

Se incluye también un apéndice sobre Teoría de la Medida que cubre los conocimientos que hayamos podido necesitar, aunque se puede optar por limitarse a la integral de Lebesgue en las aplicaciones, como ya dijimos con anterioridad. Se puede utilizar a título informativo, siendo material sobre el que algún alumno especialmente interesado puede profundizar. Desafortunadamente, la Teoría de la Medida como tal, ha desparecido en la actualidad de los planes de estudios, tanto de grado como de máster.

En cuanto a la bibliografía, se incluye de forma específica al final de cada capítulo, así como un resumen de cada uno al inicio, que permite tener una visión bastante completa de los asuntos que se van a tratar.

Se ha hecho una amplia selección de resultados para demostrar con detalle en clase, los resultados no demostrados con detalle en este proyecto serán trabajo del alumno con las indicaciones oportunas y la bibliografía correspondiente. Por otro lado, la bibliografía de cada capítulo contiene una gran cantidad de problemas que proponer a los alumnos, también como trabajo individual.

La experiencia nos dice que la cantidad del temario que realmente se puede impartir varía de unas promociones a otras. En el más que hipotético caso de no poder impartir todo el contenido de este proyecto, optaríamos por suprimir algunas de las aplicaciones presentadas del Teorema de Hahn-Banach y suprimir también los temas dedicados a las bases de Schauder y el principio de selección de Bessaga-Pelzcynski. Por supuesto, el apéndice sobre Teoría de la Medida no es imprescindible, como ya hemos comentado.

Finalmente, presentamos un ejemplo de Guía Docente que se presentaría para ser aprobada por el departamento responsable, y se ofrecería como información a los alumnos al inicio del cuatrimestre correspondiente, indicando la distribución de horas, las competencias básicas y transversales, objetivos, metodología y el sistema de evaluación, entre otras cuestiones.

GUIA DOCENTE DE LA ASIGNATURA
ANÁLISIS FUCIONAL

(Fecha última actualización:)
(Fecha de aprobación en Consejo de Departamento:)

MÓDULO	MATERIA	CURSO	SEMESTRE	CRÉDITOS	TIPO
Análisis Matemático	Análisis Funcional	3º	1º	6	Obligatoria

PROFESORES	Los horarios de tutorías del profesorado pueden consultarse en http://analisismatematico.ugr.es/pages/organizacion
Ginés López Pérez	**Dirección:** Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas, Dpto. Análisis Matemático, Despacho nº 14. **Correo electrónico**: glopezp@ugr.es
GRADO EN EL QUE SE IMPARTE	**OTROS GRADOS A LOS QUE SE PODRÍA OFERTAR**
Grado en Matemáticas Doble Grado en Física y Matemáticas Doble Grado en Informática y Matemáticas	Grado en Física

PRERREQUISITOS

Tener cursadas las asignaturas básicas y obligatorias de los dos primeros cursos del Grado en Matemáticas.

BREVE DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS (SEGÚN MEMORIA DE VERIFICACIÓN DEL GRADO)

- Espacios normados.
- Espacios de Hilbert.
- Operadores compactos en espacios de Hilbert.
- Dualidad en espacios normados.
- Topologías débiles.

COMPETENCIAS GENERALES Y ESPECÍFICAS

COMPETENCIAS BÁSICAS Y GENERALES
CB1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la

educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también
algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.
CB2 - Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las
competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
CB4 - Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no
Especializado.
CB5 - Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores
con un alto grado de autonomía.
CG01 - Poseer los conocimientos básicos y matemáticos de las distintas materias que, partiendo de la base de la educación
secundaria general, y apoyándose en libros de texto avanzados, se desarrollan en esta propuesta de título de Grado en Matemáticas.
CG02 - Saber aplicar esos conocimientos básicos y matemáticos a su trabajo o vocación de una forma profesional y poseer las
competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de las Matemáticas y de los ámbitos en que se aplican directamente.
CG03 - Saber reunir e interpretar datos relevantes (normalmente de carácter matemático) para emitir juicios que incluyan una
reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética.
CG04 - Poder transmitir información, ideas, problemas y sus soluciones, de forma escrita u oral, a un público tanto especializado
como no especializado.
CG06 - Utilizar herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos.

COMPETENCIAS TRANSVERSALES
CT02 - Fomentar y garantizar el respeto a los Derechos Humanos y a los principios de accesibilidad universal, igualdad ante la ley,
no discriminación y a los valores democráticos y de la cultura de la paz.
CT01 - Desarrollar cierta habilidad inicial de "emprendimiento" que facilite a los titulados, en el futuro, el autoempleo mediante la
creación de empresas.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS
CE01 - Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad de enunciar proposiciones en distintos campos de las
matemáticas, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.
CE02 - Conocer demostraciones rigurosas de teoremas clásicos en distintas áreas de Matemáticas.
CE03 - Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto
en diferentes contextos.
CE04 - Saber abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) y
distinguirlas de aquellas puramente accidentales, y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así
como identificar errores en razonamientos incorrectos.
CE05 - Resolver problemas matemáticos, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las
restricciones de tiempo y recursos.
CE06 - Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas

matemáticas
más adecuadas a los fines que se persigan.
CE07 - Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización
u otras para experimentar en matemáticas y resolver problemas.

OBJETIVOS (EXPRESADOS COMO RESULTADOS ESPERABLES DE LA ENSEÑANZA)

* Capacidad de abstracción para el estudio de problemas típicos del Análisis Matemático desde un punto de vista funcional, comprendiendo las ventajas de los métodos funcionales para la resolución de diversos problemas.
* Familiaridad con algunos espacios de funciones de uso constante en Análisis Matemático y en sus Aplicaciones: espacios de funciones continuas, diferenciables, analíticas o armónicas, integrables, etc.

* Preparación para estudios posteriores tanto en Análisis Matemático como en otras ramas de la Matemática. Esta materia esimprescindible para una posterior iniciación a la investigación en Matemáticas.

TEMARIO DETALLADO DE LA ASIGNATURA

Tema 1: Espacios normados.
Espacios normados y espacios de Banach. Ejemplos.
Continuidad de aplicaciones lineales.
Espacios normados de dimensión finita.

Tema 2: El teorema de Hahn-Banach.
Versión analítica del teorema de Hahn-Banach.
Más teoremas de Hahn-Banach. Aplicaciones.

Tema 3: Introducción a la teoría de la dualidad.
Topologías débiles.
El Teorema del bipolar en espacios normados.
Los Teoremas de Goldstine y Banach-Alaoglù.
El Teorema de Krein-Milman.

Tema 4: Los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss
La categoría. El Teorema de Baire.
El Teorema de la aplicación abierta.
Consecuencias: el Teorema de Banach-Steinhauss.
Bases de Schauder.
El principio de selección de Bessaga-Pelczýnski

Tema 5: Espacios de Hilbert.
Los teoremas de la proyección ortogonal y Riesz-Fréchet.
Bases ortonormales y espacios de Hilbert "tipo".

Tema 6: Operadores compactos.
Operadores en espacios de Hilbert.

El Teorema espectral.
La Teoría de Riesz-Schauder.

Apéndice: Teoría de la medida.

TEMARIO PRÁCTICO. Las prácticas de esta asignatura consisten en la resolución de ejercicios y problemas relacionados con los contenidos teóricos.

BIBLIOGRAFÍA

La que contiene la memoria docente presentada.

ENLACES RECOMENDADOS

http://mathworld.wolfram.com/topics/FunctionalAnalysis.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

METODOLOGÍA DOCENTE

La práctica docente combinará el método expositivo (clases teóricas, lección magistral) con clases prácticas (resolución de ejercicios y problemas) y tutorías individuales o colectivas (resolución de dudas), centrándose en el trabajo del estudiante (autónomo o en grupo) para lograr un aprendizaje basado en la adquisición de competencias.

Con la siguiente distribución aproximada:

- Un 30 % de docencia presencial en el aula (45 horas).
- Un 10 % para talleres de problemas y su evaluación (15 horas).
- Un 60 % de estudio individualizado del alumno, búsqueda, consulta y tratamiento de información y resolución de problemas. (90 horas)

EVALUACIÓN (INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y PORCENTAJE SOBRE LA CALIFICACIÓN FINAL, ETC.)

Evaluación continua. Convocatoria ordinaria.
Exámenes teóricos de conocimientos y resolución de problemas donde se valorarán los conocimientos adquiridos por el alumno, especialmente, su capacidad para la aplicación de los mismos a situaciones concretas.

Examen parcial a realizar en fecha que se fijará con suficiente antelación. Contenido: la parte del programa explicado hasta la fecha del examen. Valoración: 20%.
Examen final a realizar en la fecha que se fije al respecto. Contenido: la totalidad del programa explicado. Valoración: 60%.

Relaciones de ejercicios y trabajos para hacer en casa y entregar por escrito. Valoración: 20%.

La calificación global corresponderá a la calificación numérica ponderada de los distintos aspectos que integran el sistema de evaluación.

Evaluación final única (artículo 8 de la "Normativa de Evaluación" aprobada en Consejo de Gobierno el 20 de mayo de 2013). Aquellos estudiantes que no puedan acogerse por diversos motivos al plan de evaluación anterior podrán someterse a un proceso de evaluación única final, solicitándolo al Director del Departamento de Análisis Matemático durante las dos primeras semanas de impartición de la asignatura. Dicha evaluación consistirá en un solo acto académico el día de la convocatoria oficial de examen para la asignatura con diversas cuestiones teórico prácticas que garanticen que el alumno ha adquirido la totalidad de las competencias descritas en esta guía docente.

Convocatoria Extraordinaria.
Examen teórico-práctico en el que se valorará tanto la adquisición de conocimientos como la capacidad de aplicación de los mismos a situaciones prácticas para la resolución de problemas: 100%.

Todo lo relativo a la evaluación se regirá por la Normativa de evaluación y calificación de los estudiantes vigente en la Universidad de Granada, que puede consultarse en:

http://www.ugr.es/~minpet/pages/enpdf/normativaevaluacionycalificacion.pdf

El calendario de exámenes ordinarios y extraordinarios puede ser consultado en:

http://grados.ugr.es/matematicas/pages/infoacademica/convocatorias

RÉGIMEN DE ASISTENCIA

La asistencia a las clases teóricas y prácticas y la participación activa en las mismas es de importancia decisiva para la adquisición de los conocimientos y competencias de esta asignatura. Se harán controles periódicos de asistencia y los alumnos que se acojan a la evaluación continua no podrán tener más de un 25% de ausencias en el total de los controles realizados. Para los demás alumnos la asistencia a las clases no será obligatoria.

INFORMACIÓN ADICIONAL

Para que conste a los efectos oportunos, el Departamento de Análisis Matemático, en sesión ordinaria del Consejo de Departamento celebrada el día , aprobó la presente guía docente.

Fecha, firma y sello Fdo: El Director/a o Secretario/a

1. Espacios normados

Como no podía ser de otra forma, el objetivo de este capítulo es presentar los dos objetos matemáticos que estudia el Análisis Funcional, al nivel de este proyecto. Empezamos por la definición de norma, topología de la norma y espacio de Banach, y seguimos con una lista abundante de ejemplos, en los que hay ya bastantes detalles para comprobar y, por tanto, la posibilidad de una primera toma de contacto práctico. En el segundo tema se presentan las formas posibles que puede adoptar la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados, definiendo el espacio de operadores y dando entrada al espacio dual, donde ya echamos de menos algún resultado que nos garantice la no trivialidad de aquél. El último tema se dedica al estudio de los espacios normados finito-dimensionales, destacando el resultado de Tihonov (1935), que nos garantiza la continuidad de toda aplicación lineal que sale de un espacio normado finito-dimensional (por tanto la equivalencia de dos cualesquiera normas en tal espacio) y el teorema de Riesz (1918) que pone en equivalencia la dimensión finita de un espacio normado y la compacidad local de dicho espacio. Este último resultado sirve para definir a los alumnos la filosofía que seguirá en adelante (la buena avenencia entre las estructuras algebraica y topológica), así como para poner de manifiesto la «escasez» de conjuntos compactos en dimensión infinita.

1.1. Espacios normados y espacios de Banach. Ejemplos

En lo que sigue $\mathbb{K}$ denotará indistintamente al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Todos los espacios vectoriales considerados lo serán sobre $\mathbb{K}$.

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial. Una *norma* en X es, por definición, una función $\|\cdot\|\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:

i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Un *espacio normado* será un par $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X. Cuando no haya lugar a confusión omitiremos la segunda componente del par, con el fin de simplificar la notación. Notaremos $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, conjuntos que llamaremos bola y esfera unidad, respectivamente del espacio normado X.

Si en un espacio normado X definimos $d(x, y) = \|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in X$, tendremos gracias a la definición de norma que d es una distancia en X, lo que hace que podamos dotar a X de estructura de espacio topológico con la topología generada por la distancia d, usualmente llamada *topología de la norma*. Nótese además que las aplicaciones $\sigma\colon X\times X \longrightarrow X$ y $\tau\colon \mathbb{K}\times X \longrightarrow X$ definidas mediante $\sigma(x,y) = x+y$, $\tau(\lambda,x) = \lambda x$ son continuas para las topologías naturales que obviamente estamos considerando. Como consecuencia inmediata se obtiene que el cierre de cualquier subespacio vuelve a ser un subespacio. (Por supuesto la buena avenencia entre las estructuras topológica y algebraica no es sólo deseable sino imprescindible, filosofía que será constante a lo largo del curso y que se pondrá más de manifiesto en poco tiempo.)

Diremos que una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial X es *completa* cuando lo sea la distancia asociada a ella, y en tal caso diremos que X es un espacio de *Banach* (para la norma $\|\cdot\|$), concepto que obviamente depende de la norma considerada en X. Quizá sea conveniente recordar en este momento que el espacio normado $\mathbb{K}$ con el valor absoluto o módulo como norma, es un espacio de Banach.

Si Y es un subespacio (vectorial) de un espacio normado X, podemos dotar a Y de estructura de espacio normado considerando la norma de X restringida a Y. Es un sencillo ejercicio ver que si Y es completo ha de ser cerrado en X. De hecho, si X es además un espacio de Banach, se comprueba fácilmente que Y, con la norma de X restringida, es de Banach si, y sólo si, Y es cerrado en X.

Parece indiscutible que es el momento de exponer una lista de ejemplos, lista que además de ejemplificadora será utilizada como fuente de los primeros ejercicios para proponer a los alumnos. Creemos además que debemos recoger la más amplia gama de espacios normados que llevan atribuído el adjetivo «clásico», que para nosotros son los que aparecen con frecuencia en la literatura y que, por supuesto, se puedan presentar en estos comienzos.

Ejemplos de espacios normados y espacios de Banach

i) Si n es un número natural, la norma euclídea en $\mathbb{K}^n$ es sin duda la mejor conocida por el alumno, sin embargo no es más que un caso particular de una familia de normas «clásicas» que definiremos a continuación.

   La desigualdad
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
   (válida para cualesquiera números reales no negativos a, b y números reales positivos p, q tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), se puede obtener inmediatamente de la convexidad de la función exponencial.

   La desigualdad anterior permite demostrar la *Desigualdad de Hölder*:
$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$
   donde a_i, b_i son escalares arbitrarios para $1 \leq i \leq n$ y $p > 0$.

   A partir de aquí se llega, por fin, a la *Desigualdad de Minkowski*:
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}$$

válida también para cualesquiera escalares a_i, b_i y $p \geq 1$.

Si ahora definimos, para $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ y $p \geq 1$,

$$\|(t_1, \ldots, t_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i|^p\right)^{1/p}$$

la desigualdad de Minkowski es el único ingrediente necesario no trivial para comprobar que $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^n$.

La complitud del módulo o valor absoluto en $\mathbb{K}$, permite comprobar que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach, usualmente denotado por ℓ_p^n.

Si definimos, para $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|(t_1, \ldots, t_n)\|_\infty = \text{máx}\{|t_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

es mucho más fácil comprobar que $\|\cdot\|_\infty$ es una nueva norma en $\mathbb{K}^n$, que al igual que en el caso anterior, es completa. Ahora notaremos ℓ_∞^n al espacio de Banach $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y dicha notación se puede justificar mediante la igualdad

$$\lim_{p \to +\infty} \|(t_1, \ldots, t_n)\|_p = \|(t_1, \ldots, t_n)\|_\infty \quad (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n.$$

ii) Los ejemplos presentados anteriormente son todos de dimensión finita. Gracias al pequeño trabajo realizado hasta ahora nos costará poco generalizar los espacios del punto anterior a la dimensión infinita.

Si $1 \leq p < +\infty$, el conjunto

$$\ell_p = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p < +\infty\right\}$$

es un espacio vectorial, con las operaciones definidas coordenada a coordenada.

Si definimos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p}$$

obtenemos que $\|\cdot\|_p$ es una norma en ℓ_p, gracias a la desigualdad de Minkowski, pasando al límite. Es un proceso rutinario comprobar que la nueva norma recién definida en ℓ_p es completa, proceso que una vez visto es fácilmente aplicable en otros muchos casos, y que se basa otra vez en la complitud de $\mathbb{K}$.

La mera intuición permite ahora adivinar quién debe ser la norma completa que podemos definir en el espacio vectorial

$$\ell_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty\}$$

Por supuesto,

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

Presentamos ahora dos subespacios destacados de ℓ_∞. Nos referimos al espacio c_0 de las sucesiones de escalares con límite cero y al espacio c de las sucesiones de escalares convergentes, por supuesto con la norma del supremo restringida. Es un ejercicio sencillo comprobar que ambos son cerrados en ℓ_∞ y, por tanto, tenemos dos nuevos espacios de Banach.

Aunque pudimos haber presentado antes un ejemplo de espacio normado no completo, hemos reservado ese privilegio al que clásicamente se considera prototipo en las presentaciones. Nos referimos al espacio de las sucesiones de escalares con un número finito de términos no nulos, que denotaremos por c_{00}, por supuesto con la norma del supremo. Otro de los deberes para el alumno es probar que c_{00} es denso en c_0.

Si en la definición de los espacios ℓ_p, para $1 \le p \le +\infty$, sustituimos $\mathbb{N}$ por un conjunto arbitrario no vacío Γ, obtenemos los espacios de Banach $\ell_p(\Gamma)$, $1 \le p \le +\infty$. La única salvedad necesaria es sustituir:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x(n)|^p < +\infty \text{ por } \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} |x(\gamma)|^p : F \subset \Gamma,\ F \text{ finito}\right\} < +\infty$$

iii) Si L es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, el espacio de las funciones definidas en L, continuas y de soporte compacto, con valores a $\mathbb{K}$, es un subespacio de $\ell_\infty(L)$, denotado por $C_{00}(L)$. Por supuesto, consideramos en $C_{00}(L)$ la norma $\|\cdot\|_\infty$.

El cierre de $C_{00}(L)$ en $\ell_\infty(L)$ es el espacio de Banach $C_0(L)$, de las funciones continuas que se anulan en el infinito. Si $x \in \ell_\infty(L)$ es una función continua, decimos que se anula en el infinito si el conjunto $\{t \in L : |x(t) \ge \varepsilon\}$ es compacto en L para todo $\varepsilon > 0$. (Supuesta conocida la compactificación por un punto, la notación se hace coherente).

Si ahora K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, los espacios $C_{00}(K)$ y $C_0(K)$ coinciden con el de todas las funciones continuas en K, denotado por $C(K)$.

En el caso de que $L = \mathbb{N}$ y K sea la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$ obtenemos $C_{00}(L) = c_{00}$, $C_0(L) = c_0$ y $C(K) = c$.

Conviene recordar que la convergencia de una sucesión en los espacios anteriores no es más que la convergencia uniforme, concepto que el alumno ya debe conocer desde, al menos, el segundo curso de grado.

iv) Si $1 \le p < +\infty$, denotaremos $\mathscr{L}_p[0,1]$ al espacio vectorial de todas las funciones medibles Lebesgue en $[0,1]$ tales que $\int_0^1 |f(t)|^p dt < +\infty$.

Al igual que hicimos con el hermano menor ℓ_p, definimos

$$\phi(f) = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

Gracias a la versión de la desigualdad de Minkowski para integrales, obtenida análogamente a la ya expuesta, ϕ verifica las condiciones ii) y iii) de la definición de norma, sin embargo, $\phi(f) = 0$ siempre que f sea nula c. p. d. (casi por doquier). Por tanto ϕ no es una norma en el espacio que estamos considerando.

No obstante, si identificamos las funciones que son iguales c. p. d. obtenemos inmediatamente que ϕ es una norma.

En consecuencia, notemos $L_p[0,1]$ al espacio vectorial cociente de $\mathscr{L}_p[0,1]$ por el subespacio

$$N = \left\{f \in \mathscr{L}_p[0,1] : f = 0 \text{ c. p. d.}\right\}.$$

Un elemento del cociente será una clase de la forma

$$f + N = \{f + g : g \in N\},$$

y es claro que el valor de ϕ sobre una clase no depende del representante elegido. Por tanto, haciendo $\|f + N\|_p = \phi(f)$, damos la bienvenida al espacio normado $L_p[0,1]$, que en la práctica se maneja como $\mathscr{L}_p[0,1]$, entendiendo las igualdades c. p. d.

La complitud de la norma $\|\cdot\|_p$ se puede hacer basándose en resultados clásicos de la integral de Lebesgue, más concretamente, en el lema de Fatou, y en el siguiente hecho, totalmente inocente que puede volver a ser un ejercicio para los alumnos: Un espacio normado X es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente es convergente en X. (Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X, decimos que la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es absolutamente convergente si la serie de escalares $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ converge). Recordar el criterio de comparación para series de escalares es toda la motivación que se necesita.

Diremos que una función $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ medible Lebesgue es *esencialmente acotada* si existe $M > 0$ tal que $\mu(\{t \in [0,1] : |g(t)| > M\}) = 0$, donde μ representa la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Al número M se le llama *cota esencial* de la función f.

Denotando $\mathscr{L}_\infty[0,1]$ al espacio vectorial de las funciones esencialmente acotadas en $[0,1]$, podemos definir el supremo esencial como

$$\operatorname{ess\,sup}(f) = \text{mín}\{M : M \text{ es cota esencial de } f\}.$$

Al igual que en los espacios $\mathscr{L}_p[0,1]$, el *supremo esencial* no es una norma, ya que $\operatorname{ess\,sup}(f) = 0$ si $f = 0$ c. p. d. Ya sabemos cómo arreglar esto: basta considerar el cociente de $\mathscr{L}_\infty[0,1]$ por el subespacio $N = \{f \in \mathscr{L}_\infty[0,1] : f = 0 \text{ c.p.d}\}$, que denotaremos $L_\infty[0,1]$, y definir $\|f + N\| = \operatorname{ess\,sup}(f)$ para $f + N \in L_\infty[0,1]$, es decir, otra vez lo que se hace es identificar las funciones que son iguales c. p. d.

La complitud de la norma $\|\cdot\|$ se desprende fácilmente de la definición de supremo esencial, puesto que la condición de Cauchy en $L_\infty[0,1]$ se convierte en la condición de Cauchy uniforme sobre un subconjunto de $[0,1]$ de medida de Lebesgue 1.

Conviene señalar que, dependiendo de los conocimientos de teoría de la medida, se puede optar por presentar los espacios $L_p(\mu)$ para cualquier medida μ, sin embargo, nos parece conveniente limitarnos a la integral de Lebesgue, que sí es conocida por el alumno con toda seguridad, al menos desde el segundo curso del grado.

v) Aunque ya hemos definido normas en espacios vectoriales cocientes, nos parece oportuno presentar el caso general.

Sea X un espacio normado y consideremos algún subespacio cerrado Y de X. Definiendo $\|x+Y\| = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$ (distancia de x a Y) para cada clase $x+Y$ en el cociente de X por Y, obtenemos una norma en dicho cociente X/Y. Además es fácil comprobar que si X es un espacio de Banach, entonces el cociente X/Y con la norma recién definida es también un espacio de Banach. Merece la pena presentar una especie de recíproco de este último hecho, que puede ser considerado como una pequeña incursión en las propiedades tipo tres espacios, y es el siguiente: Si X es un espacio normado con un subespacio completo Y, de tal forma que el cociente X/Y es completo, entonces X es también un espacio de Banach.

Quizá merezca la pena decir que si se parte de un espacio vectorial X con una seminorma, (concepto que aunque no definido explícitamente, encuentra dos ejemplos en la función ϕ o en el supremo esencial definidos en el punto anterior), y se considera como Y el subespacio formado por los elementos de X sobre los que la seminorma se anula, el cociente X/Y se dota de estructura de espacio normado de igual forma a como lo hicimos en el párrafo anterior. Este proceso fue el que seguimos para presentar los espacios $L_p[0,1]$.

vi) Pasamos ahora a presentar el espacio producto de espacios normados. Consideremos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $(n \in \mathbb{N})$ espacios normados y denotamos $\|\cdot\|$ a la norma de todos ellos. En el espacio vectorial producto $\Pi_{i=1}^n X_i$ podemos definir para cada $1 \le p \le \infty$:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \|(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|)\|_p,$$

obteniendo una nueva norma. No fue más que esto lo que hicimos para definir las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{K}^n$. De hecho para cada $1 \le p \le +\infty$, obtenemos una norma en el producto $\Pi_{i=1}^n X_i$.

No conlleva dificultad alguna comprobar que el producto, con cualquiera de las normas definidas, es un espacio de Banach si, y sólo si, cada X_i lo es.

vii) Para cerrar esta lista de ejemplos, nos parece oportuno decir que la estructura algebraica de un espacio vectorial no debe satisfacer ninguna propiedad especial para poder definir una norma. En efecto, si X es un espacio vectorial y $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base de X, cualquier elemento $x \in X$ se expresa, de forma única, como combinación lineal de un subconjunto finito de la base: digamos $x = \sum_{i=1}^n t_i e_{\lambda_i}$. Podemos entonces definir, por ejemplo $\|x\| = \sum_{i=1}^n |t_i|$, obteniendo así una norma en X.

La lista de detalles a comprobar en los ejemplos presentados puede servir de fuente para los primeros ejercicios de los alumnos, así como una primera toma de contacto.

1.2. Continuidad de aplicaciones lineales

Pasamos ahora a estudiar el segundo ingrediente básico de un curso de Análisis Funcional. Nos referimos a las aplicaciones lineales continuas entre espacios normados.

El siguiente resultado, cuya demostración no tiene comentario, caracteriza la continuidad de una aplicación lineal.

Proposición 1.2. *Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T es continua en 0.*

ii) *Existe una constante $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \le M\|x\|$, $\forall x \in X$.*

iii) *T es Lipschitziana, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \le C\|x - y\|$, $\forall x, y \in X$. (Por tanto T es continua en todo punto).*

iv) *$T(B_X)$ es un subconjunto acotado de Y.*

v) *$T(A)$ es un subconjunto acotado de Y, para cualquier subconjunto acotado A de X.*

Por tanto, los conceptos de continuidad, continuidad uniforme y lipschitzianidad coinciden para aplicaciones lineales.

Diremos que dos normas en un espacio vectorial X son *equivalentes* si generan la misma topología en X. Como consecuencia de la caracterización anterior obtenemos la siguiente equivalencia.

Corolario 1.3. *Sea X un espacio vectorial y consideremos $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dos normas en X. Entonces dichas normas son equivalentes si, y sólo si, existen dos constantes positivas m y M tales que*

$$m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Como aplicación, obsérvese que todas las normas definidas en $\mathbb{K}^n$, hasta el momento, son equivalentes, según se desprende de las desigualdades obvias:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty. \quad x \in \mathbb{K}^n,\ 1 \le p < +\infty.$$

Igualmente se obtiene la equivalencia entre las normas anteriores, cuando son consideradas para dotar de estructura de espacio normado a un producto de espacios normados.

Para dos espacios normados X, Y denotaremos por $L(X, Y)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de X en Y, también llamado espacio de *operadores*. Es inmediato que definiendo,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\}$$

se obtiene una norma en $L(X, Y)$ que llamaremos norma de operadores. Debe ser ya una rutina para los alumnos comprobar la complitud de dicha norma, siempre que Y sea completo, obteniendo así un nuevo espacio de Banach. Además es fácil obtener las siguientes expresiones equivalentes de la norma recién definida:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}\\ &= \min\{M > 0 : \|T(x)\| \le M\|x\|\ \forall x \in X\}.\end{aligned}$$

Los elementos del espacio vectorial $L(X,Y)$ se pueden componer con los de $L(Y,Z)$, si Z es otro espacio normado. Dicha composición nos da la estructura de álgebra en $L(X,X)$, que por simplicidad notaremos $L(X)$, si $X = Y = Z$. Pues bien, la buena avenencia de la composición con la norma de operadores se desprende de la desigualdad inmediata $\|S \circ T\| \leq \|S\|\,\|T\|$, válida para $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$.

Como consecuencia, otra vez de la proposición 1.2, toda aplicación lineal continua entre espacios normados es Lipschitziana y, por tanto, uniformemente continua, lo que nos da la posibilidad de extender aplicaciones lineales continuas, como muestra el siguiente hecho.

Corolario 1.4. *Sean X un espacio normado, Y un espacio de Banach y M un subespacio denso en X. Si $T \in L(M,Y)$, entonces existe $\overline{T} \in L(X,Y)$, única aplicación lineal y continua, extendiendo a T, esto es, $\overline{T}(m) = T(m), \quad \forall m \in M$.*

Introducimos ahora dos conceptos de «igualdad» naturales entre espacios normados.

Diremos que dos espacios normados, X, Y, son *isomorfos* si existe $T \in L(X,Y)$ tal que T es biyectiva y su inversa es continua. Al operador T lo llamaremos *isomorfismo*. También diremos que X e Y son *isométricos* si además de ser isomorfos, el isomorfismo T es también una *isometría*, esto es $\|T(x)\| = \|x\|$ para cualquier $x \in X$. Obsérvese que, como consecuencia de 1.2, una aplicación lineal T de X en Y es un isomorfismo entre X y su imagen si, y sólo si, existen dos constantes positivas M, m tales que:

$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Con esta terminología, el corolario anterior nos dice que $L(M,Y)$ y $L(X,Y)$ son espacios de Banach isométricos.

Si queremos justificar categóricamente el concepto de isomorfismo, recién definido entre espacios normados, estamos obligados a decir que un *homomorfismo* entre dos objetos X, Y de la categoría de los espacios normados ha de ser un operador $T \in L(X,Y)$, que además es abierto en su imagen, esto es, lleva abiertos de X en abiertos de $T(X)$. Así, si T es un homomorfismo, $X/\operatorname{Ker}(T)$ y $T(X)$ serán espacios normados isomorfos, mediante el isomorfismo $\overline{T}(x + \operatorname{Ker}(T)) = T(x)$. (Por supuesto, estamos considerando la norma cociente de la de X en $X/\operatorname{Ker}(T)$ y la restringida de Y en $T(X)$). Se generaliza así el primer teorema de isomorfía de espacios vectoriales, familiar para los alumnos.

Particularizamos el estudio hasta ahora hecho del espacio de operadores $L(X,Y)$, cuando $Y = \mathbb{K}$, introduciendo el espacio dual.

Si X es un espacio normado, llamaremos espacio *dual* o *dual topológico* de X, y lo denotaremos X^*, al espacio de Banach $L(X,\mathbb{K})$. De esta forma, X^* es un subespacio del dual algebraico de X, denotado por $X^\sharp$, que no es más que el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{K}$, también llamadas *funcionales lineales*.

Es sabido que dos funcionales son linealmente dependientes si, y sólo si, sus núcleos coinciden. Por tanto, un funcional está determinado, salvo múltiplos escalares, por su núcleo. Recogemos ahora un hecho exclusivo de los funcionales, donde el núcleo juega un papel protagonista.

Proposición 1.5. *Sea X un espacio normado y f un funcional en X. Entonces son equivalentes:*

i) f *es un homomorfismo (de espacios normados).*

ii) f *es continua.*

iii) $\mathrm{Ker}(f)$ *es cerrado.*

Las dos implicaciones hacia abajo son inmediatas. Para la otra implicación basta observar que un funcional siempre es una aplicación abierta sobre su imagen, que es $\{0\}$ si el funcional es idénticamente nulo y $\mathbb{K}$ en caso contrario. Por otro lado, la continuidad de f se deduce fácilmente del hecho de que el núcleo sea cerrado.

El siguiente enunciado generaliza la expresión familiar de la distancia de un punto a un plano de ℓ_2^3.

Proposición 1.6. *Sea X un espacio normado y $f \in X^*$ no idénticamente nulo. Si $x \in X$, entonces*

$$\mathrm{dist}\big(x, \mathrm{Ker}(f)\big) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Si consideramos un espacio normado complejo X, podemos también ver a X como espacio real, olvidándonos de la estructura compleja. Denotaremos a este espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$. Ahora nos podemos preguntar sobre la relación existente entre los espacios reales $(X_{\mathbb{R}})^*$ y $(X^*)_{\mathbb{R}}$. El siguiente hecho nos dice, como no podía ser de otra forma, que ambos espacios son el mismo.

Proposición 1.7. *Sea X un espacio normado complejo. Entonces la aplicación de $(X^*)_{\mathbb{R}}$ en $(X_{\mathbb{R}})^*$, que a cada f le hace corresponder su parte real Re f, es una biyección $(\mathbb{R}-)$lineal isométrica.*

Aunque el estudio que hagamos del espacio dual carece de contenido, por ahora, obsérvese que hasta el momento no podemos probar que $X^* \neq 0$ para un espacio normado arbitrario X, nos parece conveniente acabar este tema identificando los duales de ciertos espacios de Banach clásicos, dada su elementalidad.

Proposición 1.8. *Sean Γ un conjunto no vacío, $p \geq 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (entendiendo que $q = \infty$ si $p = 1$). Entonces la aplicación $\Phi : \ell_q(\Gamma) \longrightarrow \ell_p(\Gamma)^*$ definida por*

$$\Phi(y)(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x(\gamma)y(\gamma), \ x \in \ell_p(\Gamma), y \in \ell_q(\Gamma),$$

es una isometría sobreyectiva.

Proposición 1.9. *Las aplicaciones $\Phi\colon \ell_1 \longrightarrow c_0^*$ y $\Psi\colon \ell_1 \longrightarrow c^*$ definidas por:*

$$\Phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)y(n), \ x \in c_0, y \in \ell_1,$$

$$\Psi(y)(x) = y(1) \lim_{n\to+\infty} x(n) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)y(n+1), \ x \in c, y \in \ell_1$$

son ambas isometrías sobreyectivas.

Teorema 1.10 (Representación de Riesz)**.** *Sean $p \geq 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (entendiendo que $q = \infty$ si $p = 1$). Entonces la aplicación $\Phi\colon L_q[0,1] \longrightarrow L_p[0,1]^*$ definida por:*

$$\Phi(g+N)(f+N) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,\ f \in \mathscr{L}_p[0,1], g \in \mathscr{L}_q[0,1],$$

es una isometría sobreyectiva.

Dependiendo de los conocimientos de los alumnos sobre Teoría de la Medida, podremos optar por presentar el dual de los espacios $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$. En el caso de que $1 < p < +\infty$, dicha identificación se puede hacer para medidas arbitrarias, con muy pocos conocimientos de la Teoría de la Medida. Si $p = 1$ ó $p = \infty$, es preciso adentrarse más en el mundo de las medidas, por lo que hemos elaborado un apéndice sobre ello, para satisfacer la curiosidad de algún alumno especialmente interesado. El mismo comentario merece la identificación del dual del espacio $C_0(L)$, para un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff L, que también queda presentado en dicho apéndice.

1.3. Espacios normados de dimensión finita

Nos ocuparemos en este tema del estudio particular de los espacios normados más sencillos que conocemos, los de dimensión finita. Conviene llamar la atención sobre el hecho de que todas las normas consideradas hasta el momento en $\mathbb{K}^n$ han resultado ser equivalentes y generan la topología usual en $\mathbb{K}^n$.

Comenzamos por aprovechar la continuidad de la suma y el producto por escalares en cualquier espacio normado para obtener el siguiente hecho.

Lema 1.11. *Toda aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$, con la topología usual, en cualquier espacio normado es continua.*

El caso $n = 1$ del lema anterior no es más que la continuidad del producto por escalares en cualquier espacio normado. Se concluye con una sencilla inducción, en la que se vuelve a utilizar la continuidad del producto por escalares, así como la continuidad de la suma de vectores en cualquier espacio normado.

Teorema 1.12 (Tihonov)**.** *Sea X un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Entonces toda biyección lineal de $\mathbb{K}^n$ en X es un isomorfismo (considerando la topología usual en $\mathbb{K}^n$ y la de la norma en X).*

Para su demostración, consideramos $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow X$ una biyección lineal. El lema anterior nos da la continuidad de f, por tanto es suficiente probar que f es abierta. Para ello, dada la linelidad de f, basta ver que el origen del espacio vectorial X es un punto interior del conjunto $f(B)$, donde $B = B_{\ell_2^n}$.

Como $S = S_{\ell_2^n}$ es compacto en $\mathbb{K}^n$, la continuidad de f nos dice que $f(S)$ es compacto y, por tanto, cerrado en X. Dado que $0 \notin f(S)$, por la inyectividad de f, obtenemos un $\delta > 0$ tal que $\delta B_X \cap f(S) = \emptyset$. Concluiremos viendo que $\delta B_X \subset f(B)$.

En efecto, si $x \in \delta B_X \setminus f(B)$, encontramos $z \in \mathbb{K}^n$, con $f(z) = x$ y $\|z\|_2 > 1$. Entonces $f(\frac{z}{\|z\|_2}) \in f(S) \cap \delta B_X$, contradiciendo el hecho de que dicha intersección es vacía.

Destacamos a continuación una serie de consecuencias importantes del teorema anterior.

Corolario 1.13. *i) Si X es un espacio normado de dimensión finita, toda aplicación lineal de X en otro espacio normado Y es continua.*

ii) Toda biyección lineal entre dos espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo. En consecuencia, dos espacios normados de dimensión finita son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.

iii) Todas las normas sobre un mismo espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

iv) Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

v) Todo subespacio finito dimensional de un espacio normado es cerrado.

vi) Un subconjunto de un espacio normado de dimensión finita es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.

Como muestra de la exclusividad, para los espacios de dimensión finita, del resultado anterior, mostraremos que en cualquier espacio normado de dimensión infinita se pueden definir funcionales no continuos.

Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Existe entonces $\{e_n\}$, sucesión de vectores linealmente independientes en X. Sea B una base algebraica de X, conteniendo la sucesión $\{e_n\}$, y consideremos el funcional lineal $f\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$, definido sobre los elementos de B mediante:

$$f(e_n) = n\|e_n\|, n \in \mathbb{N} \text{ y } f(x) = 0 \text{ si } x \in B \setminus \{e_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $\lim_{n\to+\infty} \frac{e_n}{n\|e_n\|} = 0$, mientras que $f\left(\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que nos da la no continuidad de f.

Como consecuencia del corolario anterior, la bola unidad de un espacio normado finito dimensional es un subconjunto compacto o, si se quiere, la topología de la norma es localmente compacta. Cabe preguntarse si esta propiedad es también exclusiva de los espacios normados de dimensión finita. La respuesta es afirmativa y la recoge el clásico Teorema de Riesz.

Teorema 1.14 (Riesz)**.** *Sea X un espacio normado. Entonces son equivalentes:*

i) X es localmente compacto.

ii) B_X es compacto.

iii) X es finito dimensional.

Antes de comentar la demostración del teorema de Riesz, necesitamos un lema previo, que nos dice que en cualquier espacio normado se puede encontrar una dirección casi «perpendicular» a cualquier subespacio cerrado y propio.

Lema 1.15. *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado y propio ($M \neq X$) de X. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un vector $x_\varepsilon \in S_X$ verificando que $dist(x_\varepsilon, M) > 1 - \varepsilon$.*

Fijado $\varepsilon > 0$, la demostración del lema consiste en tomar un vector $x_0 \in X \setminus M$ y considerar $m_0 \in M$ tal que $\|x_0 - m_0\|$ esté suficientemente, dependiendo de ε, próximo a $dist(x_0, M)$. Bastará entonces hacer $x_\varepsilon = \frac{x_0 - m_0}{\|x_0 - m_0\|}$.

Para demostrar la implicación $ii) \Rightarrow iii)$ del teorema de Riesz, comenzaremos observando que la familia de bolas abiertas de centro arbitrario, y por ejemplo, radio $\frac{1}{2}$ forman un recubrimiento por abiertos de B_X. La compacidad de este último nos dice que existe un subrecubrimiento finito, digamos que por bolas abiertas centradas en los puntos $x_i, 1 \leq i \leq n$.

Sea M el subespacio vectorial de X generado por los $\{x_i\}$, que desde luego es finito dimensional, y por tanto cerrado, por 1.13. Podemos aplicar entonces el lema anterior para encontrar un vector $z \in S_X$ cuya distancia a cualquier x_i sea estrictamente mayor que $1/2$, llegando así a contradicción con la existencia del subrecubrimiento finito.

Conviene poner de manifiesto la distinta naturaleza de las afirmaciones del teorema de Riesz, mientras las dos primeras son topológicas, la tercera es puramente algebraica, filosofía de la que está impregnado lo que damos en llamar Análisis Funcional.

Como consecuencia inmediata, todo subconjunto compacto en un espacio normado de dimensión infinita ha de tener interior vacío, lo que nos expresa claramente que la abundancia de compactos, tal y como se entiende en el caso finito dimensional, es imposible cuando la dimensión es infinita. Es indiscutible la desventaja de este hecho, sin embargo no todo está perdido, ya que sí es posible tener conjuntos compactos, aún siendo la dimensión infinita, que no «vivan» en dimensión finita. En efecto, si X es un espacio normado infinito dimensional, podemos considerar una sucesión $\{e_n\}$ de vectores linealmente independientes en X con límite cero, como ya lo hicimos con anterioridad. Entonces, el conjunto $K = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es compacto y no «vive» en ningún subespacio finito dimensional.

Si los espacios finito dimensionales son los espacios normados más «pequeños», algebraicamente hablando, introducimos ahora los espacios normados separables, que se pueden entender como los más «pequeños», desde el punto de vista topológico o, si se quiere, el siguiente paso en «grandeza», después de los finito dimensionales.

Definición 1.16. Sea X un espacio normado. Diremos que X es *separable* si existe un subconjunto numerable $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$, donde $\overline{A}$ denota el cierre de A en la topología de la norma.

Por supuesto, los espacios normados finito dimensionales son separables. Precisamente, la separabilidad de $\mathbb{K}$ permite comprobar que un espacio normado X es separable si, y sólo si, existe un subconjunto numerable $A \subset X$ tal que $\overline{\text{lin}}(A) = X$, donde $\overline{\text{lin}}(A)$ denota el menor subespacio cerrado conteniendo al conjunto A.

Aparte de los espacios finito dimensionales, otros ejemplos de espacios separables son c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$, ya que el conjunto formado por las sucesiones con una única coordenada no nula e igual a 1 es numerable y genera cada uno de los espacios anteriores. Si al conjunto anterior le añadimos la sucesión constantemente igual a 1, deducimos la separabilidad del espacio c.

El primer ejemplo de espacio normado no separable es ℓ_∞. Para comprobarlo basta considerar para cada subconjunto no vacío $F \subset \mathbb{N}$, la sucesión $x_F \in \ell_\infty$ que toma el valor 1 en cada elemento de F y es nula en el resto. El conjunto formado por dichas sucesiones es no numerable y $\|x_F - x_S\|_\infty = 1$ siempre que $F \neq S$, lo que muestra la imposibilidad de la existencia de un conjunto numerable y denso en ℓ_∞. Análogamente se puede comprobar la no separabilidad de $L_\infty[0,1]$ y $\ell_p(\Gamma)$, $1 \le p \le +\infty$, si Γ no es numerable.

Por último, la separabilidad de los espacios $C[0,1]$ y $L_p[0,1]$, $1 \le p < +\infty$ se debe a la densidad de los polinomios (Teorema de Stone-Weierstrass) y de las funciones continuas, respectivamente.

Bibliografía

Por supuesto, en cualquier texto de Análisis Funcional se puede encontrar más de lo aquí expuesto. Si hubiera que elegir algunos al nivel de nuestro programa, optaríamos por [17], [20] y [25]. El teorema de Tihonov se puede ver, por ejemplo, en [24]. Un libro reciente, especialmente recomendado para toda la asignatura es [27].

2. El Teorema de Hahn-Banach

Este capítulo está dedicado a uno de los grandes principios del Análisis Funcional: el Teorema de Hahn-Banach. Motivamos su presentación con el problema de la extensión de funcionales continuos y dedicamos el primer tema a sacar el partido posible a la versión analítica del teorema, que nos permite un primer contacto con la teoría de dualidad.

Si bien el teorema de Hahn-Banach, junto con los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss que más adelante abordaremos, son considerados los tres grandes principios del Análisis Funcional, el que nos ocupa en este capítulo debe ser considerado como el más versátil. Dedicamos el segundo tema a justificar este comentario, dando aplicaciones del teorema de Hahn-Banach a otros campos, aplicación que en muchos casos es consecuencia de una reformulación equivalente del teorema. Entre las aplicaciones incluimos los teoremas de separación. Nos parece obligado comentar la equivalencia entre los puntos de vista analítico y geométrico, así como incluir alguna reformulación equivalente más, para justificar esa versatilidad a la que aludíamos. Aunque las aplicaciones del Teorema de Hahn-Banach abundarán en el resto de nuestro proyecto, destacamos, en este capítulo, la existencia de medias invariantes en todo semigrupo abeliano, como consecuencia de una reformulación equivalente de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach, el clásico teorema de los momentos cuya solución equivale al hecho de que todo funcional continuo admita una extensión equinórmica y el teorema de Markov-Kakutani, un resultado de la teoría del punto fijo que deducimos de los teoremas de separación.

2.1. Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

En la introducción al espacio dual, hecha en el capítulo anterior, se echó ya en falta un resultado que nos garantizara la no trivialidad del dual topológico (para el algebraico no hay problema) de un espacio normado no nulo. Hasta ahora, eso lo tenemos garantizado sólo para los espacios normados que hemos dado en llamar «clásicos», entre los que podemos incluir ya a los espacios finito dimensionales, gracias al teorema de Tihonov. Con esta motivación se puede ya plantear el problema de la extensión continua de un funcional continuo, definido sobre algún subespacio M al total X. Puesto que dicha continuidad equivale a que el funcional esté dominado por un múltiplo de la norma, el problema planteado consiste en partir de un tal funcional $f \in M^*$ y encontrar otro funcional $\overline{f}$ en X, extendiendo a f, y dominado todavía por un múltiplo de la norma.

Por su aplicación posterior, consideraremos el problema planteado sustituyendo la norma por funciones algo más generales.

Definición 2.1. Sea X un espacio vectorial. Un funcional *sublineal* en X es una función $p\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:

i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.

ii) $p(tx) = tp(x)$, $\forall t \geq 0, x \in X$.

Si además se verifica que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$, diremos que p es una *seminorma*.

Por supuesto, una norma, de hecho también una seminorma, es un funcional sublineal. Aún más, cualquier funcional $\mathbb{R}-$lineal es sublineal.

Teorema 2.2 (Hahn-Banach, versión analítica)**.** *Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio (vectorial) de X y f es un funcional en M verificando:*

$$\operatorname{Re} f(m) \leq p(m), \quad \forall m \in M,$$

entonces existe $\overline{f}$, funcional en X, tal que $\overline{f}(m) = f(m)$, $\forall m \in M$ y

$$\operatorname{Re} \overline{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Si, además, p es una seminorma entonces se tiene $|\overline{f}(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

En primer lugar, nos podemos limitar al caso real, según dijimos en 1.7. Por otro lado, intentemos plantear un problema un poco más sencillo, que de hecho será la pieza clave. Supongamos, por el momento, que el espacio vectorial cociente X/M es de dimensión 1. Entonces existe $u \in X$ tal que el espacio X se descompone como suma directa de M y $\mathbb{R}u$, que denota el espacio 1-dimensional generado por u.

En este ambiente, la definición del funcional $\overline{f}$ que queremos viene casi completamente obligada, pues lo que tenemos que hacer no es más que encontrar un escalar $r \in \mathbb{R}$ de forma que si definimos

$$\overline{f}(m + tu) = f(m) + tr, \quad \forall x = m + tu \in X,$$

se verifique la desigualdad $\overline{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X$.

En otras palabras, el problema es encontrar $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(m) + tr \leq p(m + tu), \quad \forall m \in M, \ t \in \mathbb{R}.$$

Utilizando las propiedades de p y la linealidad de f, no es difícil comprobar que la afirmación anterior, que se puede ver como un doble enunciado distinguiendo los casos $t > 0$ y $t < 0$, equivale a la existencia de $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(m) - p(m-u) \leq r \leq p(n+u) - f(n), \quad \forall m, n \in M$$

La veracidad de la última afirmación se debe a la linealidad de f, las propiedades de p y a la dominación de f por p en M, según la hipótesis, lo que resuelve el problema, siempre que el cociente X/M sea 1-dimensional.

Una inducción sencilla, permite resolver el problema en el caso de que la dimensión del cociente anterior sea finita, pero en caso contrario necesitamos una «inducción» un poco más sofisticada. La forma más elegante de resolverlo, que hoy en día es bien conocida, es aplicar el lema de Zorn.

Consideremos la familia $\mathscr{A}$ formada por los pares (N,g), donde N es un subespacio de X conteniendo a M y g es un funcional sobre N que extiende a f y está dominado por p. Definimos en $\mathscr{A}$ un orden parcial mediante:

$$(N_1,g_1) \leq (N_2,g_2) \text{ si } N_1 \subset N_2 \text{ y } g_2(n) = g_1(n), \quad \forall n \in N_1.$$

No es difícil comprobar que el orden parcial recién definido es inductivo, esto es, todo subconjunto totalmente ordenado en $\mathscr{A}$ tiene una cota superior en $\mathscr{A}$. El lema de Zorn nos dice, entonces, que podemos encontrar un elemento maximal $(Y,\overline{f}) \in \mathscr{A}$. De hecho, si aplicamos toda la potencia del lema de Zorn, obtenemos que todo elemento de $\mathscr{A}$ es menor o igual que algún maximal.

La maximalidad del par y el hecho de que el enunciado del teorema sea cierto cuando X/M es finito dimensional, obliga a que $Y = X$ y, por tanto, obtenemos lo que queríamos.

En el caso adicional de que p sea una seminorma, basta girar convenientemente el escalar $\operatorname{Re} f(x)$ para obtener que $|f(x)| \leq p(x)$.

Podemos extraer ya como consecuencia la no trivialidad del dual de un espacio normado no nulo.

Corolario 2.3. *Sea X un espacio normado. Si M es un subespacio de X y $f \in M^*$, entonces existe $\overline{f} \in X^*$ con $\|f\| = \|\overline{f}\|$ tal que $\overline{f}(m) = f(m)$ para todo $m \in M$.*

Podemos aplicar lo anterior en el caso de que M sea el subespacio generado por un vector no nulo, obteniendo:

Corolario 2.4. *Sea X un espacio normado no trivial. Entonces para cada $x \in X$ existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$.*

Es inmediato entonces que X^* *separa los puntos de* X, esto es, $x = 0$ siempre que $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$. Por otro lado obtenemos la siguiente expresión para la norma de X:

$$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\}$$

Obsérvese que la igualdad anterior nos da la norma de X, a partir del espacio dual. Precisamente, el objetivo del estudio de los espacios duales, teoría de dualidad, es obtener propiedades de un espacio a través de las de su dual y tenemos ya garantía de la no trivialidad de éste. Pretendemos entonces ilustrar cómo el nuevo ingrediente que nos ha aparecido nos va a permitir desarrollar la teoría de dualidad. Como consecuencia importante del teorema de Hahn-Banach obtenemos la descripción del dual de un subespacio. Para ello, introducimos notación.

Si M es un subespacio de un espacio normado X, llamaremos *polar* de M al subespacio de X^* dado por

$$M^0 = \{f \in X^* : f(m) = 0, \ \forall m \in M\}.$$

Es claro que M^0 es un subespacio cerrado de X^*

Corolario 2.5. *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Entonces la aplicación $\Phi\colon X^*/M^0 \longrightarrow M^*$ dada por $\Phi(g+M^0) = g_{|M}$, $\forall g + M^0 \in X^*/M^0$ es una isometría sobreyectiva.*

Por razones de complitud identificamos también el dual de un cociente, aunque para ello no se necesite el teorema de Hahn-Banach.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Entonces la aplicación $\Phi\colon (X/M)^* \longrightarrow M^0$ dada por $\Phi(g) = g \circ \pi$ para todo $g \in (X/M)^*$ es una isometría sobreyectiva, donde π es la proyección de X al cociente X/M.*

Otra consecuencia de 2.4, junto el corolario anterior, es la posibilidad de que el dual nos distinga cuándo un vector está en un subespacio cerrado.

Corolario 2.7. *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y x_0 un vector de X de forma que $dist(x_0, M) = \delta > 0$. Entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \delta$ y $f(m) = 0$ para todo $m \in M$.*

Aplicando ahora el hecho anterior, podemos decidir cuándo un subespacio es denso, en términos del dual.

Corolario 2.8. *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Entonces*

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^0} \ker f.$$

En particular, M es denso en X si, y sólo si, $M^0 = \{0\}$.

Deducimos ahora fácilmente otra ilustración de cómo algunas propiedades del dual pasan al espacio.

Corolario 2.9. *Sea X un espacio normado. Si X^* es separable, entonces X es separable.*

Otra consecuencia del teorema de Hahn-Banach, esta vez en el espacio de los operadores entre dos espacios normados es algo que quedó pendiente en el capítulo anterior.

Corolario 2.10. *Sean X e Y dos espacios normados. Si el espacio de operadores $L(X,Y)$ es completo entonces Y también es completo.*

Hasta el momento hemos obtenido una serie de consecuencias, con las que mostramos cómo el teorema de Hahn-Banach es útil para el desarrollo de la teoría de dualidad. Sin embargo, una teoría de dualidad que se precie no puede dejar de tocar el otro ingrediente básico, al margen de los espacios normados, que nos ocupa. A saber, las aplicaciones lineales continuas.

Definición 2.11. Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Denominaremos operador *adjunto* de T, denotado por T^* a la aplicación lineal y continua $T^*\colon Y^* \longrightarrow X^*$ dada por $T^*(g)(x) = g(T(x))$ para todo $g \in Y^*, x \in X$.

El teorema de Hahn-Banach permite comprobar que la adjunción de operadores, como aplicación de $L(X,Y)$ en $L(Y^*, X^*)$, es una isometría lineal. El siguiente enunciado, totalmente elemental recoge algunas propiedades más de los operadores adjuntos.

Proposición 2.12. *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.*

i) $\ker\ T^* = T(X)^0$

ii) Si Z es otro espacio normado y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

iii) Si T es un isomorfismo sobreyectivo, entonces también lo es T^*. Además, en tal caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

iv) Si T es una isometría sobreyectiva, entonces también lo es T^*.

Merece la pena observar que las implicaciones en iii) y iv) de la lista anterior no vuelven, en general. (Piénsese que el dual de un espacio y el de un subespacio denso de aquél son isométricos, mientras que los espacios no tienen por qué ser ni siquiera isomorfos). Sin embargo, la relación entre un operador y su adjunto es mejor en ambiente completo, como muestra la siguiente consecuencia de 2.8.

Corolario 2.13. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$.*

i) T es un isomorfismo sobreyectivo si, y sólo si, lo es su adjunto.

ii) T es una isometría sobreyectiva si, y sólo si, lo es su adjunto.

Si el operador del que partimos es un homomorfismo (de espacios normados), el teorema de Hahn-Banach nos ayuda a obtener más información de su adjunto.

Corolario 2.14. *Sean X, Y dos espacios normados y $T \in L(X,Y)$.*

i) Si T es un homomorfismo, entonces $T^*(Y^*) = (\ker\ T)^0$ y T^* vuelve a ser un homomorfismo.

ii) Si T es un monomorfismo, entonces T^* es un epimorfismo.

iii) Si T es un epimorfismo, entonces T^* es un monomorfismo.

En realidad, las dos últimas afirmaciones del resultado anterior son consecuencia de la primera y, aunque en la última de ellas no se precise el teorema de Hahn-Banach, nos parece que éste es su lugar apropiado.

Terminaremos el desarrollo de la teoría de dualidad que nos ha permitido el teorema de Hahn-Banach hasta el momento, introduciendo el bidual de un espacio normado.

Si X es un espacio normado, notaremos X^{**}, *bidual* de X, al espacio dual de X^*. Llamaremos *inyección canónica* de X a la aplicación $J_X\colon X \longrightarrow X^{**}$ dada por

$$J_X(x)(f) = f(x), \quad \forall x \in X, f \in X^*.$$

Es claro que J_X es lineal y continua. Aún más, el corolario 2.4, nos permite deducir que J_X es isométrica, pudiendo así identificar perfectamente X como un subespacio de X^{**}. (Conviene observar que el cierre de $J_X(X)$ en X^{**} nos proporciona la completación de X). Con esta nueva visión, si $T \in L(X,Y)$, para otro espacio normado Y, el operador $T^{**} \in L(X^{**}, Y^{**})$, segundo adjunto de T, no es más que una extensión equinórmica de éste.

Debe ser familiar, en ambiente algebraico, la sobreyectividad de J_X si X es un espacio vectorial finito-dimensional. Sin embargo, la sobreyectividad de la inyección canónica de un espacio normado obliga a su complitud. Daremos enseguida nombre a los espacios cuya inyección canónica es sobreyectiva.

Definición 2.15. Sea X un espacio de Banach. Diremos que X es *reflexivo* si J_X es sobreyectiva.

Una observación obligada es el carácter topológico de la reflexividad, esto es, la imagen por un isomorfismo de un espacio reflexivo vuelve a ser reflexivo.

Aparte de los espacios finito-dimensionales, otros ejemplos sencillos de espacios reflexivos son ℓ_p y $L_p[0,1]$ (si se considera oportuno $L_p(\mu)$) si $1 < p < +\infty$.

Algunos ejemplos de espacios de Banach no reflexivos, cuya comprobación no debe ofrecer dificultad son, c_0, c, ℓ_1.

Parece natural que la reflexividad de un espacio de Banach, concepto que en algún sentido nos da idea de «pequeñez», pase a sus subespacios cerrados. De hecho, como consecuencia de las identificaciones que conocemos para el dual de un subespacio y de un cociente, podemos obtener una caracterización que ya comentamos para la complitud.

Corolario 2.16. *Sea X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Entonces son equivalentes:*

i) *X es reflexivo.*

ii) *M y X/M son reflexivos.*

Como consecuencia, obtenemos nuevos ejemplos de espacios no reflexivos, sin necesidad de conocer la inyección canónica. Por ejemplo cualquier espacio de Banach que contenga un subespacio isomorfo a c_0, como es el caso de ℓ_∞ o $C[0,1]$, que de hecho contienen un subespacio isométrico a c_0.

Como ejemplo de caso «patológico», digamos que existen espacios de Banach isométricos a su bidual cuya inyección canónica no es sobreyectiva y, por tanto, no son reflexivos. Un estudio completo de este tipo de espacios puede verse en [41].

Con el fin de llamar la atención sobre una propiedad característica de los espacios reflexivos, introducimos la siguiente notación.

Si X es un espacio normado y $f \in X^*$, diremos que f *alcanza* su norma si existe $x \in S_X$ tal que $f(x) = \|f\|$, en definitiva, cuando el supremo que define la norma de f es, de hecho, un máximo.

La manera más familiar que se tiene para que f alcance su norma es asegurarse de que B_X es compacta, cosa que ocurre sólo si el espacio es finito-dimensional. Sin embargo, como consecuencia, otra vez de 2.4, se obtiene fácilmente lo que se quiere en ambiente reflexivo. (De hecho, el alumno tendrá oportunidad de ver más adelante que esto es debido a su esquema familiar, es decir, B_X sí que es compacta en una topología que no es la de la norma y en la que los funcionales del dual son continuos, la topología débil).

Corolario 2.17. *Sea X un espacio reflexivo. Entonces todo funcional de X^* alcanza su norma.*

No es tan obvio el recíproco del corolario anterior. El resultado que caracteriza la reflexividad a través del hecho de que todo funcional del dual alcance su norma no es ni mucho menos trivial y se debe a R. C. James. Lo presentamos a título informativo.

Teorema 2.18 (James)**.** *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, todo funcional de X^* alcanza su norma.*

2.2. Más teoremas de Hahn-Banach. Aplicaciones

Si el primer tema de este capítulo ha permitido una primera toma de contacto con la teoría de dualidad en espacios normados, gracias al teorema de Hahn-Banach; pretendemos en este segundo tema, como se quiere indicar en el título, mostrar la utilidad y variedad de aplicaciones de dicho teorema, que ha merecido ser denominado uno de los principios fundamentales del Análisis Funcional. De la cantidad de versiones equivalentes y aplicaciones del teorema de Hahn-Banach (véase [7], [11], [24], [30]) destacan las de carácter geométrico por su conocido uso y naturaleza diferente a la versión que hemos dado en el tema anterior. No obstante creemos que la filosofía debe ser considerar el teorema de Hahn-Banach como un «comodín», que dependiendo del problema a tratar, tiene aplicaciones de aspecto muy diverso, que a veces no son más que reformulaciones equivalentes.

Nuestra intención ahora es, por tanto, ilustrar el comentario anterior con algunas aplicaciones.

Subespacios complementados

Sea X un espacio normado. Como sabemos del álgebra lineal, si X es suma directa de los subespacios M y N tenemos una biyección lineal entre $M \times N$ y X que a cada par (m, n) lo lleva en la suma $m + n \in M \oplus N = X$. Desde un punto de vista topológico, parece deseable que, además, dicha biyección sea un isomorfismo de espacios normados, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.19. Sea X un espacio normado y M, N dos subespacios de X. Diremos que X es suma *topológico directa* de M y N cuando la biyección lineal que lleva cada par (m, n) en $m + n$ sea un isomorfismo (de espacios normados) entre $M \times N$ y X. Igualmente diremos que M está *complementado* en X cuando exista un subespacio N de forma que X sea suma topológico directa de M y N. A tal subespacio N se le llama *complemento topológico* de M en X.

Es claro que un subespacio complementado ha de ser necesariamente cerrado. Por otra parte, la siguiente caracterización no debe ofrecer dificultad alguna.

Proposición 2.20. *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Entonces equivalen:*

i) *M es un subespacio complementado en X.*

ii) *Existe P una proyección ($P^2 = P$) lineal y continua $P\colon X \longrightarrow X$ de forma que* $\ker P = M$.

iii) *Existe Q una proyección* ($Q^2 = Q$) *lineal y continua* $Q\colon X \longrightarrow X$ *de forma que* $Q(X) = M$.

Además, en tal caso, los posibles complementos topológicos de X son todos espacios normados isomorfos al cociente X/M.

Quizá sea el momento de presentar los primeros ejemplos de espacios no complementados.

Teorema 2.21 (Phillips)**.** *No existe ninguna aplicación lineal y continua de* ℓ_∞ *en* c_0 *cuya restricción a* c_0 *sea la identidad. Equivalentemente,* c_0 *no está complementado en* ℓ_∞.

La demostración puede verse en [25], cuyo ingenio reside esencialmente en el siguiente hecho.

Lema 2.22. *Existe una familia no numerable* $\{N_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *de subconjuntos infinitos de* $\mathbb{N}$, *tales que, para cualesquiera* $\lambda \neq \mu \in \Lambda$, *se tiene que* $N_\lambda \cap N_\mu$ *es finito.*

No obstante, el teorema de Hahn-Banach nos va a proporcionar los primeros ejemplos de espacios complementados, nos referimos a los finito dimensionales.

Proposición 2.23. *Todo subespacio finito dimensional de un espacio normado está complementado.*

Para su demostración, consideramos $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base en el subespacio finito dimensional M del espacio normado X. Entonces cada $m \in M$ se expresa de manera única en la forma

$$m = \sum_{k=1}^{n} g_k(m) e_k,$$

donde $g_1, \dots, g_n$ son elementos del dual algebraico $M^\sharp$. Entonces, el teorema de Tihonov nos dice que $g_i \in M^*$ para todo $1 \le i \le n$, gracias a la dimensión finita de M. El teorema de Hahn-Banach nos proporciona ahora funcionales $f_1, \dots, f_n \in X^*$ que extienden a $g_1, \dots, g_n$, respectivamente.

Definiendo, entonces

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k, \quad \forall x \in X,$$

se obtiene que P es una proyección lineal continua con $P(X) = M$ y, por tanto, M está complementado en X.

Aunque no sea consecuencia del teorema de Hahn-Banach, sino del teorema de Tihonov, los subespacios cerrados de codimensión finita de un espacio normado también están complementados.

El dual del espacio $C[0,1]$

Pretendemos, en este apartado, usar el teorema de Hahn-Banach para identificar, de alguna forma conocida, los elementos del dual de $C[0,1]$.

Recordamos que una función $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ es de *variación acotada* si

$$V(g) = \sup \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| < +\infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones del intervalo [0,1] de la forma $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Las integrales que aparecerán son Riemann-Stieltjes. El conocimiento que necesitamos aquí de esta integral es bastante elemental y queda cubierto sobradamente en [19], por otra parte las propiedades que utilizaremos de esta integral no son más que las análogas para la integral de Riemann, un caso particular bien conocido por el alumno.

Teorema 2.24. *Equivalen:*

i) $\Phi \in C[0,1]^*$.

ii) Existe una función de variación acotada $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que*

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)dg(t), \quad \forall f \in C[0,1].$$

Además, en tal caso, $\|\Phi\| = V(g)$.

La implicación $ii) \Rightarrow i)$ no es más que utilizar las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes, ya que si g es de variación acotada se tiene que

$$\left| \int_0^1 f(f)dg(t) \right| \leq \|f\|_\infty V(g),$$

de donde deducimos que $\Phi \in C[0,1]^*$ con $\|\Phi\| \leq V(g)$.

Para la implicación $i) \Rightarrow ii)$ consideraremos $C[0,1]$ como subespacio de $\ell_\infty[0,1]$, el espacio de Banach de las funciones acotadas en $[0,1]$ con la norma del supremo.

Si $\Phi \in C[0,1]^*$, por el teorema de Hahn-Banach podemos extender Φ a $\ell_\infty[0,1]$, es decir, existe $F \in \ell_\infty[0,1]^*$ tal que $F(f) = \Phi(f)$ para cada $f \in C[0,1]$ y con $\|F\| = \|\Phi\|$.

Si, para cada $t \in [0,1]$ denotamos por $\mathscr{X}_t$ a la función característica del intervalo $[0,t)$, podemos definir

$$g(t) = F(\mathscr{X}_t), \quad \forall t \in [0,1].$$

Nótese que la extensión F hace aquí su trabajo, puesto que Φ no está definida sobre $\mathscr{X}_t$.

La demostración se concentra entonces en probar que g es de variación acotada. Consideremos, pues, una partición del intervalo $[0,1]$ en la forma $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$ y sea λ_i un escalar de módulo uno de forma que

$$\lambda_i(g(t_i) - g(t_{i-1})) = |g(t_i) - g(t_{i-1})| \ \forall 1 \leq i \leq n.$$

Tenemos ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= F\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\mathscr{X}_{t_k} - \mathscr{X}_{t_{k-1}}) \right) \\
&\leq \|F\| \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\mathscr{X}_{t_k} - \mathscr{X}_{t_{k-1}}) \right\|_\infty = \|\Phi\|,
\end{aligned}$$

lo que nos dice que g es una función de variación acotada y $V(g) \leq \|\Phi\|$.

Si $f \in C[0,1]$ y definimos

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\mathscr{X}_{\frac{k}{n}} - \mathscr{X}_{\frac{k-1}{n}}\right)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$F(f_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = \int_0^1 f_n dg(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $\lim_{n\to+\infty} F(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n dg(t)$. Ahora la convergencia de $\{f_n\}$ a f en la norma $\|\cdot\|_\infty$ nos da que $F(f) = \int_0^1 f dg(t)$ y, por tanto, $\Phi(f) = \int_0^1 f dg(t)$, verificándose la desigualdad $V(g) \leq \|\Phi\|$.

Es obligado notar que la aplicación entre elementos de $C[0,1]^*$ y funciones de variación acotada, aunque lineal no es inyectiva, puesto que cualesquiera dos funciones de variación acotada g_1 y g_2 tales que

$$\int_0^1 f(t) dg_1(t) = \int_0^1 f(t) dg_2(t), \quad \forall f \in C[0,1],$$

obviamente corresponden al mismo elemento de $C[0,1]^*$.

Con el fin de arreglar este «desaguisado», es decir, el de tener una isometría lineal entre ambos espacios, se puede introducir la obvia relación de equivalencia en el espacio de las funciones de variación acotada, con la norma que nos da la variación, según se hace en [1], [29] o [38]. Un camino alternativo, es reconocer que es la medida dg determinada por g, y no la propia función g, la que se corresponde con el elemento de $C[0,1]^*$. Esta última vía, la adecuada en un curso de Teoría de la Medida, es la que permite generalizar el resultado anterior para el espacio $C_0(L)$, siendo L un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, resultado que será incluido en el apéndice.

El problema de los momentos

Una versión del problema clásico de los momentos plantea la siguiente pregunta: Dada una sucesión de números reales $\{c_n\}$, ¿cuándo existe una función $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada de forma que

$$\int_0^1 t^n df(t) = c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}?$$

Este problema tiene una interpretación probabilística. Esencialmente se pregunta: ¿Cuándo los momentos no centrales de una distribución de probabilidad determinan dicha distribución?

En vista de la identificación del punto anterior, el problema de los momentos se convierte en el siguiente problema de Análisis Funcional: dadas una familia de escalares $\{c_i\} \subset \mathbb{K}$ y una familia de vectores $\{x_i\} \subset X$, ¿cuándo existe $\Phi \in X^*$ tal que $\Phi(x_i) = c_i$ para cada i?

Como era de esperar, el problema no siempre va a tener respuesta positiva, sin embargo fue Helly quien consiguió dar una condición necesaria y suficiente.

Teorema 2.25. *Sean X un espacio normado, $\{c_i\} \subset \mathbb{K}$ una familia de escalares y $\{x_i\} \subset X$ una familia de vectores. Entonces equivalen:*

i) Existe $\Phi \in X^*$ tal que $\Phi(x_i) = c_i$ para todo i.

ii) Existe una constante positiva M verificando

$$\left|\sum_{i\in F} a_i c_i\right| \le M \left\|\sum_{i\in F} a_i x_i\right\|$$

para cada subconjunto finito de índices F y para cada $a_i \in \mathbb{K}$, $i \in F$.

Aparte de la motivación histórica, el enunciado anterior nos caracteriza de forma útil, cuándo un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas tiene solución.

Su demostración no debe ofrecer dificultad alguna a partir del teorema de Hahn-Banach. Por otra parte, parece obligado comentar la equivalencia entre este resultado y el corolario 2.3.

También podemos plantearnos el problema al revés, es decir, supongamos ahora que los datos son una sucesión de vectores $\{x_i^*\} \subset X^*$ y una sucesión de escalares $\{c_i\} \subset \mathbb{K}$. La pregunta será cuándo existe $x \in X$ tal que $x_i^*(x) = c_i$ para cada i. La respuesta a dicha pregunta, otra vez consecuencia del teorema de Hahn-Banach se debe otra vez a Helly. Damos aquí el enunciado de dicha respuesta, para cuya demostración, basada en argumentos de separación, de los que nos ocuparemos en este tema, se puede consultar en [30].

Teorema 2.26 (Helly)**.** *Sea X un espacio normado y $M > 0$. Supongamos que $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Entonces equivalen:*

i) Para cada ε existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $\|x_\varepsilon\| \le M + \varepsilon$ y $x_k^*(x_\varepsilon) = c_k$ para $1 \le k \le n$.

ii) $|\sum_{k=1}^n a_k c_k| \le M \|\sum_{k=1}^n a_k x_k^*\|$ para cualesquiera escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Por último, parece necesario comentar que este último resultado no es más que un caso particular del importante principio de reflexividad local, que no trataremos en este proyecto y que, informalmente hablando, introduce la importante observación de que, aunque no todos los espacios sean reflexivos, los subespacios finito-dimensionales de un espacio pueden identificarse con los de su bidual.

Límites de Banach y medias invariantes

Comenzamos por obtener un nuevo enunciado de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Si X es un espacio normado, llamaremos *semigrupo abeliano de aplicaciones lineales* en X a todo conjunto $\mathcal{G}$ formado por aplicaciones lineales de X en X verificando:

i) $T \circ S \in \mathcal{G}$ siempre que $T, S \in \mathcal{G}$.

ii) $T \circ S = S \circ T$, $\forall S, T \in \mathcal{G}$.

Teorema 2.27. *Sea X un espacio vectorial, M un subespacio de X, p un funcional sublineal en X, $\mathcal{G}$ un semigrupo abeliano de aplicaciones lineales tal que $T(M) \subset M$, $p(T(x)) \le p(x)$, $\forall x \in X, T \in \mathcal{G}$. Sea $f \in M^\sharp$ verificando*

$$f(T(m)) = f(m) \text{ y} \operatorname{Re} f(m) \le p(m), \quad \forall m \in M, T \in \mathcal{G}.$$

Entonces existe $\overline{f} \in X^\sharp$ extendiendo a f y verificando:

$$\overline{f}(T(x)) = \overline{f}(x) \ \text{ y } \ \operatorname{Re} \overline{f}(x) \le p(x), \quad \forall x \in X, T \in \mathcal{G}.$$

Además, si p es una seminorma, entonces $|\overline{f}(x)| \le p(x)$, $\forall x \in X$.

Al funcional $\overline{f}$ se le llama *extensión invariante* de f.

La demostración, no falta de ingenio, consiste en aplicar la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Para ello, por supuesto nos limitamos al caso real, se define una nueva aplicación $p_0\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p_0(x) = \operatorname{ínf}\left\{ \frac{p(T_1(x) + \ldots + T_n(x))}{n} : n \in \mathbb{N}, T_i \in \mathcal{G}, 1 \le i \le n \right\}.$$

Obviamente $p_0(x) \le p(x), \quad \forall x \in X$ y como p es sublineal $p(0) \ge 0$. Por otro lado, si $T \in \mathcal{G}$ tenemos

$$0 \le p(T(x)) + p(T(-x)) \le p(T(x)) + p(-x), \quad \forall x \in X,$$

lo que nos dice que el conjunto donde tomamos el ínfimo que define p_0 está minorado por $-p(-x)$ para cada $x \in X$. Además, de la sublinealidad de p es claro que

$$p_0(tx) = t p_0(x), \quad \forall x \in X, t \ge 0.$$

Nuestro objetivo ahora es comprobar la subaditividad de p_0. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existen entonces $T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m \in \mathcal{G}$ tales que

$$\frac{p[T_1(x) + \ldots + T_n(x)]}{n} < p_0(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\frac{p[S_1(y) + \ldots + S_m(y)]}{m} < p_0(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tendremos entonces

$$\begin{aligned} p_0(x+y) &\le \frac{p[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T_i S_j(x+y)]}{nm} \\ &\le \frac{\sum_{j=1}^m p[S_j(\sum_{i=1}^n T_i(x)/n)]}{m} + \frac{\sum_{i=1}^n p[T_i(\sum_{j=1}^m S_j(y)/m)]}{n} \\ &\le \frac{p[\sum_{i=1}^n T_i(x)]}{n} + \frac{p[\sum_{j=1}^m S_j(y)]}{m} \\ &< p_0(x) + p_0(y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la conmutatividad de $\mathcal{G}$ y el hecho de que

$$p(T(x)) \leq p(x), \quad \forall x \in X, T \in \mathcal{G}.$$

La arbitrariedad de ε nos dice entonces que p_0 es ya un funcional sublineal en X.

Del hecho de que $f(T(m)) = f(m)$ y la desigualdad $\operatorname{Re} f(m) \leq p(m)$ deducimos que $\operatorname{Re} f(m) \leq p_0(m), \quad \forall m \in M$.

Aplicamos ahora la versión analítica del teorema de Hahn-Banach para el nuevo funcional sublineal p_0 y obtenemos un funcional $\overline{f} \in X^\sharp$ que extiende a f y sigue estando dominado por p_0.

Las desigualdades

$$p_0(x - T(x)) \leq \frac{p[T(x) - T^{n+1}(x)]}{n} \leq \frac{p(x) + p(-x)}{n},$$

donde se ha vuelto a utilizar que $p(T(x)) \leq p(x)$, nos dicen que $p_0(x - T(x)) \leq 0$. Igualmente se tiene que $p_0(T(x) - x) \leq 0$. Pero la sublinealidad de p_0 hace que

$$p_0(x - T(x)) + p_0(T(x) - x) \geq p_0(0) \geq 0,$$

de donde $p_0(x - T(x)) = p_0(T(x) - x) = 0$ para cada $x \in X$. De las igualdades anteriores se deduce fácilmente que $\overline{f}$ es el funcional deseado.

En el caso de que p sea una seminorma la desigualdad $|\overline{f}(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$, se resuelve girando convenientemente el escalar $\operatorname{Re} \overline{f}(x)$.

Por supuesto, la versión analítica del teorema de Hahn-Banach se obtiene fácilmente del resultado anterior tomando como semigrupo de aplicaciones lineales el formado solamente por la aplicación identidad, quedando el resultado anterior como una formulación equivalente al teorema de Hahn-Banach.

La demostración del teorema anterior es hecha con detalle en [30], suponiendo además que $p(x) \geq 0$, $\forall x \in X$, una falta de precisión si se comparan las nimias diferencias en las pruebas. El enunciado que hemos presentado viene en [7] donde se atribuye a Silverman y Klee.

Ya en su libro [2], Banach deduce del teorema de Hahn-Banach la existencia de límites de Banach. Nosotros comenzaremos por obtener esta aplicación clásica a partir del teorema 2.27, viendo así cómo el enunciado del teorema de Hahn-Banach se puede adaptar, de forma equivalente, al problema que nos ocupa.

Empecemos motivando el problema de la existencia de los límites de Banach. La aplicación que a cada sucesión convergente le asigna su límite es una aplicación lineal y continua de norma uno, definida sobre el espacio de Banach c. El problema que nos planteamos es el siguiente:

¿Podemos definir un «límite» para sucesiones acotadas, no necesariamente convergentes?

La pregunta necesita, desde luego bastantes matizaciones. Por un «límite» para sucesiones acotadas entenderemos una aplicación lineal $f\colon \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifique las siguientes propiedades naturales del límite:

i) $f(x) = \lim_{n\to+\infty} x(n), \quad \forall x \in c.$

ii) f es continua con $\|f\| = 1$.

iii) $f(x) = f(x^k)$, $\forall x \in \ell_\infty$, donde para cada $x \in \ell_\infty$ definimos $x^k(n) = x(k+n)$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Un *límite de Banach* es un funcional lineal en ℓ_∞ verificando las tres propiedades anteriores. La existencia de un tal funcional verificando las dos primeras propiedades anteriores está garantizada, gracias a la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Para probar la existencia de los límites de Banach basta aplicar el teorema 2.27 tomando $X = \ell_\infty$, $M = c$, como f el funcional límite de c en $\mathbb{K}$ y $\mathcal{G} = \{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $T \in L(\ell_\infty)$ es el operador dado por $T(x)(n) = x(n+1)$, $\forall x \in \ell_\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Por supuesto, estamos considerando como funcional sublineal p la norma del supremo en ℓ_∞. Hemos obtenido entonces

Corolario 2.28. *Existen los límites de Banach, es decir, existe $f \in S_{\ell_\infty^*}$ tal que:*

i) $f(x) = \lim_{n\to+\infty} x(n)$, $\forall x \in c$.

ii) $f(x) = f(x^k)$, $\quad \forall x \in \ell_\infty, k \in \mathbb{N}$, *donde para cada $x \in \ell_\infty$ definimos $x^k(n) = x(k+n)$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.*

Si f es un límite de Banach y *1* denota la sucesión constantemente igual a uno de ℓ_∞, se obtiene para cada $x \in \ell_\infty$ con $0 \le x(n) \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ la desigualdad

$$|f(x) - 1| = |f(x - \mathit{1})| \le \|x - \mathbf{1}\|_\infty \le 1,$$

de donde podemos deducir, en caso real a partir de ahora, que $f(x) \ge 0$ para cada $x \in \ell_\infty$ con $x(n) \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se obtiene ahora fácilmente

$$\underline{\lim}\, x(n) \le f(x) \le \overline{\lim}\, x(n), \quad \forall x \in \ell_\infty. \tag{2.1}$$

De estas desigualdades volvemos a tener que un límite de Banach extiende al funcional límite. De hecho, en presencia de la propiedad ii) del corolario anterior, las desigualdades (2.1) equivalen a

$$\inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \le f(x) \le \sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}, \quad \forall x \in \ell_\infty.$$

Debe quedar claro entonces que la novedad que aporta la extensión que nos da el teorema de Hahn-Banach del funcional límite no es más que la propiedad ii) del corolario anterior. De hecho, una aplicación semejante a la que acabamos de hacer del teorema 2.27 nos da la existencia de un funcional $f \in S_{\ell_\infty^*}$ tal que extiende al funcional límite definido en c y además verifica, por ejemplo,

$$f(\overline{x}^k) = f(x), \quad \forall x \in \ell_\infty, k \in \mathbb{N},$$

donde, ahora, para cada $x \in \ell_\infty$ se define $\overline{x}^k(n) = x(2kn)$ para $k, n \in \mathbb{N}$.

Vamos a obtener una importante generalización del corolario anterior sustituyendo el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ por un semigrupo abeliano cualquiera.

Definición 2.29. Sea $(\Lambda,+)$ un semigrupo abeliano y consideremos el espacio de Banach $\ell_\infty(\Lambda)$ de las funciones acotadas de Λ en $\mathbb{R}$ con la norma del supremo. Para cada $\lambda\in\Lambda$ y cada $x\in\ell_\infty(\Lambda)$ definimos

$$x^\lambda(\mu)=x(\lambda+\mu),\quad \forall \mu\in\Lambda.$$

Una *media invariante* en Λ es un funcional $\mathbb{R}$−lineal $f\in\ell_\infty(\Lambda)^*$ verificando:

i) $\inf\{x(\lambda):\lambda\in\Lambda\}\le f(x)\le\sup\{x(\lambda):\lambda\in\Lambda\}$, $\forall x\in\ell_\infty(\Lambda)$.

ii) $f(x^\lambda)=f(x)$, $\forall x\in\ell_\infty(\Lambda)$, $\lambda\in\Lambda$.

Una nueva aplicación del teorema 2.27, como lo hicimos para obtener la existencia de límites de Banach, tomando como semigrupo abeliano de aplicaciones lineales $\mathscr{G}=\{T_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, donde para cada $\lambda\in\Lambda$ $T_\lambda(x)(\mu)=x(\lambda+\mu)$ para cada $\mu\in\Lambda$, nos permite deducir

Corolario 2.30. *Todo semigrupo abeliano admite una media invariante.*

Para su demostración, tenemos que considerar el subespacio de $\ell_\infty(\Lambda)$ formado por aquellos elementos que tienen «límite» en el infinito, es decir, definimos en Λ la topología discreta que será entonces localmente compacta y Hausdorff para tener el infinito como punto con el que compactificar y dar sentido a la existencia de límite en infinito. En definitiva, se extiende gracias al teorema 2.27 el funcional que a cada elemento $x\in\ell_\infty(\Lambda)$ con límite en infinito le hace corresponder dicho límite.

Los mismos comentarios que hicimos al obtener la existencia de límites de Banach se pueden hacer ahora sobre la positividad del funcional extensión obtenido.

Como consecuencia de la existencia de medias invariantes obtenemos medidas finitamente aditivas invariantes por traslaciones en cualquier semigrupo abeliano y en particular en $\mathbb{R}$, como muestra el siguiente hecho.

Corolario 2.31. *Sea* $(\Lambda,+)$ *un semigrupo abeliano. Entonces existe una función* $\mu\colon\mathscr{P}(\Lambda)\longrightarrow[0,1]$ *verificando:*

i) μ *es finitamente aditiva, es decir,*

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B),\quad \forall A,B\in\mathscr{P}(\Lambda),A\cap B=\emptyset.$$

ii) μ *es invariante por traslaciones, es decir,*

$$\mu(A+\lambda)=\mu(A),\quad \forall A\in\mathscr{P}(\Lambda),\lambda\in\Lambda.$$

iii) Si, de hecho, $(\Lambda,+)$ *es un grupo se puede conseguir que se verifique además*

$$\mu(-A)=\mu(A),\quad \forall A\in\mathscr{P}(\Lambda).$$

La demostración de i) y ii) consiste en tomar una media invariante en Λ y definir $\mu(A)=f(\mathscr{X}_A)$ para cada $A\subset\Lambda$, donde $\mathscr{X}_A$ denota la función característica del conjunto A. Para la afirmación iii), supongamos que $(\Lambda, +)$ es un grupo y sea g una media invariante en Λ. Podemos mejorar g definiendo

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(g(x) + g(x^-)\big), \quad \forall x \in \ell_\infty(\Lambda),$$

donde $x^-(\lambda) = x(-\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

Es claro ahora que f es una nueva media invariante en Λ verificando que $f(x^-) = f(x)$ para cada $x \in \ell_\infty(\Lambda)$. Si ahora definimos μ a partir de f, como lo hicimos anteriormente, obtenemos iii).

Versión geométrica

Comenzaremos por presentar los teoremas de separación, al estilo de 2.7. Hahn (1927) demostró una primera versión del teorema de Hahn-Banach, en el que aparecía una norma en vez de un funcional sublineal. La introducción de éste último por Banach (1929) fue la clave para obtener los teoremas de separación.

Comenzamos por encontrar funcionales sublineales. A modo de motivación, si uno intenta escribir la norma de un espacio normado X, conociendo sólo la bola unidad del mismo, se llega sin dificultad a la igualdad

$$\|x\| = \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda B_X\}.$$

Si en vez de una norma se tiene una seminorma, la igualdad es la misma.

La pregunta que nos planteamos es: ¿Qué propiedades debe reunir un subconjunto $A \subset X$ para que la expresión de la derecha, sustituyendo B_X por A, nos proporcione un funcional sublineal en X?

Si $A \subset X$ y damos por supuesta la buena definición del hipotético funcional sublineal dado por

$$p_A(x) = \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \ \forall x \in X,$$

es de comprobación inmediata que $p_A(tx) = tp_A(x)$ para cualesquiera $x \in X, t \geq 0$. Además, si A es convexo, se obtiene fácilmente que $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$, $\forall x, y \in X$.

Por tanto, para asegurarnos que p_A es un funcional sublineal basta la buena definición de éste, es decir, para cada $x \in X$ ha de existir $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.32. Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto no vacío. Decimos que A es *absorbente* si $\mathbb{R}^+ A = X$.

Con esta nueva terminología, hemos demostrado

Lema 2.33. *Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto absorbente y convexo de X. Entonces, la aplicación p_A de X en $\mathbb{R}$ dada por*

$$p_A(x) = \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \quad (x \in X),$$

es un funcional sublineal en X, llamado funcional de Minkowski *de A.*

Podemos ofrecer ya un teorema de separación general.

Teorema 2.34 (Separación en espacios vectoriales)**.** *Sea X un espacio vectorial y $A, B \subset X$ subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos. Si existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente, entonces existe $f \in X^\sharp \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Como siempre, en este tipo de resultados, nos podemos restringir al caso real. Para su demostración fijaremos un punto $b_0 \in B$ y consideraremos el conjunto $C = (A - a_0) - (B - b_0)$ que es obviamente convexo y absorbente, por contener a $A - a_0$. Además, $x_0 = b_0 - a_0 \notin C$, por ser los conjuntos A y B disjuntos.

Si p_C es el funcional de Minkowski de C, entonces p_C es un funcional sublineal en X y

$$\{x \in X : p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X : p_C(x) \leq 1\}.$$

Así, $p_C(x_0) \geq 1$. Consideramos ahora en el subespacio generado por x_0, $\mathbb{R}x_0$, el funcional dado por

$$g(\lambda x_0) = \lambda p_C(x_0), \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La versión analítica del teorema de Hahn-Banach nos permite encontrar un funcional $f \in X^\sharp$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x) \leq 1, \quad \forall x \in C, \ \operatorname{Re} f(x_0) \geq 1.$$

Es claro que f es el funcional deseado, tomando $\alpha = \sup\left\{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\right\}$.

En definitiva, los conjuntos A y B se «separan» mediante el hiperplano afín de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$, en el sentido de que dicho hiperplano deja a un lado al conjunto A y al otro a B.

Por supuesto, este tipo de separación entre conjuntos no convexos no es posible, en general. Aún más, si en el espacio vectorial c_{00} consideramos los conjuntos convexos y disjuntos $A = \{0\}$ y B el formado por las sucesiones cuya última coordenada no nula es estrictamente positiva, resulta imposible separarlos, al estilo del teorema anterior.

La siguiente consecuencia dejará claro que el teorema anterior no es más que una formulación equivalente de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Corolario 2.35. *Sea X un espacio vectorial real, $\Phi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, esto es, $\Phi(tx+(1-t)y) \leq t\Phi(x)+(1-t)\Phi(y)$ para cualesquiera $x, y \in X$, $t \in [0,1]$. Si M es un subespacio de X y $f \in M^\sharp$ son tales que*

$$f(m) \leq \Phi(m), \quad \forall m \in M,$$

entonces existe $\overline{f} \in X^\sharp$ tal que $\overline{f}(m) = f(m), \quad \forall m \in M$ y $\overline{f}(x) \leq \Phi(x), quad \forall x \in X$.

Su deducción del teorema anterior se hace a partir de los conjuntos

$$A = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \Phi(x) < t\}, \ B = \{(m, f(m)) : m \in M\},$$

que son la epigráfica de Φ y la gráfica de f, respectivamente. Es fácil comprobar que ambos conjuntos son convexos, no vacíos y disjuntos. Además $A - a_0$ es absorbente, para cualquier

$a_0 \in A$. Aplicando ahora el teorema anterior, se llega sin dificultad a obtener la tesis del corolario.

Por supuesto, cualquier funcional sublineal es una función convexa, con lo que a partir del corolario anterior, se obtiene la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

El teorema de separación que hemos obtenido es totalmente algebraico, al igual que la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. No obstante, el concepto de absorbencia, puede ser considerado como un concepto de «interior» algebraico, ya que, si el origen es un punto interior a un conjunto de un espacio normado, entonces dicho conjunto es absorbente. De esta observación obtenemos la primera consecuencia del teorema de separación en espacios normados.

Corolario 2.36. *Sea X un espacio normado y A y B dos subconjuntos no vacíos y convexos de X. Si $int(A) \neq \emptyset$ y $B \cap int(A) = \emptyset$, entonces existe $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Además $\operatorname{Re} f(x) < \alpha, \quad \forall x \in int(A)$.

Si ahora, en el resultado anterior, tomamos A cerrado y $B = \{x_0\}$ un punto de la frontera de A llegamos a:

Corolario 2.37 (Existencia de funcionales soporte)**.** *Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que*

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \text{máx}\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\}.$$

Observemos que el hiperplano de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$, donde $\alpha = \operatorname{Re} f(x_0)$, pasa por x_0 y deja a un lado al conjunto A. Dicha situación suele describirse diciendo que f *soporta* al conjunto A en el punto x_0.

Por último, si pretendemos separar dos conjuntos convexos no sólo disjuntos, sino que además su distancia sea estrictamente positiva, se puede añadir alguna perfección adicional.

Corolario 2.38. *Sea X un espacio normado y A y B dos subconjuntos convexos y no vacíos de X. Si $dist(A,B) = \delta > 0$, entonces existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que*

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \delta \leq \text{ínf} \operatorname{Re} f(B).$$

Es usual referirse a cualquiera de los tres últimos resultados utilizando la expresión de teorema de separación.

Como ejemplo de la utilidad de los resultados de separación anteriores, que creemos importantes por sí mismos incluso en espacios finito dimensionales, presentamos un teorema de punto fijo.

Teorema 2.39 (Markov-Kakutani)**.** *Sea X un espacio normado y K un subconjunto compacto, convexo y no vacío de X. Supongamos que $\mathcal{G}$ es una familia de funciones afines y continuas de X en X verificando:*

i) $T \circ S = S \circ T$, $\forall T, S \in \mathscr{G}$.

ii) $T(K) \subset K$, $\forall T \in \mathscr{G}$.

Entonces existe algún $x_0 \in K$ *punto fijo común a todos los elementos de* $\mathscr{G}$*, esto es,* $T(x_0) = x_0$, $\forall T \in \mathscr{G}$.

La dificultad de la demostración se centra en probar, por supuesto en caso real, la afirmación del teorema en el caso de que la familia $\mathscr{G}$ tenga un sólo elemento.

Supongamos por un momento que ése fuera el caso y denotemos por K_T al conjunto de puntos fijos de T en K, para cada $T \in \mathscr{G}$. Es claro, entonces, que K_T es un subconjunto compacto, convexo y no vacío de K, para cada $T \in \mathscr{G}$. De la conmutatividad de los elementos de $\mathscr{G}$, hipótesis i), obtenemos que $T(K_S) \subset K_S$ para cualesquiera $T, S \in \mathscr{G}$. Por tanto, según lo supuesto ha de existir un punto fijo común en K para cualesquiera dos aplicaciones $T, S \in \mathscr{G}$. De hecho, lo que obtenemos es que cualquier subfamilia finita de la familia $\{K_T : T \in \mathscr{G}\}$ tiene intersección no vacía, de donde se deduce, en virtud de la compacidad de K, la existencia de un punto fijo común a los elementos de $\mathscr{G}$ en K.

Tenemos entonces que probar la existencia de un punto fijo, en el compacto y convexo K, de la aplicación afín y continua $T\colon X \longrightarrow X$, sabiendo que $T(K) \subset K$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que no es así y denotemos $\Delta = \{(x, x) : x \in K\}$ a la diagonal de K. Si $G = \{(x, T(x)) : x \in K\}$ denota la gráfica de T, entonces Δ y G son subconjuntos compactos, convexos, no vacíos y disjuntos en $X \times X$. Apliquemos ahora el corolario anterior, encontrando $f_1, f_2 \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$f_1(x) + f_2(x) \leq \alpha < \beta \leq f_1(y) + f_2(T(y)), \quad \forall x, y \in K.$$

Entonces $f_2(T(x)) - f_2(x) \geq \beta - \alpha$ para cada $x \in K$. Haciendo ahora $x = Tx$ en la desigualdad anterior e iterando se obtiene que

$$f_2(T^n(x)) - f_2(x) \geq n(\beta - \alpha) \to +\infty \ (n \to +\infty),$$

para cada $x \in K$. Sin embargo, esto contradice la acotación de $f_2(K)$.

Bibliografía

La mayoría de lo que hemos presentado en este capítulo se puede encontrar en [24], [30], [11] y [35]. La demostración del teorema de Markov-Kakutani la hemos tomado de [42]. No hay que olvidar los obligados textos de [2] y [26] que contienen más aplicaciones del teorema de Hahn-Banach. No obstante, la monografía [7] nos parece obligada como texto de consulta.

3. Introducción a la teoría de dualidad

Pretendemos en este capítulo introducir la teoría de dualidad en espacios normados, que puede ser considerada como una prolongación del teorema de Hahn-Banach. Comenzamos definiendo la topología débil de un espacio normado y débil-$*$ de su dual, estudiando las analogías y diferencias existentes entre todas las topologías que hasta el momento podemos considerar en un espacio normado. La motivación para dicho estudio es la «escasez» de subconjuntos compactos para la topología de la norma.

Se presentan los teoremas de Dieudonné, Goldstine y Banach-Alaoglú, verdadera estrella de este capítulo, mostrando la «abundancia» de subconjuntos compactos, para la topología débil en espacios reflexivos y para la topología débil-$*$ en espacios duales. Como principales aplicaciones se obtienen el teorema de Milman-Pettis (convexidad uniforme implica reflexividad), la universalidad del espacio $C[0,1]$ para la clase de los espacios separables (teorema de Banach-Mazur), la complementación de c_0 (teorema de Sobczyk) en cualquier espacio de Banach separable y la complementación de ℓ_∞ en cualquier espacio de Banach.

Para finalizar, se presenta el teorema de Krein-Milman. Entre las posibles aplicaciones que mostrar a los alumnos están, entre otros, el principio de optimización de Bauer, el teorema de Banach-Stone o el teorema de Stone-Weierstrass.

3.1. Topologías débiles

Como ya debemos de tener claro, la topología de la norma en un espacio normado de dimensión infinita es demasiado grande, si queremos por ejemplo, la compacidad de su bola unidad. No obstante, como ya ha puesto de manifiesto el capítulo anterior, el conocimiento de algunas propiedades del dual ayudan al estudio del espacio y la definición del dual está hecha a partir de la topología de la norma en el primero, con lo que parece natural considerar topologías más pequeñas que la de la norma en las que los funcionales del dual sigan siendo continuos. Con este fin, la primera posibilidad es considerar la mínima topología en el espacio que hace continuos a los funcionales del dual. El esquema de topología inicial, un hecho bien conocido en topología general, nos permite entonces introducir esa nueva topología.

Definición 3.1. Sea X un espacio normado. Llamaremos topología débil en X, denotada por $w(X)$ o w si no hay lugar a la confusión, a la topología inicial en X determinada por los elementos de X^*.

De forma totalmente análoga, como obliga el nombre de este capítulo, debemos introducir una topología más en los espacios que sean duales.

Definición 3.2. Sea X un espacio normado. Llamaremos topología débil-$*$ en X^*, denotada por $w^*(X^*)$ o w^* si no hay lugar a la confusión, a la topología inicial en X^* determinada por los elementos de X que como sabemos, se pueden ver como elementos de X^{**}, en la forma que nos dice la inyección canónica J_X.

Las primeras propiedades que se desprenden de las definiciones anteriores nos dicen, entre otras cosas, que las topologías débil y débil-$*$ son más pequeñas que la de la norma, y que, en el caso de que tratemos con un espacio dual, la más pequeña de todas resulta ser la débil-$*$. Igualmente deducimos que un funcional lineal es continuo para la topología débil, si y sólo si, lo es para la topología de la norma.

Por supuesto, la buena avenencia entre las estructuras algebraica y topológica que consideremos en un espacio normado ha de ser obligada, esto es, sería deseable que las topologías recién definidas hicieran continuas a las aplicaciones suma y producto por escalar, al igual que le ocurre a la topología de la norma. Resumimos en el siguiente enunciado las propiedades básicas de las nuevas topologías, entre las que se encuentra la respuesta al deseo anterior.

Proposición 3.3. *Sea X un espacio normado. Entonces:*

i) Si $x_0 \in X$, los conjuntos de la forma

$$\left\{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n\right\},$$

forman una base de entornos de x_0 para la topología débil en X, variando $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in X^*$.

ii) Si $f_0 \in X^*$, los conjuntos de la forma

$$\{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

forman una base de entornos de f_0 para la topología débil-$*$ en X^*, variando $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$.

iii) Las topologías $w(X)$ y $w^*(X^*)$ son Hausdorff y hacen continuas a las aplicaciones suma y producto por escalar en X y X^*, respectivamente.

iv) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X y $x_0 \in X$, la sucesión converge a x_0 en X, con la topología débil, si, y sólo si,

$$\{f(x_n)\} \to f(x_0) \ \forall f \in X^*.$$

v) Si $\{f_n\}$ es una sucesión en X^* y $f_0 \in X^*$, la sucesión converge a f_0 en X^*, con la topología débil-$*$, si, y sólo si,

$$\{f_n(x)\} \to f_0(x) \ \forall x \in X.$$

El resultado anterior puede deducirse fácilmente de las propiedades básicas del esquema de topología inicial, que creemos debiera ser conocido. No obstante, aunque no nos parezca lo más natural, podríamos haber definido, ¿por qué no?, las topologías débiles a partir de las propiedades i) y ii) anteriores y deducir el resto con los conocimientos que tenemos hasta el momento. A modo de ejemplo, ilustramos esta última afirmación.

Obsérvese primeramente que los semiespacios abiertos, subconjuntos de la forma $\{x \in X : \operatorname{Re} f(x) < \alpha\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*$, forman una subbase de abiertos para la topología débil del espacio normado X.

Para obtener, por ejemplo, que la topología $w(X)$ es Hausdorff consideremos $x, y \in X$ con $x \neq y$. Gracias al teorema de Hahn-Banach obtenemos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*$ tales que $\operatorname{Re} f(x) < \alpha < \operatorname{Re} f(y)$. Es claro entonces que existen dos subconjuntos w-abiertos, semiespacios, que separan los puntos x e y. Igualmente, ahora sin necesidad del teorema de Hahn-Banach, se obtiene que la topología $w^*(X^*)$ es Hausdorff.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión en X^* que converge a $f_0 \in X^*$, para la topología w^* y $x \in X$, dado $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$A = \{f \in X^* : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon\}$$

es un w^*- abierto de X^* conteniendo f_0. Por tanto, para n suficientemente grande $f_n \in A$, de donde tenemos, para dicho n, $|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$. Es decir $\lim_n f_n(x) = f_0(x)$ para cada $x \in X$. La afirmación recíproca es igual de elemental, así como el análogo para la topología débil.

Una vez introducidas las topologías débiles es obligado preguntarse por su relación con la topología de la norma. Para empezar, no es difícil comprobar que las topologías débil y débil-$*$ de un espacio normado finito dimensional han de coincidir ambas con la topología de la norma. Si ahora partimos de un espacio normado en el que la topología débil coincide con la de la norma, y queremos probar que el espacio es finito dimensional, basta tener en cuenta una observación puramente algebraica: si la intersección de los núcleos de un número finito de funcionales está contenido en el núcleo de otro funcional, entonces éste último ha de ser combinación lineal de los anteriores.

Con las observaciones anteriores tendremos la siguiente equivalencia.

Proposición 3.4. *Sea X un espacio normado. Entonces la topología w, resp. w^* si X es dual, coincide con la topología de la norma si, y sólo si, X es finito dimensional.*

Así, en ambiente infinito dimensional, las topologías débiles que acabamos de introducir nunca coinciden con la topología de la norma. Por otro lado, es natural preguntarse si, al menos, provienen de una distancia. En el capítulo siguiente tendremos oportunidad de comprobar que eso no ocurre nunca para la topología w y «casi nunca» para la topología w^*.

Como sabemos, los únicos funcionales continuos para la topología débil sobre un espacio normado X son los elementos de X^*. Si ahora X es un espacio de Banach, los únicos funcionales w^*-continuos sobre X^* son los elementos de X, vistos como elementos de X^{**}, mediante la inyección canónica J_X.

El siguiente hecho cierra el análisis de las posibles igualdades que pueden darse entre las topologías que podemos considerar en un espacio normado.

Proposición 3.5. *Sea X un espacio de Banach dual. Entonces $w = w^*$ si, y sólo si, X es reflexivo.*

Conviene poner de manifiesto algunas diferencias concretas entre las topologías débiles y la de la norma. A modo de ilustración, obsérvese que el cierre en la topología débil de la esfera unidad S_X de un espacio normado infinito-dimensional, X, es la bola unidad B_X, al igual que para la topología débil-$*$ si X es un espacio dual. Para su comprobación basta tener en cuenta que los entornos de cero en la topología débil o débil-$*$ contienen subespacios de codimensión finita.

El siguiente enunciado, consecuencia inmediata de los teoremas de separación del capítulo anterior, pondrá de manifiesto una diferencia esencial entre las topologías débil y débil-$*$.

Proposición 3.6. *Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X. Entonces el cierre de A para la topología de la norma en X coincide con el cierre de A para la topología w. En particular, un subespacio Y de X es w-cerrado si, y sólo si, es cerrado para la topología de la norma en X.*

Obsérvese que, como consecuencia, un espacio normado es w-separable si, y sólo si, es separable para la topología de la norma, hecho que deja de ser cierto para la topología w^* de un espacio dual. Concretamente, es fácil comprobar que ℓ_∞ es w^*-separable y no es separable para la topología de la norma, como ya vimos en el primer capítulo.

Por comodidad, convendremos a partir de ahora que la topología considerada en un espacio normado será la de la norma, cuando no se explicite otra.

Para finalizar este tema general sobre topologías débiles conviene poner de manifiesto que, pese a las grandes diferencias existentes entre las topologías que hasta el momento podemos considerar en un espacio normado de dimensión infinita, todas ellas coinciden cuando se las restringe a un subconjunto compacto, como nos informa el siguiente hecho.

Proposición 3.7. *Sea X un espacio normado y K un subconjunto compacto de X (resp. de X^*). Entonces las topología débil sobre K (resp. débil-$*$) coincide con la de la norma en X (resp. X^*).*

El resultado anterior es una sencilla consecuencia del hecho de que dos topologías Hausdorff y compactas sobre un mismo conjunto coinciden si, y sólo si, son comparables.

3.2. El teorema del bipolar en espacios normados

Para un subespacio M de un espacio normado X habíamos definido el polar de M mediante

$$M^0 = \{f \in X^* : f(m) = 0,\ \forall m \in M\}.$$

Dualmente, podemos definir para un subespacio N de X^*, el *prepolar o polar en X* de N mediante

$$N_0 = \{x \in X : f(x) = 0,\ \forall f \in N\}.$$

Es inmediato comprobar que M^0 es un subespacio w^*−cerrado en X^* y que N_0 es un subespacio cerrado en X o equivalentemente w−cerrado.

Con esta notación el corolario 2.8 se puede reescribir en la forma

$$(M^0)_0 = \overline{M}^w = \overline{M},$$

para cada subespacio M de X.

Nos planteamos ahora la posibilidad de obtener la primera de las igualdades anteriores para un subespacio N de X^*, por supuesto intercambiando el orden de tomar polares y la topología w por la w^*, lo que sería un resultado dual del anterior.

Empezamos por obtener la versión w^* del corolario 2.8, que no es más que el concepto algebraico de separar puntos.

Proposición 3.8. *Sea X un espacio normado y N un subespacio de X^*. Entonces equivalen:*

i) $\overline{N}^{w^*} = X^*$.

ii) $\bigcap_{f\in N} \ker f = \{0\}$*, es decir, N* separa los puntos *de X.*

Como consecuencia, X^* es w^*-separable si, y sólo si, existe un subconjunto numerable de X^* que separa los puntos de X.

Obtenemos entonces el resultado anunciado.

Corolario 3.9 (Teorema del bipolar para espacios normados)**.** *Sea X un espacio normado y sean M y N subespacios de X y X^*, respectivamente. Entonces:*

i) $(M^0)_0 = \overline{M}^w$.

ii) $(N_0)^0 = \overline{N}^{w^*}$.

Aparte de informarnos cómo obtener, en términos del dual, el cierre de un subespacio para las topologías débiles, el corolario anterior describe perfectamente cómo se obtienen todos los subespacios cerrados para las topologías débiles correspondientes. En consecuencia, la operación de tomar polar es un antiisomorfismo de retículos entre los subespacios cerrados de X y los subespacios w^*-cerrados de X^*, para el orden parcial de la inclusión.

Parece evidente que una teoría de dualidad que se precie debería ser capaz de describir cuándo un espacio de Banach es dual de otro. Antes de entrar de lleno en esta cuestión, introducimos un hecho totalmente elemental.

Proposición 3.10 (Dixmier)**.** *Sea X un espacio normado. La aplicación*

$$P_X = J_{X^*} \circ J_X^* \colon X^{***} \longrightarrow X^{***},$$

es una proyección lineal continua tal que

$$\|P_X\| = 1,\ P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*), \ker P_X = J_X(X)^0.$$

En consecuencia, $X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^0$.

Como corolario inmediato tenemos que un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, X^* es reflexivo, hecho que faltaba en nuestro estudio de los espacios reflexivos.

Vayamos ya a la cuestión planteada anteriormente. Si Y es un espacio de Banach dual, digamos isomorfo a X^*, la proposición anterior nos garantiza la existencia de una proyección, no necesariamente de norma 1, de Y^{**} sobre Y cuyo núcleo es un polar y, por tanto, w^*-cerrado.

Recíprocamente, supongamos que P es una proyección lineal y continua de Y^{**} sobre Y con núcleo w^*-cerrado. El teorema del bipolar nos informa de que $\ker P = M^0$ para algún subespacio M de Y^*. Como ya sabemos ha de ser entonces Y isomorfo a M^*.

Hemos demostrado entonces

Teorema 3.11. *Sea Y un espacio de Banach. Entonces equivalen:*

i) Existe X espacio de Banach tal que Y es isomorfo a X^*.

ii) Existe una proyección lineal y continua de Y^{**} sobre Y con núcleo w^*-cerrado.

Además, si cambiamos isomorfo por isométrico, el resultado sigue siendo válido si se exige que la proyección sea de norma 1.

Podemos ilustrar el resultado anterior observando que c_0 no es isomorfo al dual de un espacio normado, aplicando el teorema de Phillips.

3.3. Los teoremas de Goldstine y Banach-Alaoglú

Hemos motivado la introducción de las topologías débiles a partir de la «escasez» de subconjuntos compactos en un espacio normado de dimensión infinita. Estamos, pues obligados a mostrar conjuntos compactos en «abundancia» para las topologías débiles, que será la finalidad de este tema. El primer paso será obtener el teorema de Goldstine que será crucial para la caracterización de la reflexividad a partir de la compacidad débil de la bola unidad de un espacio de Banach.

Como sabemos X es w^*-denso en X^{**} para cualquier espacio normado X. Gracias al teorema de Helly, presentado ya en el capítulo anterior, podemos mejorar la afirmación anterior.

Teorema 3.12 (Goldstine)**.** *Sea X un espacio normado. Entonces B_X es w^*-densa en $B_{X^{**}}$.*

Por supuesto, en dimensión infinita también se verifica que $\overline{S_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$, ya que S_X es débilmente densa en B_X y la topología w^* sobre X coincide con la w.

Pasamos ahora a dar algunas aplicaciones del teorema anterior. Empezamos introduciendo una propiedad geométrica que da idea de «redondez» de la bola unidad de un espacio normado.

Definición 3.13. Sea X un espacio normado. Se dice que X es *uniformemente convexo* cuando para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$ para cualesquiera $x, y \in S_X$ verificando $\|x + y\| > 2 - \delta$.

Intuitivamente, si el punto medio determinado por dos puntos de la esfera tiende estar en la esfera, entonces los puntos tienden a ser el mismo.

El hecho de que los espacios $L_p[0,1]$, $1 < p < +\infty$ sean uniformente convexos se debe a las *desigualdades de Clarkson* [9]:

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)\ \forall f, g \in L_p[0,1],\ p \in [2, +\infty[,$$

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{\frac{q}{p}} \ \forall f,g \in L_p[0,1],\ p \in]1,2].$$

El hecho de que las desigualdades anteriores sean válidas para los espacios $L_p(\mu)$, donde μ es una medida cualquiera puede también mostrar, si se quiere, la convexidad uniforme de dichos espacios para $p > 1$. Digamos que las desigualdades de Hanner [23], que no detallaremos, también permiten demostrar la convexidad uniforme de $L_p(\mu)$ para cualquier $p > 1$, obteniendo la dependencia exacta entre ε y δ en la definición de convexidad uniforme.

Ahora que tenemos ejemplificada la clase de los espacios uniformemente convexos podemos obtener la siguiente consecuencia del teorema de Goldstine.

Teorema 3.14 (Milman-Pettis)**.** *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Supuesto que X es un espacio de Banach uniformemente convexo y no reflexivo, empezaremos por tomar $x^{**} \in S_{X^{**}}$ con distancia positiva a la bola unidad de X. Llamemos ε a la mitad de dicha distancia para encontrar, por la convexidad uniforme de X, $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in S_X,\ \|x+y\| > 2-\delta \ \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon.$$

Sea ahora $x^* \in S_{X^*}$ de forma que $|x^{**}(x^*) - 1| < \frac{\delta}{2}$ y hagamos

$$U = \left\{ F \in X^{**} : |F(x^*) - 1| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Es claro que U es un w^*-entorno abierto de x^{**} en X^{**}. Si ahora $x \in S_X$ con $|x^*(x) - 1| < \frac{\delta}{2}$, entonces $x \in U$ y para cada $y \in S_X \cap U$ tenemos

$$\|x+y\| \geq |x^*(x+y)| = |2 + x^*(x) - 1 + x^*(y) - 1| > 2 - \delta.$$

De donde $\|x-y\| < \varepsilon$. Así pues,

$$U \cap S_X \subset x + \varepsilon B_{X^{**}}$$

y, por tanto,

$$U \cap B_{X^{**}} \subset x + \varepsilon B_{X^{**}},$$

ya que el último conjunto es w^*-cerrado y, por el teorema de Goldstine $B_X = \overline{S_X}^{w^*}$.

Tenemos entonces que $x^{**} \in x + \varepsilon B_{X^{**}}$ y, por tanto,

$$\|x^{**} - x\| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x^{**}, B_X),$$

una contradicción.

Como consecuencia del teorema de Milman-Pettis es posible la descripción del dual de $L_p(\mu)$ para una medida arbitraria μ y $1 < p < +\infty$. Para ello, si llamamos Φ a la aplicación de $L_q(\mu)$ $(p+q = pq)$ a $L_p(\mu)^*$ dada por $\Phi(g)(f) = \int fgd\mu$, es sencillo comprobar que Φ es una isometría lineal, con lo que basta ver la sobreyectividad. Para este objetivo, obsérvese que es suficiente comprobar que si $x^{**} \in L_p(\mu)^{**}$ verifica que $x^{**}(\Phi(g)) = 0$ para cada $g \in L_q(\mu)$, entonces $x^{**} = 0$, ya que en tal caso la imagen de Φ sería cerrada y densa en $L_p(\mu)^*$.

Supongamos que $x^{**}(\Phi(g)) = 0$ para cada $g \in L_q(\mu)$. Como $L_p(\mu)$ es reflexivo, por ser uniformemente convexo, existe $f \in L_p(\mu)$, cuya inyección canónica en $L_p(\mu)^{**}$ es x^{**}, de forma que $\Phi(g)(f) = 0$ para cada $g \in L_q(\mu)$. Evaluando la igualdad anterior para la función g definida como $f^{p/q}$, donde f es positiva, y como $-(-f)^{p/q}$ si f es negativa, se obtiene que f ha de ser nula casi por doquier, de donde $x^{**} = 0$, como se quería.

Con la ayuda del teorema Tichonov, esto es, el producto de espacios topológicos compactos es compacto para la topología producto, hecho bien conocido en topología general, podemos ya dar una idea de la «abundancia» de subconjuntos compactos para la topología débil-$*$ de un espacio de Banach dual.

Teorema 3.15 (Banach-Alaoglú)**.** *Si X es un espacio normado, entonces B_{X^*} es un subconjunto w^*-compacto de X^*. En consecuencia, todo subconjunto acotado y w^*-cerrado de un espacio de Banach dual es w^*-compacto.*

Por el teorema de Tichonov, el espacio topológico producto $[-1,1]^{B_X}$ es compacto. Así para comprobar el resultado anterior, basta demostrar que las restricciones de los elementos de B_{X^*} a B_X forman un subconjunto cerrado. Por supuesto no es restrictivo suponer el espacio X real.

Sea entonces F un elemento del espacio $[-1,1]^{B_X}$ que no es la restricción de un funcional de B_{X^*} a B_X. Han de existir entonces $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, \dots, x_n \in X$, con $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in B_X$ tales que

$$F(\sum_{i=1}^n t_i x_i) - \sum_{i=1}^n t_i F(x_i) \neq 0.$$

Podemos encontrar ahora $\varepsilon > 0$ tal que

$$G(\sum_{i=1}^n t_i x_i) - \sum_{i=1}^n t_i F(x_i) \neq 0,$$

siempre que $G \in [-1,1]^{B_X}$ verifique para cada $1 \le i \le n$:

$$\text{máx}\left\{ |(F-G)(x_i)|, \left|(F-G)(\sum_{i=1}^n t_i x_i)\right| \right\} < \varepsilon.$$

Se construye así un abierto U del espacio $[-1,1]^{B_X}$ que contiene F verificando que G no es la restricción de un funcional de B_{X^*} a B_X, para cada $G \in U$, de lo que se concluye la compacidad de B_{X^*} para la topología w^*.

Fue Banach en [2] quien demostró el resultado anterior en ambiente separable y se debe a Alaoglú el resultado en espacios no necesariamente separables.

Como aplicación del teorema de Banach-Alaoglú obtenemos, con la ayuda del teorema de Goldstine, la siguiente caracterización de los espacios de Banach reflexivos.

Corolario 3.16 (Dieudonné)**.** *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, B_X es w-compacta.*

Como ya anunciábamos en el capítulo anterior, el hecho de que todo funcional continuo en un espacio reflexivo alcance su norma responde, visto el corolario anterior, al esquema clásico de aplicación continua sobre un compacto.

Otra interesante aplicación del teorema de Banach-Alaoglú, permite ver a cada espacio de Banach dentro del espacio $C(K)$ para apropiado espacio topológico compacto y Hausdorff. Más concretamente

Corolario 3.17. *Sea X un espacio de Banach. Entonces existe K espacio topológico compacto y Hausdorff de forma que X es isométrico a un subespacio de $C(K)$.*

La comprobación consiste en tomar como K la bola unidad B_{X^*} con la topología w^* y tener en cuenta el carácter isométrico de la inyección canónica J_X.

Como veremos en el capítulo siguiente la topología débil de un espacio Banach infinito-dimensional nunca es metrizable e igual le ocurre a la débil-$*$ sobre su dual. No obstante, con lo hecho hasta ahora, podemos caracterizar la metrizabilidad para dichas topologías de los subconjuntos acotados.

Proposición 3.18. *Sea X un espacio normado.*

i) B_X es w-metrizable si, y sólo si, X^* es separable.

ii) B_{X^*} es w^*-metrizable si, y sólo si, X es separable.

Para la primera afirmación empecemos suponiendo que B_X es w-metrizable y elijamos $\{U_n\}$ una base numerable de entornos de cero en B_X para la topología débil. pongamos, por ejemplo,

$$U_n = \left\{x \in B_X : |x^*(x)| < \varepsilon_n, \quad \forall x^* \in A_n\right\},$$

donde $\varepsilon_n > 0$ y A_n es un subconjunto finito de X^*.

Haciendo $A = \cup_n A_n$, pretendemos ver que $X^* = \overline{\text{lin}}(A)$. De no ser así, encontraríamos $x_0^* \in X^*$ tal que $d = \text{dist}(x_0^*, \text{lin}(A)) > 0$. Aplicando ahora el teorema de separación de Hahn-Banach, se encuentra $x^{**} \in X^{**}$, con $\|x^{**}\| = \frac{1}{d}$ tal que $x^{**}(\text{lin}(A)) = 0$ y $x^{**}(x_0^*) = 1$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_n \subset V := \left\{x \in B_X : |x_0^*(x)| < \frac{d}{2}\right\},$$

cuya existencia está asegurada por hipótesis.

Por el teorema de Golsdstine existe $x_1 \in B_X$ tal que para cada $x^* \in A_n$ se verifica:

$$|d - x_0^*(x_1)| = |dx^{**}(x_0^*) - x_0^*(x_1)| < \frac{d}{2}, \ |x^*(x_1)| = |dx^{**}(x^*) - x^*(x_1)| < \varepsilon_n.$$

Entonces $|x_0^*(x_1)| > \frac{d}{2}$ y $|x^*(x_1)| < \varepsilon_n$ para cada $x^* \in A_n$, lo que nos dice que $x_1 \in U_n$ y $x_1 \notin V$, una contradicción.

Supongamos ahora que X^* es separable y elijamos $\{x_i^*\}$ una sucesión densa en S_{X^*}. Es ahora fácil comprobar que, definiendo,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|f_i(x-y)|}{2^i} \ \forall x, y \in B_X,$$

la topología débil de B_X está generada por la distancia d.

Para la segunda afirmación, si B_{X^*} es w^*-metrizable, sabemos que X es isométrico a un subespacio de $C(K)$, donde $K = (B_{X^*}, w^*)$ que es un espacio topológico compacto, por el teorema de Banach-Alaoglú, Hausdorff y metrizable, por hipótesis. En este ambiente,

$C(K)$ es separable y, por tanto, también lo es X. El hecho de que $C(K)$ es separable si K es metrizable se debe a que K es imagen continua del conjunto de Cantor (ver [25]) y el espacio $C[0,1]$ es separable.

Por otra parte, si X es separable, podemos definir una distancia d en B_{X^*} al igual que hicimos para comprobar la primera afirmación. El hecho de que dicha distancia genere la topología débil-* de B_{X^*} no es más que la continuidad de la aplicación identidad de (B_{X^*}, d) en (B_{X^*}, w^*), fácilmente comprobable. La continuidad en el otro sentido se debe otra vez al teorema de Banach-Alaoglú.

Con las mejoras obtenidas para las topologías débiles en ambiente separable podemos precisar en el mismo ambiente, cómo se puede escoger el compacto K del corolario 3.17.

Corolario 3.19 (Banach-Mazur). *Todo espacio normado separable es isométrico a un subespacio de* $C[0,1]$.

Razonando como en el corolario 3.17, hay que añadir dos nuevos ingredientes, por un lado, la w^*-metrizabilidad de B_{X^*} que acabamos de obtener y, por otro, el hecho de que todo espacio topológico compacto, Hausdorff y metrizable es imagen continua del conjunto de Cantor. Para los detalles puede verse [25].

El resultado anterior muestra la universalidad del espacio $C[0,1]$ para los espacios normados separables. No obstante, la existencia de un tal espacio se prueba con mucha más facilidad.

Proposición 3.20. *Sea X un espacio normado separable. Entonces X es isométrico a un subespacio de ℓ_∞.*

La ventaja del espacio $C[0,1]$ sobre ℓ_∞ es su separabilidad.

La w-metrizabilidad de la bola unidad de un espacio normado con dual separable permite, además la siguiente generalización del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Corolario 3.21. *Sea X un espacio reflexivo. Entonces toda sucesión acotada en X admite una parcial débilmente convergente en X.*

En efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en X no es restrictivo suponer que $x_n \in B_X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El subespacio cerrado Y generado por la sucesión $\{x_n\}$ es reflexivo y separable, por tanto, B_Y es un espacio compacto y metrizable para topología débil, lo que nos da la conclusión del corolario.

Como consecuencia del teorema de Eberlein-Smulian, ver [15], parece oportuno indicar, a título informativo, que la propiedad del corolario anterior de hecho caracteriza los espacios reflexivos.

Otra interesante aplicación del teorema de Banach-Alaoglú que puede verse en [26] es la siguiente.

Corolario 3.22 (Sobczyk). *Sea X un espacio normado separable, M un subespacio de X y $T \in L(M, c_0)$. Entonces existe $S \in L(X, c_0)$ tal que la restricción de S a M coincide con T y $\|S\| \le 2\|T\|$.*

Merece la pena observar que la separabilidad es esencial para obtener la propiedad de extensión anterior, ya que el teorema de Phillips, presentado en el capítulo anterior, pone de manifiesto que nuestro último corolario es falso cuando se toma como $X = \ell_\infty$, $M = c_0$ y T la identidad en M.

Como consecuencia inmediata se obtiene.

Corolario 3.23. *Sea X un espacio normado separable y M un subespacio de X isomorfo a c_0. Entonces M está complementado en X.*

Gracias exclusivamente al teorema de Hahn-Banach, el espacio ℓ_∞ goza de la misma propiedad de extensión que c_0, ahora sin suponer separabilidad.

Proposición 3.24. *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $T \in L(M, \ell_\infty)$. Entonces existe $S \in L(X, \ell_\infty)$ con $\|S\| = \|T\|$ y tal que la restricción de S a M coincide con T.*

Corolario 3.25. *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X isomorfo a ℓ_∞. Entonces M está complementado en X.*

3.4. El Teorema de Krein-Milman

Para finalizar el capítulo obtendremos el teorema de Krein-Milman, una nueva consecuencia de los teoremas de separación junto con la teoría de dualidad, del que se puede sacar bastante partido como se verá más adelante y que nos da condiciones suficientes para que un subconjunto de un espacio normado posea puntos «extremos», concepto que pasamos a definir.

Definición 3.26. Sea X un espacio vectorial, $A \subset X$ y $a \in A$. Se dice que a es un punto *extremo* del conjunto A si la única forma de expresar a como combinación convexa de puntos de A es la trivial, esto es, si siempre que $x, y \in A$, $t \in]0,1[$ y se verifique $a = tx + (1-t)y$ se tiene que $x = y = a$. Igualmente diremos que un subconjunto B de A es una *cara* de A si dados $x, y \in A$, $t \in]0,1[$ tales que $tx + (1-t)y \in B$ se verifica que $x, y \in B$. El conjunto de los puntos extremos del conjunto A se denotará por $\mathrm{Ext}(A)$.

Es claro que el conjunto formado por un punto extremo de A es una cara de A. Es igualmente fácil observar que la propiedad «ser cara de» es transitiva.

El caso particular más interesante de la definición anterior se presenta cuando se trata con conjuntos convexos pues en tal caso tenemos varias reformulaciones equivalentes del concepto recién presentado.

Proposición 3.27. *Sea X un espacio vectorial, A un subconjunto convexo de X y $a \in A$. Entonces son equivalentes:*

i) $a \in \mathrm{Ext}(A)$.

ii) $a = \frac{x+y}{2},\ x, y \in A \Rightarrow x = y = a$.

iii) $x \in X,\ a + x, a - x \in A \Rightarrow x = 0$.

iv) Si F es un subconjunto finito de A y $a \in co(F)$ entonces $a \in F$.

Por supuesto, la pregunta que nos planteamos es la existencia de puntos extremos para un subconjunto de un espacio normado.

Teorema 3.28 (Krein-Milman)**.** *Sea X un espacio normado. Sea K es un subconjunto no vacío y τ-compacto, donde τ es o bien la topología de la norma, la topología débil o la topología w^*, en caso de que X sea un espacio dual. Entonces $K \subset \overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K))$. Además, si K es convexo se da la igualdad en la inclusión anterior, donde el cierre se considera en la topología τ.*

Como ya hemos dicho el conjunto formado por un punto extremo es una cara del conjunto ambiente, pero además esa cara es minimal. La demostración del resultado anterior se centra entonces en encontrar caras minimales del conjunto K. El lema de Zorn sería entonces aplicable para tal fin y nos quedaría ver que toda cara minimal debe ser un punto extremo. Por supuesto, cuando decimos cara se debe entender no vacía (en otro caso carecería de sentido) y además τ-cerrada, como veremos a continuación.

Consideramos $\mathscr{F}$ el conjunto formado por las caras τ-cerradas de K con el orden natural de la inclusión, al menos K es un elemento de $\mathscr{F}$. La τ-compacidad de K y la transitividad de la propiedad «ser cara de» permiten deducir que el orden de la inclusión en $\mathscr{F}$ es inductivo. Ahora el lema de Zorn nos dice que toda cara τ-cerrada de K contiene otra minimal. Sea, pues, F una cara τ-cerrada minimal de K y mostremos que se reduce a un punto. En caso contrario, existirían $x, y \in F$, $x \neq y$ con lo que existe $f \in (X, \tau)^*$ de forma que $f(x) \neq f(y)$. Ahora la compacidad de F nos asegura la existencia de $M = \text{máx}\{\mathrm{Re}\, f(a) : a \in F\}$. La observación crucial ahora es que el conjunto $L = \{a \in F : \mathrm{Re}\, f(a) = M\}$ es una cara τ-cerrada de F, por tanto también cara de K, estrictamente contenida en F, lo que contradice su carácter minimal en $\mathscr{F}$. En consecuencia, se ha probado que *toda cara τ-cerrada de K contiene un punto extremo de K.*

La inclusión $K \subset \overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K))$ se basa otra vez en la misma idea anterior, es decir, el dual de (X, τ) separa los puntos de X. Pongamos primeramente que τ no es la topología w^*, caso de que X sea un espacio dual. Si dicha inclusión no se diera, existiría $x \in K$, $x \notin \overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K))$. Ahora el teorema de separación nos dice que existen $f \in X^*$ de forma que

$$\sup \mathrm{Re}\, f(\overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K))) < \mathrm{Re}\, f(x).$$

Ahora, al igual que antes, el conjunto

$$E = \{a \in K : \mathrm{Re}\, f(a) = \text{máx}\, \mathrm{Re}\, f(K)\}$$

es una cara cerrada de K de forma que $E \cap co(\mathrm{Ext}(K)) = \emptyset$. En particular, E no corta al conjunto $\mathrm{Ext}(K)$, una contradicción pues ya sabemos que E debe contener extremos de K.

En el caso de que τ fuese la topología w^*, en caso de que X sea un espacio dual, digamos $X = Y^*$ y supongamos de nuevo que existiera $x_0^* \in K$, $x_0^* \notin \overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K))$. Existiría entonces un abierto básico U para la topología w^*, de forma que $x_0^* + U$ es disjunto con $\overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K))$. Pongamos

$$U = \{x^* \in X^* : |x^*(y_i)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$$

para cierto natural n, real positivo ε y vectores $y_1, \ldots, y_n \in Y$.

Es claro entonces que $x_0^* \notin \overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K)) + U$, y como $\overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K)) + U$ es abierto por serlo U, un argumento de separación da un elemento $f \in X^*$ de forma que

$$\sup \mathrm{Re}\, f(\overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K))) \leq \sup \mathrm{Re}\, f(\overline{co}^\tau(\mathrm{Ext}(K)) + U) < \mathrm{Re}\, f(x_0^*).$$

Obsérvese que ahora la demostración puede acabar exactamente igual a como lo hicimos en los casos anteriores, siempre que el elemento f sea de hecho un elemento de Y. Pero es claro que f está acotado en U y, por tanto, es w^*-continuo, es decir, un elemento de Y. Alternativamente, como la intersección de los núcleos de los elementos y_i es un subespacio dentro de U, se llega a que f debe ser combinación lineal de dichos elementos, y por tanto nuevamente un elemento de Y.

Los siguientes ejemplos muestran que la hipótesis de compacidad no puede suprimirse en el teorema anterior, aunque tampoco puede decirse que sea una condición necesaria.

Ejemplo 3.29. i) La bola cerrada unidad del espacio de Banach c_0 (un subconjunto cerrado, convexo y acotado) carece de puntos extremos. Para ello, si $x \in B_{c_0}$ es claro que $x + e_n, x - e_n \in B_{c_0}$ para n suficientemente grande, donde $\{e_n\}$ es la base canónica de c_0.

ii) Es fácil comprobar que

$$\mathrm{Ext}(B_{\ell_1}) = \{\lambda e_n : n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1\},$$

donde ahora $\{e_n\}$ es la base canónica de ℓ_1. En consecuencia se tiene que $B_{\ell_1} = \overline{co}^{w^*}(\mathrm{Ext}(B_{\ell_1}))$. De hecho es posible demostrar que el cierre anterior puede tomarse en la topología de la norma.

Pasamos ahora a considerar un «recíproco» del teorema de Krein-Milman, útil para detectar puntos extremos de un conjunto convexo y compacto, que nos dice, en algún sentido, que los puntos extremos proporcionan la forma más sencilla de generar un conjunto por envolvente convexo cerrada. Para su demostración es crucial observar que la envolvente convexa (sin necesidad de cerrar) de la unión finita de compactos es compacta.

Teorema 3.30 (Krein-Milman revertido)**.** *Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo, no vacío y τ-compacto de X, donde τ es o bien la topología de la noma, la topología débil o la topología w^*, en caso de que X sea un espacio dual. Si E es un subconjunto de A tal que $A = \overline{co}^\tau(E)$ entonces* $\mathrm{Ext}(A) \subset \overline{E}^\tau$.

Comenzamos ahora con algunas aplicaciones del teorema de Krein-Milman. La primera de ellas es consecuencia del análisis de la demostración de la existencia de puntos extremos en dicho teorema.

Teorema 3.31 (Principio de optimización de Bauer)**.** *Sea X un espacio normado, K un subconjunto convexo, no vacío y τ-compacto de X, donde τ es o bien la topología de la noma, la topología débil o la topología w^*, en caso de que X sea un espacio dual. y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y τ-semicontinua superiormente (resp. cóncava y τ-semicontinua inferiormente). Entonces f alcanza su máximo (resp. mínimo) en un punto extremo de K.*

Por supuesto, la información novedosa del resultado anterior no estriba en la existencia de máximo (resp. mínimo) sino en el hecho de que éste deba alcanzarse en un punto extremo.

Involucraremos ahora el teorema de Banach-Alaoglú, junto con el de Krein-Milman, puesto que nos proporciona conjuntos compactos para la topología débil-$*$ de un espacio de Banach dual.

Como consecuencia del teorema de Krein-Milman, Banach-Alaoglú y el Principio de optimización de Bauer obtenemos.

Teorema 3.32. *Los puntos extremos de la bola unidad del dual de un espacio normado X separan los puntos de X. En concreto, para cada $x \in X$ existe $f \in \mathrm{Ext}(B_{X^*})$ tal que $f(x) = \|x\|$.*

Obtenemos de inmediato ahora una aplicación curiosa.

Corolario 3.33. *Si X es un espacio normado, el operador identidad es un punto extremo de la bola unidad del espacio $L(X)$.*

Expondremos ahora cómo presentar más aplicaciones de los teoremas de Krein-Milman y Banach-Alaoglú, siendo conscientes de que quizá no todas se podrán exponer con el detenimiento suficiente por la falta de tiempo. Una sencilla caracterización de los puntos extremos en la bola unidad del dual de $C(K)$, que deducimos del Teorema de Krein-Milman "revertido", nos permite obtener fácilmente el Teorema clásico de Banach-Stone, que describe los isomorfismos isométricos de $C(K)$ sobre $C(H)$, siendo K y H espacios topológicos compactos de Hausdorff, y sobre todo, prueba que el compacto K está determinado por el espacio de Banach $C(K)$. Un argumento del mismo tipo, aplicado ahora al espacio $C_b(\Omega)$ de las funciones continuas y acotadas en un espacio de Hausdorff completamente regular Ω, nos permite hacer una elegante construcción de la compactación de Stone-Cech de Ω, sirviendo el Teorema de Banach-Stone para probar la unicidad. Finalmente, la combinación de los Teoremas de Banach-Alaoglú y Krein-Milman con el de representación de Riesz permite dar una demostración del Teorema de Stone-Weierstrass debida a L. De Branges (1959). El argumento permite de hecho probar un resultado debido a Bishop del cual se deduce el Teorema de Stone-Weierstrass. Finalmente, mostraremos una aplicación al mundo de la teoría de control.

La mayor parte del trabajo en lo que queda de este tema se desarrollaría en espacios de funciones continuas. Para evitar tediosas repeticiones fijamos la siguiente terminología:

Notación. Si Ω es un espacio topológico de Hausdorff, completamente regular, $C_b(\Omega)$ denotará el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas de Ω en $\mathbb{K}$ con su norma natural

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : \; t \in \Omega\} \quad (x \in C_b(\Omega)).$$

Para $t \in \Omega$ definimos $\delta_t : C_b(\Omega) \to \mathbb{K}$ por:

$$\delta_t(x) = x(t) \qquad (x \in C_b(\Omega)).$$

Es claro que $\delta_t \in C_b(\Omega)^*$ y que $\|\delta_t\| = 1$. Cuando ello no dé lugar a confusión usaremos simplemente el término "compacto" como abreviatura de "espacio topológico compacto de Hausdorff". Nótese que si K es un compacto, $C_b(K) = C(K)$, el espacio de las funciones continuas de K en el cuerpo escalar que se considere. Como siempre $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$ y $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$; usaremos libremente el hecho elemental de que $\mathbb{T} = Ext(\mathbb{D})$.

En la demostración de los resultados que siguen se usará la siguiente caracterización de los puntos extremos de las bolas unidad de $C(K)$ y $C(K)^*$, para K compacto. En el caso de $C(K)$ las cosas son realmente fáciles, para $C(K)^*$ usaremos la w^*-compacidad de su bola y el Teorema de Krein-Milman revertido.

Teorema 3.34. *Para K compacto se tiene:*

i) $\mathrm{Ext}(B_{C(K)}) = \{x \in C(K) : x(K) \subset \mathbb{T}\}$.

ii) $\mathrm{Ext}(B_{C(K)^*}) = \mathbb{T}\tilde{K}$ *donde* $\tilde{K} = \{\delta_t : t \in K\}$.

Como consecuencia fácil del teorema anterior obtenemos:

Corolario 3.35 (Teorema de Banach-Stone clásico)**.** *Sean H y K compactos y Φ un isomorfismo isométrico de $C(H)$ sobre $C(K)$. Entonces existe un homeomorfismo σ de K sobre H y una función $\theta \in C(K)$ con $\theta(K) \subset \mathbb{T}$, tales que:*

$$[\Phi(x)](t) = \theta(t)x(\sigma(t))$$

para $t \in K$ y $x \in C(H)$. En particular, si los espacios de Banach $C(H)$ y $C(K)$ son isométricamente isomorfos, entonces H y K son homeomorfos.

Usando la idea de que K es homeomorfo a un subconjunto w^*-compacto de la bola unidad de $C(K)^*$, se puede obtener de manera muy elegante la compactación de Stone-Cech de un espacio de Hausdorff completamente regular:

Lema 3.36. *Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. La aplicación $t \to \delta_t$ es un homeomorfismo de Ω sobre un subconjunto de $B_{C_b(\Omega)^*}$, con la topología w^*.*

Teorema 3.37 (Compactación de Stone-Cech)**.** *Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Existe un espacio topológico compacto de Hausdorff $\beta\Omega$ y un homeomorfismo I de Ω sobre un subconjunto denso de $\beta\Omega$. Además, para cada función continua y acotada $x : \Omega \to \mathbb{R}$ existe una (única) función $\tilde{x} \in C(\beta\Omega)$ verificando que $\tilde{x}(I(t)) = x(t)$ para $t \in \Omega$ y*

$$\text{máx}\left\{|\tilde{x}(s)| : s \in \beta\Omega\right\} = \sup\{|x(t)| : t \in \Omega\},$$

de hecho la aplicación $x \mapsto \tilde{x}$ es un isomorfismo isométrico de $C_b(\Omega)$ sobre $C(\beta\Omega)$. Finalmente $\beta\Omega$ es (salvo homeomorfismos) el único espacio topológico que verifica las anteriores condiciones.

Nuestro objetivo ahora es obtener una forma refinada del Teorema de Stone-Weierstrass. Necesitamos introducir el siguiente concepto:

Definición 3.38. En lo sucesivo K será un compacto fijo y usaremos que el espacio de Banach $C(K)$ es también un álgebra con el producto definido puntualmente. Dada una subálgebra A de $C(K)$ se dice que un subconjunto E de K es *A-antisimétrico* si toda función $x \in A$ que tome solamente valores reales en E es constante en E. En el caso real esto significa simplemente que toda función de A es constante en E.

Teorema 3.39 (de antisimetría de Bishop)**.** *Sea A una subálgebra cerrada de $C(K)$ que contenga a las funciones constantes y sea $x \in C(K)$. Si para cada subconjunto A-antisimétrico E de K existe una función de A que coincide con x en E, entonces $x \in A$.*

Supongamos ahora que la subálgebra cerrada A de $C(K)$ separa los puntos de K y contiene a las constantes. En el caso real, todo subconjunto A-antisimétrico de K se reduce a un punto y la condición sobre x en el teorema anterior se cumple, trivialmente, para cualquier $x \in C(K)$, luego $A = C(K)$. En el caso complejo, suponiendo adicionalmente que A es *autoadjunta*, es decir, verifica $a^* \in A$ si $a \in A$, donde $a^*(t) = \overline{a(t)}$ (complejo conjugado) para $t \in K$, llegamos al mismo resultado. Se obtiene así:

Corolario 3.40 (Teorema de Stone-Weierstrass)**.** *Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y A una subálgebra cerrada de $C(K)$ que contiene a las funciones constantes y separa los puntos de K. En el caso complejo supongamos además que A es autoadjunta. Entonces $A = C(K)$.*

Ni que decir tiene, el corolario anterior extiende al teorema clásico de aproximación de Weierstrass según el cual los polinomios son densos en $C[0,1]$. Este hecho da lugar a la prueba más natural de la separabilidad de $C[0,1]$. En realidad, ya conocíamos este resultado por ser $C[0,1]$ un espacio de Banach con base.

Pasamos ahora a dar una aplicación del teorema de Krein-Milman junto con la teoría de dualidad al mundo de la teoría de control. Queremos estudiar el movimiento de un móvil ascendente verticalmente, que alcance una altura predeterminada $h > 0$ en un tiempo dado $T > 0$, con el mínimo gasto de combustible. El movimiento $x(t)$ del móvil viene dado por la ecuación

$$mx''(t) = F(t) - mg, \; x(0) = 0, x'(0) = 0,$$

donde m es la masa del móvil, que suponemos constante, mg es la acción de la gravedad y F es la fuerza impulsora del móvil. Por comodidad, elegimos unidades físicas para que $m = g = 1$. Así, la ecuación que gobierna el movimiento es

$$x''(t) = F(t) - 1, \; x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Queremos encontrar una fuerza F de forma que la energía consumida sea la mínima posible. Entonces queremos minimizar la cantidad $\int_0^T |F(t)| dt$ de forma que F verifique la ecuación anterior y $x(T) = h$.

A partir de este momento, fijamos la altura $h > 0$ y el tiempo $T > 0$, y queremos encontrar una función $F : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ a ser posible continua, pero como mínimo en $L_1[0, T]$, de forma que haga mínima la cantidad $\int_0^T |F(t)| dt$ y verifique la ecuación

$$x''(t) = F(t) - 1$$

con $x(0) = 0, x'(0) = 0$ y $x(T) = h$.

Integrando entre 0 y t dos veces en la ecuación anterior, y aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene tras hacer $t = T$

$$\int_0^T (T - t) F(t) dt = h + \frac{T^2}{2}.$$

Por tanto, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿existe $F_0 \in L_1[0,T]$ verificando

$$\int_0^T |F_0(t)|dt = \min_{F\in Y} \int_0^T |F(t)|dt?$$

donde se define

$$Y = \left\{ F \in L_1[0,T] : \int_0^T (T-t)F(t)dt = h + \frac{T^2}{2} \right\}.$$

La sorpresa va a ser que tal F_0 no existe. Veámoslo.

Definamos $\phi(F) = \int_0^T (T-t)F(t)dt$ para $F \in L_1[0,T]$. Es claro que $\phi \in L_1[0,T]^*$ con $\|\phi\| = T$, y que $Y = \phi^{-1}(\{h + \frac{T^2}{2}\})$. Por tanto, Y es un hiperplano afín y podemos calcular su distancia al origen, de donde se obtiene

$$\inf_{F\in Y} \int_0^T |F(t)|dt = \frac{h}{T} + \frac{T}{2}.$$

Supongamos que nuestro problema tiene solución y que existiese la tal función $F_0 \in Y$. En tal caso, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T |F_0(t)|dt &= \frac{h}{T} + \frac{T}{2} = \int_0^T \frac{(T-t)}{T} F_0(t)dt \\ &\le \int_0^T \frac{(T-t)}{T} |F_0(t)|dt \le \int_0^T |F_0(t)|dt. \end{aligned}$$

De donde deducimos que

$$\int_0^T (1 - \frac{(T-t)}{T})|F_0(t)|dt = \int_0^T \frac{t}{T}|F_0(t)|dt = 0.$$

Entonces ha de ser F_0 nula casi por doquier en $[0,T]$, lo que nos dice, por ser $F_0 \in Y$, que $h = T = 0$, llegando así a una contradicción.

En resumen, nuestro problema no tiene solución si queremos entender ésta como una función integrable, que es lo mínimo que podemos exigir para expresar la energía o gasto de combustible consumido. Replanteemos ahora nuestro problema.

Si F es una función continua en $[0,T]$, podemos ver F como un elemento de $C([0,T])^*$ que lleva cada elemento $f \in C([0,T])$ en la integral $\int_0^T fF$. Además la norma de tal funcional es $\int_0^T |F(t)|dt$. El siguiente problema extiende entonces al que habíamos planteado: ¿existe $F_1 \in C([0,T])^*$ tal que

$$\|F_1\| = \inf_{F\in Y} \|F\|,$$

donde ahora $Y = \{F \in C([0,T])^* : F(w) = h + \frac{T^2}{2}\}$ y w es la función continua en $[0,T]$ dada por $w(t) = T - t$.

Resolvamos el problema recién planteado, que ahora tendrá solución gracias al teorema de Hahn-Banach. Dicho teorema asegura la existencia de $F_0 \in C([0,T])^*$ con $F_0(w) = h + \frac{T^2}{2}$. Obsérvese que $\inf_{F\in Y} \|F\| = \inf_{F\in Y} \|(F_0 - F) - F_0\|$. Sea L el subespacio generado por w, entonces $\inf_{F\in Y} \|F\|$ no es más que la distancia de F_0 a $L^0 = \{F_0 - F : F \in Y\}$, que es w^*-cerrado en $C([0,T])^*$, por serlo Y. Entonces la distancia de F_0 a L^0 se alcanza, al igual que se alcanza la distancia de un punto a un cerrado en $\mathbb{R}^n$, ya que los w^*-cerrados y acotados son w^*-compactos. La teoría de dualidad hace aquí su trabajo.

Llamemos F a la solución de nuestro problema. Además la mínima energía consumida será $\|F\|$ que podemos calcular evaluando F sobre un elemento de la esfera de L. Para ello consideremos la función $u_0(t) = \frac{T-t}{T}$. Se tiene entonces que la energía buscada es

$$\|F\| = F(u_0) = \frac{h}{T} + \frac{T}{2}.$$

Vayamos ahora al cálculo de la solución. El conjunto de todas las soluciones posibles es

$$K = \left\{ \phi \in \|F\| B_{C([0,T])^*} : \phi(u_0) = \frac{h}{T} + \frac{T}{2} \right\}.$$

Es claro que K es una cara convexa y w^*-compacta de $\|F\| B_{C([0,T])^*}$. Aplicando el teorema de Krein-Milman, K ha de ser la envolvente convexa y w^*-cerrada de los puntos extremos de $\|F\| B_{C([0,T])^*}$ que se quedan en K. Ya sabemos que el conjunto de los puntos extremos de $B_{C([0,T])^*}$ viene dado por $E = \{\delta_t : t \in [0,T]\}$, por lo que los puntos extremos de $(\frac{h}{T} + \frac{T}{2}) B_{C([0,T])^*}$ serán de la forma $(\frac{h}{T} + \frac{T}{2})\delta_t$ con $t \in [0,T]$.

En resumen, sabemos que el conjunto de soluciones de nuestro problema es la envolvente convexa y w^*-cerrada de la intersección de los conjuntos $\{(\frac{h}{T} + \frac{T}{2})\delta_t : t \in [0,T]\}$ y K. Puesto que la función u_0 alcanza su máximo en 0, deducimos que $K = \{(\frac{h}{T} + \frac{T}{2})\delta_0\}$.

En definitiva, concluimos que nuestro problema tiene solución única con fuerza propulsora $(\frac{h}{T} + \frac{T}{2})\delta_0$ y gasto de combustible mínimo $\frac{h}{T} + \frac{T}{2}$. Si se quiere ahora minimizar el tiempo T, basta derivar la expresión $\frac{h}{T} + \frac{T}{2}$ para obtener que dicho tiempo es $T = \sqrt{2h}$.

Parece oportuno hacer una interpretación de lo que hemos obtenido. La expresión del gasto de combustible o energía y el tiempo no son más que cantidades, pero la expresión de la fuerza propulsora se interpreta como un impulso instantáneo en el instante inicial del movimiento, representado por la delta de Dirac δ_0, vista aquí como un funcional en el dual del espacio de las funciones continuas en $[0,T]$.

Bibliografía

Cualquier texto que estudie mínimamente las topologías débiles en espacios normados cubre sobradamente los tópicos expuestos en este capítulo. Fundamentalmente hemos seguido [20] y [25], por su claridad en la exposición. Para las aplicaciones es preciso citar los textos de Diestel [12], Holmes [24], Jarchow [26], Köthe [29] y Wilanski [44]. El tratamiento del teorema de Krein-Milman lo hemos obtenido del texto [24].

4. Los teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss

Existen tres resultados fundamentales que son denominados los tres grandes principios del Análisis Funcional. El primero de ellos, el teorema de Hahn-Banach, ya ha sido presentado. Los otros dos, teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss, son el objetivo de este capítulo. Banach demostró que toda biyección lineal y continua entre espacios de Banach es abierta. Más tarde, Schauder dio una demostración del mismo hecho utilizando los conceptos de categoría de Baire. Comenzamos pues presentando el teorema de Baire y los conceptos de categoría para utilizarlos en la demostración del teorema de la aplicación abierta. Aparte de las aplicaciones de dicho resultado al Análisis Funcional presentamos otra en el mundo de las ecuaciones diferenciales mostrando la dependencia continua respecto de los datos y valores iniciales de un sistema de ecuaciones lineales. Dadas las reformulaciones equivalentes del teorema de la aplicación abierta: teoremas de los isomorfismos de Banach y de la gráfica cerrada, nos encaminamos en el segundo tema a presentar el teorema de Banach-Steinhauss que deducimos, en nuestro ambiente privilegiado de los espacios de Banach, del teorema de la gráfica cerrada, algo inusual ya que en la mayoría de los textos se suele utilizar el principio de acotación uniforme. Entre las aplicaciones presentadas destacan el resultado de Du Bois-Reymond sobre la abundancia de funciones continuas cuya serie de Fourier asociada no converge puntualmente y la caracterización de las matrices conservativas mediante las llamadas «condiciones de Silverman-Toeplitz».

Dedicamos el tercer tema a hacer una breve introducción al apasionante mundo de las bases en espacios de Banach que tanto juego han dado y siguen dando al Análisis Funcional. En este ambiente presentamos el teorema de la base de Banach-Schauder, una caracterización intrínseca de las bases que es, sin duda, una de las más brillantes aplicaciones del teorema de la aplicación abierta. El importante concepto de bases equivalentes nos sirve de excusa para presentar el teorema de Bessaga-Pelczynski que caracteriza la contención de c_0, un resultado relativamente contemporáneo que muestra la importancia de las bases para el estudio de la estructura de los espacios de Banach, y que muy bien puede servir como inicio para algún alumno especialmente interesado.

4.1. La categoría. El teorema de Baire

En 1897 Osgood prueba que la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos en $\mathbb{R}$ es densa. Dos años después, Baire consigue el mismo resultado en $\mathbb{R}^n$, siendo este último un lema (el gran lema de Baire) para obtener como consecuencia el gran teorema de Baire, cuya versión más clásica es la siguiente:

«Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en K y con valores reales, que converge puntualmente a una función f, entonces para cada subconjunto cerrado y no vacío $F \subset K$ la función $f|F$, esto es, la restricción de f a F es continua en algun punto.»

En 1927 Banach y Steinhauss consiguen dar forma definitiva al gran lema de Baire sustituyendo $\mathbb{R}^n$ o bien por un espacio métrico completo o bien por un espacio topolólogico Haussdorff y localmente compacto. A partir de este momento el resultado de Banach y Steinhauss, es el inicio de una herramienta imprescindible en el desarrollo del Análisis Funcional denominada método de la categoría de Baire, cuya base son los conceptos de «grandeza» y «pequeñez» que pasamos a definir.

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

i) Diremos que A es de *primera categoría* en X, «pequeño», si A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados y con interior vacío en X.

ii) Diremos que A es de *segunda categoría* en X, «grande», si no es de primera categoría en X.

iii) Diremos que X es un *espacio de Baire* si todo abierto no vacío en X es de segunda categoría en X.

Como consecuencia de la definición, un subconjunto de otro de primera categoría es de primera, así como un subconjunto que contiene a uno de segunda categoría vuelve a ser de segunda.

La siguiente equivalencia pone de manifiesto la naturalidad de los espacios de Baire.

Proposición 4.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces son equivalentes:*

i) X es un espacio de Baire.

ii) La intersección numerable de abiertos densos en X es densa en X.

iii) La unión numerable de subconjuntos cerrados con interior vacío en X tiene interior vacío en X.

Ahora la pregunta es, ¿qué clase de espacios familiares son de Baire? El siguiente resultado clarifica bastante las cosas.

Teorema 4.3 (Baire)**.** *Los espacios métricos completos y los espacios topológicos Haussdorff localmente compactos son espacios de Baire.*

La demostración para el caso de los espacios métricos completos es una sencilla aplicación del teorema de Cantor. El caso de los espacios topológicos Haussdorff localmente compactos no se debe al teorema de Cantor, pero guarda gran similitud con el caso anterior.

Llegados a este punto, conviene advertir que los conceptos de categoría dependen del espacio ambiente, puesto que $\mathbb{R}$ es de primera categoría en $\mathbb{R}^2$, mientras que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo, como consecuencia del teorema de Baire.

Una interesante aplicación del teorema de Baire es la siguiente:

Corolario 4.4. *Sea X un espacio de Banach. Entonces la dimensión (algebraica) ha de ser finita o infinita no numerable.*

Para comprobarlo, supongamos que X es un espacio normado de dimensión infinita numerable y sea $\{e_n\}$ una base del espacio vectorial X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $X_n = lin\{e_1, \ldots, e_n\}$ el subespacio generado por los vectores $e_i : 1 \leq i \leq n$. Es claro entonces que $X = \cup_{n=1}^{+\infty} X_n$, siendo cada X_n cerrado en X, por ser finito-dimensional, y con interior vacío puesto que X es de dimensión infinita. Así X es de primera categoría en sí mismo y, por tanto, el teorema de Baire nos dice que X no es completo.

Las aplicaciones más vistosas del teorema de Baire consisten en obtener teoremas de existencia de una forma bastante elegante. Aunque tendremos ocasión de poner esto de manifiesto como aplicación del teorema de Banach-Steinhauss, a modo de ilustración se puede proponer como ejercicio la existencia de funciones continuas en [0,1] con valores reales que no son derivables en ningún punto. La indicación para esto debe ser demostrar que el conjunto de las aplicaciones continuas que son derivables en algún punto es de primera categoría en el espacio $C[0,1]$, para aplicar el teorema de Baire y concluir no sólo la existencia de aplicaciones continuas no derivables en ningún punto, hecho seguramente conocido por el alumno, sino además que el conjunto formado por ellas es de segunda categoría en $C[0,1]$, es decir, «grande», y por tanto denso en $C[0,1]$.

Podemos ahora resolver una cuestión que quedó pendiente en el capítulo anterior.

Proposición 4.5. *Sea X un espacio normado.*

i) La topología débil de X es metrizable si, y sólo si, X es finito-dimensional.

ii) La topología débil-$*$ en X^* es metrizable si, y sólo si, X tiene dimensión numerable.

En consecuencia, si X es un espacio de Banach infinito-dimensional las topologías $w(X)$ y $w^*(X^*)$ no son metrizables.

4.2. El teorema de la aplicación abierta

Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$ el hecho de que T sea homomorfismo equivale a que se verifique el primer teorema de isomorfía en la categoría de los espacios normados, esto es, que los espacios $X/Ker\,T$ y $T(X)$ sean isomorfos como espacios normados. Con este hecho en mente nos preguntaremos si toda aplicación lineal continua y sobreyectiva entre espacios normados ha de ser un homomorfismo o, equivalentemente, abierta. Una primera aproximación a la respuesta nos dice que en caso de que el espacio de partida sea completo toda aplicación lineal y continua que sea «casi abierta», es de hecho abierta.

Lema 4.6. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta y, en particular sobreyectiva.*

Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$, por tanto

$$\frac{\delta}{2^n} B_Y \subset \overline{T(\frac{1}{2^n} B_X)}\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Si ahora $y \in \overline{T(\frac{1}{2}B_X)}$ ha de existir $x_1 \in \frac{1}{2}B_X$ tal que $\|y - T(x_1)\| < \frac{\delta}{2^2}$. Se tiene entonces que

$$y - T(x_1) \in \frac{\delta}{2^2}B_Y \subset \overline{T(\frac{1}{2^2}B_X)}$$

y, por tanto, repitiendo el argumento, existe $x_2 \in \frac{1}{2^2}B_X$ tal que

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{\delta}{2^3}.$$

Por recurrencia se construye una sucesión $\{x_n\}$ en X verificando

$$\|x_n\| \le \frac{1}{2^n}, \ \|y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}} \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Por la complitud de X existe $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \in X$, y por la continuidad de T se tiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} T(x_n) = T(x)$. Ahora 4.2 nos dice que $y = T(x)$ y, por 4.1, $\frac{\delta}{2}B_Y \subset T(B_X)$.

Junto con el lema anterior el teorema de Baire nos va a garantizar respuesta positiva a nuestra pregunta en espacios completos.

Teorema 4.7 (de la aplicación abierta)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ sobreyectiva. Entonces T es abierta.*

La igualdad $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} n\overline{T(B_X)}$ junto con el hecho de que Y es de segunda categoría en sí mismo, nos dice que $\overline{T(B_X)}$ ha de tener interior no vacío. Consideremos pues y_0 un punto del interior y $\delta > 0$ tales que

$$\{y \in Y : \|y - y_0\| \le \delta\} \subset \overline{T(B_X)}.$$

Aplicando el lema anterior bastará ver que $\frac{\delta}{2}B_Y \subset \overline{T(B_X)}$. Con este objetivo tomamos $y \in Y$ con $\|y\| \le \frac{\delta}{2}$. Como $y_0,\ y_0 + 2y \in \overline{T(B_X)}$ han de existir sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en B_X cuyas imágenes por T convergen a y_0 e $y_0 + 2y$, respectivamente.

Tenemos ahora que la sucesión $\{\frac{y_n - x_n}{2}\}$ está en B_X y sus imágenes por T convergen a y, lo que nos dice que $y \in \overline{T(B_X)}$, concluyendo la demostración.

Obsérvese que la hipótesis de complitud en el teorema anterior sobre el espacio de llegada Y se utiliza únicamente para que Y sea de segunda categoría en sí mismo. Si hemos preferido la complitud no es más que por guardar la forma clásica del teorema, que por otra parte resulta la más natural.

La siguiente aplicación pone de manifiesto que el lema anterior puede ser a veces más útil que el teorema de la aplicación abierta.

Corolario 4.8. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces X es isomorfo a un cociente de ℓ_1.*

Para comprobarlo, sea $\{x_n\}$ una sucesión densa en B_X. En virtud de la complitud de X podemos definir la aplicación $T\colon \ell_1 \longrightarrow X$ mediante

$$T(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} y(n)x_n \ \forall y \in \ell_1.$$

Claramente T es lineal y continua. Además, como $x_n \in T(B_{\ell_1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $B_X \subset \overline{T(B_{\ell_1})}$. Aplicando ahora el lema anterior, T ha de ser abierta y por tanto sobreyectiva. En conclusión, los espacios $\ell_1/Ker T$ y X son isomorfos.

El teorema de la aplicación abierta nos va a ayudar ahora a obtener más información sobre la dualidad entre operadores. Para empezar, otra forma de enunciar dicho teorema es decir que un epimorfismo entre espacios de Banach no es más que una aplicación lineal, continua y sobreyectiva. En consecuencia, obtenemos las siguientes equivalencias.

Corolario 4.9. *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Entonces equivalen:*

i) *T es un monomorfismo.*

ii) *T^* es sobreyectiva.*

La implicación i)⇒ii) era ya conocida.

Si T^* es sobreyectiva, entonces T^* es, según hemos dicho, un epimorfismo. En este ambiente, ya sabemos que T^{**} es un monomorfismo, de donde es muy fácil deducir que T también lo es.

Corolario 4.10. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces equivalen:*

i) *T es sobreyectiva.*

ii) *T^* es un monomorfismo.*

Si T es sobreyectiva sabemos que T es un epimorfismo y, por, tanto T^* es un monomorfismo.

Recíprocamente, si T^* es un monomorfismo, del teorema de separación se puede deducir fácilmente que $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y. Entonces T es abierta y, por tanto, sobreyectiva.

Por otro lado, podemos también caracterizar los homomorfismos entre espacios de Banach.

Corolario 4.11. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces equivalen:*

i) *T es un homomorfismo.*

ii) *$T(X)$ es cerrado en Y.*

El siguiente hecho no es más que una reformulación equivalente del teorema de la aplicación abierta.

Corolario 4.12 (Teorema de los isomorfismos de Banach)**.** *Toda aplicación lineal, continua y biyectiva entre espacios de Banach es un isomorfismo.*

Como consecuencia, se tiene la siguiente caracterización de la equivalencia entre dos normas completas de un mismo espacio vectorial.

Corolario 4.13. *Sea X un espacio vectorial y supongamos que $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ son dos normas completas en X. Entonces, dichas normas son equivalentes si, y sólo si, son comparables, esto es, existe una constante $M > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$ para cada $x \in X$.*

Nos introducimos ahora en el mundo de las ecuaciones diferenciales para dar una vistosa aplicación del teorema de la aplicación abierta.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ de funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y fijemos $t_0 \in [a, b]$ y $x_0 \in \mathbb{K}^n$. Consideramos el problema de valores iniciales

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t),\ t \in [a, b],\ x(t_0) = x_0.$$

Las soluciones del problema pertenecen al espacio $X = C^1([a, b], \mathbb{K}^n)$ de las funciones de clase C^1 en $[a, b]$ y valores en $\mathbb{K}^n$ con la norma

$$\|x\| = \text{máx}\{|x(t)| : t \in [a, b]\} + \text{máx}\{|x'(t)| : t \in [a, b]\},$$

donde $|\cdot|$ denota la norma del máximo en $\mathbb{K}^n$.

Llamemos $Y = C([a, b], \mathbb{K}^n)$ al espacio de las funciones continuas en $[a, b]$ con valores en $\mathbb{K}^n$ que, al igual que X, es un espacio de Banach con la norma

$$\|x\| = \text{máx}\{|x(t)| : t \in [a, b]\}.$$

La aplicación $T : X \longrightarrow Y \times \mathbb{K}^n$ definida por

$$T(x) = (x' - Ax, x(t_0))\ \forall x \in X$$

es claramente lineal y continua. Como ha de ser conocido por los alumnos, nuestro problema tiene solución única, esto es, T es biyectiva. Ahora el teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que, automáticamente, la solución x depende de manera continua del valor inicial $x_0 \in \mathbb{K}^n$ y del dato $b \in Y$.

Esta dependencia continua, siempre deseable, ofrece la garantía de que los métodos de perturbación para aproximar la solución del problema van a tener éxito.

Pasamos a considerar otra reformulación del teorema de la aplicación abierta, cuyo enunciado es radicalmente diferente. Para su motivación empezamos por recordar que si X e Y son dos espacios topológicos, Y es Haussdorff, entonces toda aplicación continua de X en Y tiene gráfica cerrada en $X \times Y$. Por supuesto, la gráfica de una aplicación F es el conjunto $G(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y = F(x)\}$. No debe resultar difícil al alumno obtener algún ejemplo de aplicación no continua con gráfica cerrada.

Por otra parte, el siguiente resultado elemental y conocido de topología general motiva aún más nuestro objetivo.

Proposición 4.14. *Sean X e Y espacios topológicos. Si Y es compacto, toda aplicación con gráfica cerrada de X en Y es continua.*

No parece necesario más motivación para enunciar la siguiente reformulación del teorema de la aplicación abierta.

Corolario 4.15 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean X e Y espacios de Banach. Entonces toda aplicación lineal con gráfica cerrada de X en Y es continua.*

Para su comprobación, sea $T \in L(X,Y)$ y supongamos que su gráfica, $G(T)$ es cerrada en $X \times Y$. Consideramos la aplicación $P\colon G(T) \longrightarrow X$ dada por $P(x, T(x)) = x$, que es claramente una biyección lineal y continua entre los espacios de Banach $G(T)$ y X. Entonces, el teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que P^{-1} es continua y, por tanto, también lo es su segunda coordenada, T.

Como la gráfica de una biyección lineal entre espacios normados es cerrada si, y sólo si, lo es la gráfica de su inversa, deducimos fácilmente el teorema de los isomorfismos de Banach.

Observaremos que deducir la continuidad de una aplicación lineal entre espacios de Banach obliga a comprobar dos cosas sobre la imagen de una sucesión convergente a cero: su convergencia y el valor cero del límite. Si aplicamos el teorema de la gráfica cerrada, se supone ya la convergencia, lo que facilita la tarea. Ilustraremos nuestro comentario con algunas consecuencias directas.

Una de las aplicaciones más directas del teorema de la gráfica cerrada es caracterizar los subespacios complementados de un espacio de Banach. Como sabemos un tal subespacio ha de ser cerrado, así como su complemento. Pues bien el recíproco es también cierto.

Corolario 4.16. *Sea X un espacio de Banach y supongamos que X es suma directa de dos subespacios M y N. Entonces la suma es topológico directa si, y sólo si, M y N son cerrados en X.*

Digamos que el teorema de la gráfica cerrada encierra la filosofía de que toda aplicación lineal entre espacios de Banach es continua siempre que tengamos una expresión concreta de su definición. Para ilustrar este «ambiguo» comentario, podemos usar el siguiente hecho.

Corolario 4.17. *Sean $1 \le p, q \le \infty$ y $\{a_{ij}\}$ una matriz doblemente infinita de números complejos tal que si $x \in \ell_p$ entonces la serie $y_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x(j)$ converge para cada i, y además la sucesión $y = \{y_i\} \in \ell_q$. Entonces la aplicación $T\colon \ell_p \longrightarrow \ell_q$ dada por $T(x) = y$ para cada $x \in \ell_p$ es continua.*

Aunque dedicaremos el cuarto tema de este capítulo a hacer lo que pensamos que es la aplicación más importante de los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada, cerraremos este tema mostrando la naturalidad de la norma del máximo, como consecuencia de dichos teoremas.

Corolario 4.18. *Sea $\|\cdot\|$ una norma completa en $C[a,b]$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Supongamos que la convergencia en la norma $\|\cdot\|$ implica la puntual. Entonces la norma $\|\ \|$ es equivalente a la norma del máximo en $C[a,b]$.*

4.3. Consecuencias: el teorema de Banach-Steinhauss

Dedicamos este tema a mostrar la utilidad del último principio del Análisis Funcional, el teorema de Banach-Steinhauss con cuya motivación bastante natural podemos comenzar este tema. Sean X e Y espacios normados y $\{T_n\}$ una sucesión en $L(X,Y)$ que converge puntualmente a una aplicación necesariamente lineal $T\colon X \longrightarrow Y$. Si intentamos probar la continuidad de T vemos enseguida la necesidad de que la sucesión $\{\|T_n\|\}$ esté acotada o, lo que es lo mismo, basta tener garantizada la acotación uniforme de $\{T_n\}$ en la bola unidad de X. Sin embargo nuestras hipótesis sólo nos dan la acotación puntual de la sucesión $\{T_n\}$.

Es claro entonces el interés de un teorema que nos permita pasar de una acotación puntual a la uniforme. El ambiente privilegiado de los espacios de Banach permite obtener el siguiente resultado como consecuencia del teorema de la gráfica cerrada.

Corolario 4.19 (Teorema de Banach-Steinhauss)**.** *Sea X un espacio de Banach y $\{Y_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de espacios normados. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos una aplicación lineal y continua T_i de X en Y_i. Si la familia $\{T_i : i \in I\}$ está puntualmente acotada, entonces también lo está uniformemente en B_X, esto es,*

$$\exists M > 0 : \|T_i(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X, i \in I.$$

Comencemos observando que se puede suponer la complitud de los espacios Y_i para cada $i \in I$, puesto que en caso contrario podemos utilizar la completación de los mismos, sin que ello altere las hipótesis. Asumiendo este hecho llamemos Z al espacio de Banach producto de la familia $\{Y_i : i \in I\}$ con la norma del supremo, es decir, el espacio de las funciones $y\colon I \longrightarrow \cup_{i\in I} Y_i$ tales que $y(i) \in Y_i$ para cada $i \in I$ con $\sup\{\|y(i)\| : i \in I\} < +\infty$. La norma en dicho espacio viene dada por el supremo anterior.

Definimos $\Phi\colon X \longrightarrow Z$ mediante $\Phi(x)(i) = T_i(x)$ para cualesquiera $i \in I, x \in X$. La acotación puntual de la familia $\{T_i : i \in I\}$ nos garantiza la buena definición de la aplicación lineal ϕ.

Es el momento de aplicar el teorema de la gráfica cerrada para obtener la continuidad de Φ. Consideramos, pues una sucesión $\{x_n\}$ en X con límite cero y suponemos que la sucesión $\Phi(x_n)$ converge a un elemento $z \in Z$. Nuestro objetivo ahora es probar que $z = 0$.

Fijado $i \in I$, se tiene que $\lim_n \Phi(x_n)(i) = \lim_n T_i(x_n) = z(i)$. Ahora la continuidad de T_i nos dice que $z(i) = 0$, lo que nos da la conclusión deseada y, por tanto, la continuidad de Φ que equivale a la acotación uniforme en B_X de la familia $\{T_i : i \in I\}$.

Conviene poner de manifiesto que el resultado precedente no es más que una consecuencia inmediata de un hecho más general, puramente topológico, que se esconde tras el teorema de Baire.

Proposición 4.20 (Principio de acotación uniforme)**.** *Sea X un espacio topológico de segunda categoría y $\{f_i : i \in I\}$ una familia de aplicaciones semicontinuas inferiormente de X en $\mathbb{R}$ que está puntualmente acotada. Entonces existe un abierto no vacío G de X donde la familia $\{f_i : i \in I\}$ está uniformemente acotada.*

Basta considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto cerrado

$$F_n = \{x \in X : |f_i(x)| \leq n \ \forall i \in I\}.$$

La acotación puntual de la familia $\{f_i : i \in I\}$ nos dice que $X = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ y el hecho de que X sea de segunda categoría nos informa de la existencia de un natural k de forma que F_k tiene interior no vacío. Es claro entonces que si G es el interior de F_k entonces la familia $\{f_i : i \in I\}$ está uniformemente acotada en G.

El caso más interesante del teorema de Banach-Steinhauss se presenta cuando la familia de espacios $\{Y_i : i \in I\}$ coinciden con uno dado. En tal caso, la familia $\{T_i : i \in I\}$ no es más que un subconjunto de $L(X,Y)$ y la acotación uniforme de dicha familia no es más que la acotación en el espacio de operadores $L(X,Y)$.

Con todos los ingredientes que tenemos hasta ahora podemos dar forma definitiva al problema que planteábamos al inicio del tema.

Corolario 4.21 (Teorema de cierre de Steinhauss)**.** *Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Si $\{T_n\}$ es una sucesión en $L(X,Y)$ que converge puntualmente a una aplicación, necesariamente lineal, $T\colon X \longrightarrow Y$, entonces $T \in L(X,Y)$.*

Para mostrar que la hipótesis de complitud del espacio de partida no es superflua basta considerar en c_{00} la sucesión de funcionales lineales y continuos $\{f_n\}$, dada por $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)$, que converge puntualmente al funcional lineal f dado por $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)$. Es claro entonces que la sucesión de funcionales $\{f_n\}$ no está uniformemente acotada en $B_{c_{00}}$ y f no es continuo.

Las aplicaciones más directas del teorema de Banach-Steinhauss consisten en obtener caracterizaciones de la acotación en espacios normados.

Corolario 4.22. *Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Entonces son equivalentes:*

i) A está acotado.

ii) El conjunto de escalares $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado para cada $f \in X^*$.

Corolario 4.23. *Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto de X^*. Entonces son equivalentes:*

i) A está acotado.

ii) El conjunto de escalares $\{f(x) : f \in A\}$ está acotado para cada $x \in X$.

Corolario 4.24. *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y A un subconjunto del espacio de operadores $L(X,Y)$. Entonces son equivalentes:*

i) A está acotado.

ii) El conjunto de escalares $\{f(T(x)) : T \in A\}$ está acotado para cada $x \in X$ y para cada $f \in Y^*$.

El paso de una acotación de tipo puntual a otra de tipo uniforme, que nos asegura el teorema de Banach-Steinhauss, nos va a permitir ahora obtener la relación entre la continuidad de una aplicación lineal para las topologías de la norma y débiles.

Corolario 4.25. *Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces T es continua para las topologías de la norma en X e Y si, y sólo si, lo es para las correspondientes topologías débiles.*

El mismo resultado no puede ser esperado para la topología débil$-*$, ni aún en el caso de funcionales, pensando claro está en un espacio no reflexivo. No obstante, el siguiente enunciado clarifica las cosas.

Corolario 4.26. *Sean X, Y espacios normados.*

i) *Si $T \in L(X,Y)$ entonces T^* es continua para las topologías w^* de X^* e Y^*.*

ii) *Si $S\colon Y^* \longrightarrow X^*$ es una aplicación lineal y continua para las topologías w^* de X^* e Y^*, entonces existe $T \in L(X,Y)$ tal que $T^* = S$. En particular, $S \in L(X,Y)$.*

El siguiente enunciado concreta en un espacio de Banach clásico, la equivalencia entre acotación puntual y uniforme.

Corolario 4.27. *Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Entonces son equivalentes:*

i) $y \in \ell_1$.

ii) *Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.*

iii) *Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ es convergente.*

iv) *Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ tiene sumas parciales acotadas.*

Otra sencilla aplicación del teorema que nos ocupa en este tema muestra la equivalencia entre la continuidad separada y la conjunta para una aplicación bilineal entre espacios de Banach.

Corolario 4.28. *Sean X un espacio de Banach, Y, Z espacios normados y $T\colon X \times Y \longrightarrow Z$ una aplicación bilineal. Entonces son equivalentes:*

i) *T es continua.*

ii) *T es separadamente continua.*

iii) *Existe $M > 0$ tal que $\|T(x,y)\| \le M\|x\|\|y\|$, $\forall x \in X, y \in Y$.*

La siguiente aplicación del teorema de Banach-Steinhauss no por conocida deja de ser vistosa. Se trata de probar la abundancia de funciones continuas y $2\pi-$periódicas cuya serie de Fourier asociada es divergente.

Sea X el espacio de Banach de las funciones continuas y $2\pi-$periódicas con la norma del máximo. Para cada $f \in X$ hacemos

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f),$$

donde $c_k(f)$ es el $k-$ésimo coeficiente de Fourier de f dado por

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Escribimos ahora $\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt$, donde

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{-ikt} = \frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})}.$$

Entonces σ_n es un funcional lineal y continuo en X con

$$\|\sigma_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt.$$

Estimaremos ahora, por abajo, la norma de σ_n.

$$\begin{aligned}\|\sigma_n\| &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{t}\right| \left|\frac{t}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})}\right| \\ &\geq M\int_0^{\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{t}\right| dt = M\int_0^{n+\frac{1}{2}} \left|\frac{\operatorname{sen}(s)}{s}\right| ds,\end{aligned}$$

donde M es una cota inferior para la función $|\frac{t}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})}|$.

Como la integral $\int_0^{+\infty} |\frac{\operatorname{sen}(s)}{s}|ds$ diverge, es claro entonces que la sucesión de funcionales $\{\sigma_n\}$ no está acotada. El teorema de Banach-Steinhauss permite ahora concluir lo siguiente.

Corolario 4.29. *El conjunto de las funciones $f \in C[0,2\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en el origen es de primera categoría en el espacio de Banach $C[0,2\pi]$.*

Este resultado nos asegura la abundancia de funciones cuya serie de Fourier asociada no converge puntualmente, de hecho este conjunto es de segunda categoría. La facilidad y elegancia con la que se ha probado este resultado contrasta con la dificultad de encontrar explícitamente un ejemplo concreto, dado por Du Bois-Reymond en 1876.

La siguiente aplicación del teorema de Banach-Steihauss nos adentra en resultados básicos de la teoría de sumabilidad.

Definición 4.30. Sea $A = (a_{nk})$ una matriz doblemente infinita de escalares. Si $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares definimos, cuando sea posible, una nueva sucesión Ax dada por:

$$Ax(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk}x(k) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Llamaremos *dominio* de la matriz A al subespacio d_A de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formado por aquellas sucesiones x para las que Ax está definida. El conjunto $c_A = \{x \in d_A : Ax \in c\}$ será denominado *dominio de convergencia* de la matriz A.

Surgen de forma natural los siguientes conceptos: diremos que A es *conservativa* si A trasforma sucesiones convergentes en convergentes, esto es, si $c \subset c_A$, A se dirá *regular* si además de ser conservativa el límite de la sucesión imagen coincide con el de la original, es decir, si

$$\lim_n Ax(n) = \lim_n x(n) \ \forall x \in c.$$

Gracias otra vez al teorema de Banach-Steinhauss podemos caracterizar cuándo una matriz es conservativa o regular.

Corolario 4.31 (Silverman-Toeplitz)**.** *La matriz $A = (a_{nk})$ es conservativa si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:*

i) $\sup\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{nk}| : n \in \mathbb{N}\right\} < +\infty$.

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe el límite $a_k = \text{lím}_n\, a_{nk}$.

iii) Existe el límite $\alpha = \text{lím}_n \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk}$.

Corolario 4.32. *La matriz $A = (a_{nk})$ es regular si, y sólo si, se verifican las tres condiciones del corolario anterior con $a_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ y $\alpha = 1$.*

4.4. Bases de Schauder

El concepto de base «algebraica» en un espacio vectorial nos ha servido de poco en el desarrollo de nuestra asignatura, como era de esperar, ya que no involucra la topología que tienen los espacios vectoriales que son objeto de nuestro estudio. Surge entonces, de forma totalmente natural, el siguiente concepto.

Definición 4.33. Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $\{e_n\}$ en X será llamada *base de Schauder* o simplemente *base* del espacio X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{t_n\}$ verificando $x = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n e_n$, donde la convergencia de la serie anterior ha de ser entendida en la topología de la norma de X.

Obsérvese que la sucesión $\{e_n\}$ anterior está formada obligatoriamente por vectores linealmente independientes, por tanto, X tiene dimensión infinita. Además el subespacio generado por dicha sucesión es denso en X, lo que hace que X tenga que ser separable.

Llamaremos sucesión de funcionales *biortogonales* de la base $\{e_n\}$ a la sucesión de funcionales lineales sobre X, $\{e_n^*\}$ dada por:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x) e_n \ \forall x \in X.$$

Obsérvese que $e_n^*(e_m) = \delta_{nm}\ \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Análogamente, llamaremos sucesión de *proyecciones de la base* a la sucesión de aplicaciones lineales $P_n \colon X \longrightarrow X$ dadas por

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k \ \forall x \in X.$$

Diremos que una sucesión de vectores de un espacio de Banach es una *sucesión básica* si es una base del subespacio cerrado generado por dicha sucesión.

Los ejemplos más sencillos de espacios de Banach con base son c_0 y ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$. Basta considerar en cada uno de ellos la sucesión $\{e_n\}$ dada por $e_n(m) = \delta_{nm}\ \forall n, n \in \mathbb{N}$ para obtener una base, ya que en dichos espacios se comprueba fácilmente que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) e_n,$$

y dicha expresión es única. A $\{e_n\}$ se le llama base *canónica* en cada uno de los espacios anteriores.

El siguiente resultado recoge las propiedades más interesantes de las bases en espacios de Banach, dando además una caracterización intrínseca de las mismas gracias a una brillante aplicación del teorema de los isomorfismos de Banach.

Teorema 4.34 (Banach-Schauder). *Sea X un espacio de Banach y $\{e_n\}$ una sucesión de vectores en X.*

i) *$\{e_n\}$ es una sucesión básica si, y sólo si, existe $K > 0$ tal que*

$$\|\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\| \leq K \|\sum_{k=1}^{n+m} t_k e_k\|$$

para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera escalares $\{t_k\}$. La mínima constante K verificando la desigualdad anterior se llama constante básica *de la sucesión básica $\{e_n\}$. Si $K = 1$ se dice que la sucesión básica $\{e_n\}$ es* monótona.

ii) *Si $\{e_n\}$ es una base de X las proyecciones de la base son continuas y verifican*

$$\sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} = K,$$

donde K es la constante básica. Los funcionales biortogonales son también continuos y satisfacen

$$1 \leq \|e_n\| \|e_n^*\| \leq 2K.$$

Además existe una norma equivalente $\| \ \|_0$ en X con la que $\{e_n\}$ es una base monótona y $\|e_n\| = \|e_n\|_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Empecemos preparando el terreno para aplicar el teorema de los isomorfismos de Banach. Consideremos $c(X)$ el espacio de las sucesiones convergentes de vectores de X con la norma

$$\|x\| = \sup\{\|x(n)\| : n \in \mathbb{N}\} \ \forall x \in c(X),$$

que convierte a X en un espacio de Banach. Ahora definimos el siguiente subespacio cerrado, y por tanto Banach, de $c(X)$:

$$Z = \{z \in c(X) : z(1) \in \operatorname{lin}\{e_1\},\ z(n+1) - z(n) \in \operatorname{lin}\{e_{n+1}\}\}.$$

La aplicación $T\colon Z \longrightarrow \overline{\operatorname{lin}}\{e_n\}$ dada por

$$T(z) = \lim_n z(n) \ \forall z \in Z,$$

es claramente lineal y continua. El hecho crucial y obvio para nuestros propósitos consiste en que $\{e_n\}$ es una base de X si, y sólo si, T es biyectiva. En estos momentos podemos afirmar gracias al teorema de los isomorfismos de Banach que, en el caso de que $\{e_n\}$ sea base de X, T^{-1} es también continua y se obtiene fácilmente la desigualdad de la primera afirmación en el resultado anterior, argumentando igualmente para sucesiones básicas. El resto de las afirmaciones son consecuencias inmediatas.

El resultado anterior es útil en la práctica para comprobar que ciertas sucesiones son básicas. Como ilustración obtenemos dos ejemplos más de bases en espacios de Banach que no son tan evidentes como los presentados anteriormente.

Los racionales diádicos del intervalo $I = [0,1]$ y los correspondientes intervalos diádicos jugarán un papel importante en los ejemplos que siguen con lo que conviene introducir alguna notación.

Numeramos los intervalos diádicos por el procedimiento de subdividir sucesivamente el intervalo I de forma que en cada paso uno solo de los intervalos previos se divide en dos partes iguales. La partición de I que se obtiene después de n pasos se describe como sigue: para $m, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j < 2^m$ consideramos el intervalo diádico abierto $I_{mj} =]j2^{-m}, (j+1)2^{-m}[$.

Cada $n \in \mathbb{N}$ admite una única expresión del tipo:

$$n = 2^m + k \ \text{ con } \ m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k < 2^m,$$

y notamos S_n a la familia de intervalos diádicos dada por

$$S_n = \left\{ I_{(m+1)j} : 0 \leq j \leq 2k+1 \right\} \cup \left\{ I_{mj} : k+1 \leq j \leq 2^m - 1 \right\}.$$

Así que S_n da lugar a una partición de I en $2k+2$ intervalos de longitud $2^{-(m+1)}$ y $2^m - k - 1$ intervalos de longitud 2^{-m}. Al pasar de S_n a S_{n+1} lo único que hacemos es dividir en dos partes iguales uno de los intervalos de S_n. En particular, cada intervalo de S_{n+1} está contenido en uno de S_n. Notaremos κ_{mj} a la función característica del intervalo I_{mj}.

Pasamos ya a mostrar nuestros dos nuevos ejemplos de bases:

i) *El sistema de Haar* es la sucesión $\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ de funciones sobre I dadas por $h_0(t) = 1 \ \forall t \in I$ y

$$h_n = 2^{\frac{m}{2}} \left(\kappa_{(m+1)2k} - \kappa_{(m+1)(2k+1)} \right),$$

para $n = 2^m + k$ con $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k < 2^m$. En definitiva, h_n es constante en cada uno de los $n+1$ intervalos de S_n, toma los valores $2^{\frac{m}{2}}$ y $-2^{\frac{m}{2}}$ en los intervalos $I_{(m+1)2k}$ e $I_{(m+1)(2k+1)}$, que son los que han aparecido nuevos al pasar de S_{n-1} a S_n, y se anula en el resto de I. Aplicando el teorema anterior se puede comprobar que el sistema de Haar es una base de $L_p[0,1]$ para $1 \leq p < +\infty$.

ii) *Los sistemas de Faber-Schauder.* Pretendemos ahora probar que el espacio $X = C[0,1]$ posee bases y presentar la más famosa de ellas.

Sea $\{t_j\}$ una sucesión de puntos del intervalo I tal que $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ y el conjunto $\{t_j : j \in \mathbb{N}\}$ es denso en I. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una proyección lineal P_n en X como sigue: si $f \in X$ definimos $P_1(f)$ como la función constantemente igual a $f(0)$; si $n > 1$ definimos $P_n(f)$ como la función que coincide con f en los puntos $t_1, \cdots, t_n$ y es afín en cada subintervalo cerrado de I determinado por dichos puntos. Se tiene entonces que $\{P_n(f)\} \to f$ para cada $f \in X$. En consecuencia, haciendo $e_1(t) = 1$ para cada $t \in I$ y

$$e_n(t) = \frac{2}{\|h_{n-2}\|_1} \int_0^t h_{n-2}(s)\,ds \ \forall t \in I, n > 1$$

donde $\{h_n\}$ es el sistema de Haar, se comprueba fácilmente que $\{e_n\}$ es una base monótona de X, conocida como *sistema de Schauder.*

Para satisfacer una curiosidad natural digamos que no todo espacio de Banach separable posee una base Schauder, hecho que excede nuestros objetivos en este proyecto. No obstante, otra nueva aplicación del teorema de Banach-Schauder permite obtener lo siguiente.

Teorema 4.35 (Mazur)**.** *Todo espacio de Banach infinito-dimensional contiene una sucesión básica.*

Presentamos a continuación un tipo especial se sucesiones básicas construidas a partir de una base dada que serán de importancia más adelante.

Definición 4.36. Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}$. Una sucesión $\{v_n\}$ en X se llamará un *bloque básico* de $\{x_n\}$ si existen enteros $m_0 = 0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots$ y una sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tales que

$$v_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \lambda_k x_k \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es claro que un bloque básico es una sucesión básica cuya constante básica no excede de la constante de la base de partida.

Parece natural que dos espacios de Banach con base que son isomorfos deberían tener bases estrechamente relacionadas. El siguiente concepto explicita este hecho.

Definición 4.37. Se dice que dos bases $\{e_n\}$ y $\{v_n\}$ de sendos espacios de Banach X e Y son *equivalentes* si para cualquier sucesión de escalares $\{t_n\}$, la convergencia de la serie $\sum_n t_n e_n$ equivale a la de la serie $\sum_n t_n v_n$.

La siguiente aplicación del teorema de la gráfica cerrada permite probar que tener bases equivalentes no es más que tener espacios isomorfos.

Corolario 4.38. *Dos bases $\{e_n\}$ y $\{v_n\}$ de sendos espacios de Banach X e Y son equivalentes si, y sólo si, existe $T\colon X \longrightarrow Y$ isomorfismo sobreyectivo tal que $T(e_n) = v_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

El siguiente resultado muestra, en cierto sentido, la estabilidad de las sucesiones básicas.

Proposición 4.39. *Sea $\{e_n\}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X, $X_0 = \operatorname{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{e_n^*\}$ la sucesión de funcionales biortogonales asociada a $\{e_n\}$. Si $\{v_n\}$ es una sucesión en X tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|e_n^*\| \|e_n - v_n\| = \delta < 1,$$

entonces $\{v_n\}$ es una sucesión básica equivalente a $\{e_n\}$. Además, si existe una proyección lineal y continua P de X sobre X_0 con $\delta \|P\| < 1$, entonces $Y_0 = \operatorname{lin}\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio complementado de X.

4.5. El principio de selección de Bessaga-Pelczynski

Pretendemos presentar en esta sección un importante principio de selección que nos permite obtener sucesiones básicas a partir de una sucesión dada no necesariamente básica. Aplicaremos después las herramientas del Análisis Funcional para obtener consecuencias importantes.

Para motivar el principio de selección que pretendemos presentar, empezaremos diciendo que en un espacio de Banach con base, es sabido que existen una cantidad infinita no numerable de bases no equivalentes entre sí, hecho probado por Pelczynski y Singer. Surge inmediatamente el problema de reconocer en un espacio de Banach arbitrario la base usual de los espacios de Banach clásicos. Más concretamente, nos podemos plantear cómo saber si una sucesión en un espacio de Banach es equivalente a la base usual de c_0, que denotaremos por $\{e_n\}$. Equivalentemente, nos estamos planteando cuándo un espacio de Banach contiene subespacios isomorfos a c_0. Sea entonces X un espacio de Banach y supongamos primeramente que $\{v_n\}$ es una sucesión básica en X. Denotando por Y al subespacio cerrado de X generado por la sucesión $\{v_n\}$, si queremos que $\{v_n\}$ sea equivalente a la base usual de c_0 no tenemos más remedio que suponer que la serie $\sum_n t_n v_n$ sea convergente para cada $\{t_n\} \in c_0$. En tal caso, podemos definir la aplicación $T\colon c_0 \longrightarrow Y$ mediante

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)\, v_n, \quad \forall x \in c_0.$$

Si ahora imponemos que $\inf_n\{\|v_n\|\} > 0$, obtenemos que T es una biyección lineal entre dos espacios de Banach. Aplicando ahora el teorema de la gráfica cerrada se obtiene que T es un isomorfismo y, por tanto, X contiene un subespacio isomorfo a c_0. Recapitulando, hemos probado el siguiente hecho.

Proposición 4.40. *Sea X un espacio de Banach y $\{v_n\}$ una sucesión básica en X. Entonces $\{v_n\}$ es equivalente a la base usual de c_0 (o si se quiere, X contiene a c_0) si, y sólo si, $Inf_n\{\|v_n\|\} > 0$ y la serie $\sum_n t_n v_n$ converge para cada $\{t_n\} \in c_0$.*

Pasamos ahora a poner nombre a la propiedad que verifica $\{v_n\}$ en la proposición anterior.

Proposición 4.41. *Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Entonces equivalen:*

i) $\sum_n t_n x_n$ *converge para cada* $\{t_n\} \in c_0$.

ii) $\sum_n |x^*(x_n)|$ *converge para cada* $x^* \in X^*$.

iii) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^*(x_n)| \le C\|x^*\|$ *para cada* $x^* \in X^*$.

iv) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| \le C$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera escalares* $\alpha_i \in \{0,1\}$.

v) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\| \le C$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera escalares* $\varepsilon_i \in \{1,-1\}$.

vi) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\| \leq C$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *y para cualesquiera escalares verificando* $|t_i| \leq 1$.

Diremos que la serie $\sum_n x_n$ *es* débilmente incondicionalmente Cauchy *si verifica alguna de las propiedades anteriores.*

Nos planteamos ahora la posibilidad de obtener un resultado análogo a la proposición 4.40 sin suponer que la sucesión $\{v_n\}$ sea básica. Para este fin necesitamos alguna forma de obtener sucesiones básicas a partir de una sucesión dada que no sea necesariamente básica. El resultado más empleado para este propósito es el siguiente.

Teorema 4.42 (Principio de selección de Bessaga-Pelczynski)**.** *Sea* X *un espacio de Banach y* $\{x_n\}$ *una sucesión débilmente convergente a cero y no convergente en norma. Entonces existe* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *parcial básica de* $\{x_n\}$.

Como primera aplicación del resultado precedente damos respuesta al problema planteado.

Corolario 4.43 (Bessaga-Pelczynski)**.** *Sea* X *un espacio de Banach. Entonces* X *contiene a* c_0 *si, y sólo si, existe una sucesión* $\{x_n\}$ *en* X *tal que la serie* $\sum_n x_n$ *es débilmente incondicionalmente Cauchy y no convergente en norma.*

Utilizamos ahora el corolario anterior para obtener una importante propiedad de los espacios que no continene a c_0.

Corolario 4.44. *Sea* X *un espacio de Banach sin subespacios isomorfos a* c_0 *y* $T \in L(c_0, X)$. *Entonces existe* $\{R_n\} \subset L(c_0, X)$ *sucesión de operadores de rango finito tales que* $\{R_n\} \to T$, *donde la convergencia se da en el espacio de operadores* $L(c_0, X)$.

Aplicamos ahora de nuevo el principio de selección de Bessaga-Pelczynski para obtener el teorema de Orlicz-Pettis.

Corolario 4.45. *Sea* X *un espacio de Banach y* $\{x_n\}$ *una sucesión en* X. *Supongamos que cada subserie de* $\sum_n x_n$ *es débilmente convergente, esto es,* $\sum_n x_{\sigma(n)}$ *es débilmente convergente para cada parcial* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *de* $\{x_n\}$. *Entonces cada subserie de* $\sum_n x_n$ *es convergente para la topología de la norma. En particular, la serie* $\sum_n x_n$ *converge en norma.*

Finalizamos este tema obteniendo una consecuencia del corolario anterior en el mundo de las medidas vectoriales.

Corolario 4.46. *Sea* X *un espacio de Banach,* Ω *un conjunto no vacío y* Σ *una* $\sigma-$*álgebra de subconjuntos de* Ω. *Entonces toda medida vectorial* $F\colon \Sigma \longrightarrow X$ *débilmente numerablemente aditiva es numerablemente aditiva en norma.*

Bibliografía

Se puede decir que las demostraciones de los resultados fundamentales de este capítulo son esencialmente las originales de Banach [2]. No obstante, la terminología actual y algunos detalles se han tomado de [3], [6], [11], [32] y [44]. En el texto de Jameson [25] se puede ver una prueba diferente del teorema de la aplicación abierta en términos de subonjuntos «CS-cerrados» y «CS-compactos» y en los textos de Rudin [35] y Wilansky [43] aparecen la mayoría de las aplicaciones dadas aquí. La idea de probar el teorema de Banach-Steinhauss a partir del teorema de la gráfica cerrada ha sido tomada de [30], donde, de hecho, se puede encontrar el teorema de Banach-Steinhauss en espacios de Fréchet para funcionales a partir del de la gráfica cerrada en F-espacios. Para el tema de las bases de Schauder son textos obligados los de Singer [37] y el de Lindenstrauss-Tzafriri, [31]. Por último el teorema de Bessaga-Pelczynski ha sido tomado de [12].

5. Espacios de Hilbert

Como J. Dieudonné explica en su Historia del Análisis Funcional [13], entre 1900 y 1910 se produce la cristalización de una serie de ideas que habían ido gestándose lentamente durante el siglo XIX. Esto se debe fundamentalmente a la aparición de cuatro trabajos, un artículo de Fredholm sobre ecuaciones integrales (1900), la tesis de Lebesgue sobre integración (1902), un articulo de Hilbert sobre teoría espectral (1906) y la tesis de Fréchet sobre espacios métricos. La coincidencia en el tiempo de estos trabajos puede decirse que dio lugar al nacimiento del Análisis Funcional como hoy lo conocemos.

El estudio de lo que hoy llamamos espacios de Hilbert se inicia en el mencionado trabajo de David Hilbert con el fin de profundizar en el trabajo anterior de Fredholm sobre las ecuaciones integrales que llevan su nombre. Hilbert llega de forma natural a la consideración del espacio l_2 de las sucesiones de números reales de cuadrado sumable, de las formas bilineales que él llama "acotadas" en dicho espacio y las correspondientes formas cuadráticas en infinitas variables. La teoría de los espacios de Hilbert se consolida, por una parte, a través de los trabajos del propio Fréchet y de uno de los más aventajados discípulos de Hilbert, E. Schmidt, publicados en 1908, que aplican ya sistemáticamente métodos geométricos (el trabajo de Schmidt contiene las nociones de producto escalar, norma, ortogonalidad y el Teorema de la proyección ortogonal) al estudio del espacio de Hilbert separable, explotando la similitud con la geometría euclídea en dimensión finita. Por otra parte, también en 1906-1907 F. Riesz y E. Fisher, aprovechando la preciosa herramienta que Lebesgue les había proporcionado, establecen el teorema que lleva su nombre sobre la complitud del espacio $L_2(I)$ de las (clases de) funciones de cuadrado integrable en un intervalo compacto I y el total isomorfismo de dicho espacio con l_2, vía coeficientes de Fourier, ligando de por vida a los espacios de Hilbert con la teoría de la integración y la de las series de Fourier y abriendo el camino para la consideración de los espacios L_p y de los espacios de Banach en general.

Así pues dedicamos este capítulo a presentar en dos temas los espacios de Hilbert junto con los teoremas de la proyección ortogonal, aproximación óptima y representación de un espacio de Hilbert en la forma $l_2(\Lambda)$.

5.1. Los teoremas de la proyección ortogonal y Riesz-Fréchet

El presente tema contiene, como no podía ser de otra forma, los conceptos básicos de la teoría de espacios de Hilbert y los métodos geométricos que hacen posible trabajar en tales espacios con una comodidad inalcanzable en espacios más generales. El Teorema de la proyección ortogonal y su principal consecuencia, el Teorema de representación de Riesz-Fréchet son, claro está, los resultados fundamentales. Obtenemos también una consecuencia casi inmediata del Teorema de Riesz-Fréchet conocida como Teorema de Lax-Milgram, que tiene implicaciones importantes en el mundo de las ecuaciones diferenciales.

Definición 5.1. Si X e Y son espacios vectoriales, diremos que una aplicación de X en Y es *conjugado-lineal* si verifica que

$$f(\lambda x_1 + x_2) = \overline{\lambda} f(x_1) + f(x_2) \quad (x_1, x_2, \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$$

(en caso real “conjugado-lineal” es lo mismo que lineal). Si ahora Z es otro espacio vectorial, se dice que una aplicación $\varphi : X \times Y \to Z$ es *sexquilineal* cuando φ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda:

$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, \mu y_1 + y_2) =$$

$$= \lambda\overline{\mu}\varphi(x_1, y_1) + \lambda\varphi(x_1, y_2) + \overline{\mu}\varphi(x_2, y_1) + \varphi(x_2, y_2),$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. En el caso $Z = \mathbb{K}$ decimos que φ es una *forma sexquilineal* en $X \times Y$. Si $X = Y$, diremos que la forma sexquilineal φ en $X \times X$, donde X es un espacio vectorial (real o complejo) es *hermítica*, si verifica

$$\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)} \quad (x, y \in X).$$

Se dice que una forma sexquilineal hermítica es *positiva* si $\varphi(x, x) \geq 0$ para todo x en X y *definida positiva* si para $x \in X$, $x \neq 0$, se tiene $\varphi(x, x) > 0$. Un *producto escalar* en X es una forma sexquilineal hermítica y definida positiva, de $X \times X$ en $\mathbb{K}$. Adoptaremos la notación usual $(x, y) \to (x|y)$ para un producto escalar. Notemos que los axiomas que definen a un producto escalar son, en resumidas cuentas, los siguientes:

i) $(\lambda x_1 + x_2|y) = \lambda(x_1|y) + (x_2|y) \quad (x_1, x_2, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

ii) $(y|x) = \overline{(x|y)} \quad (x, y \in X)$.

iii) $x \in X,\ x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0$.

Un *espacio prehilbertiano* es un espacio vectorial en el que se tiene definido un producto escalar.

Inmediatamente se obtiene la siguiente relación entre el producto escalar de un espacio prehilbertiano y la forma cuadrática asociada:

Lema 5.2 (Identidad de polarización)**.** *Si X es un espacio prehilbertiano, entonces se verifica:*

$$4\,\mathrm{Re}(x|y) = (x + y|x + y) - (x - y|x - y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Todo espacio prehilbertiano se convierte canónicamente en un espacio normado como consecuencia de:

Proposición 5.3. *Sea X un espacio prehilbertiano. Se verifican entonces:*

i) Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:*

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y) \quad (x, y \in X).$$

ii) Desigualdad de Minkowski*:*

$$(x+y|x+y)^{1/2} \leq (x|x)^{1/2} + (y|y)^{1/2} \quad (x, y \in X).$$

Por tanto, la aplicación $x \mapsto (x|x)^{1/2}$ *es una norma en* X*.*

Definición 5.4. Un espacio prehilbertiano X se considera canónicamente como espacio normado con la *norma* dada por:

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (x \in X).$$

La desigualdad de Minkowski se convierte en la desigualdad triangular para la norma $\|\cdot\|$ y la de Cauchy-Schwarz toma la forma:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (x, y \in X).$$

Como consecuencia el producto escalar es continuo en $X \times X$ y, considerándolo si queremos como aplicación $\mathbb{R}$-bilineal continua, tiene norma 1. A su vez la norma determina al producto escalar, puesto que, por la identidad de polarización, tenemos

$$4\operatorname{Re}(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad (x, y \in X)$$

y en el caso complejo podemos simplemente pensar que

$$\operatorname{Im}(x|y) = \operatorname{Re}(x|iy) \quad (x, y \in X).$$

Conviene resaltar que, como consecuencia inmediata de lo anterior, si X e Y son espacios prehilbertianos y $T : X \to Y$ es lineal e isométrica, entonces T conserva el producto escalar. Dicho de otra forma, dos espacios prehilbertianos son totalmente isomorfos si son idénticos como espacios normados, es decir, isométricamente isomorfos. Si la norma de un espacio prehilbertiano X es completa, decimos que X es un *espacio de Hilbert.*

Surge de forma natural la pregunta ¿qué normas proceden de un producto escalar? De las innumerables respuestas satisfactorias que pueden darse a esta pregunta nos quedamos con la más clásica y no por ello menos útil.

Teorema 5.5 (Jordan-von Neumann)**.** *Sea* $\|\cdot\|$ *una norma en un espacio vectorial* X*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) Existe un producto escalar $(\cdot|\cdot)$ *en* X *tal que*

$$\|x\|^2 = (x|x) \quad (x \in X).$$

ii) Se verifica la igualdad del paralelogramo*:*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\quad (x,y\in X).$$

Pasemos a las consecuencias más directas del teorema anterior. Naturalmente cualquier propiedad de los espacios prehilbertianos que no compartan otros espacios normados será, de forma más o menos directa, consecuencia de la igualdad del paralelogramo. En primer lugar el que un espacio normado sea o no un espacio prehilbertiano lo deciden sus $\mathbb{R}$-subespacios dos dimensionales:

Corolario 5.6. *i) Si X es un espacio normado complejo, entonces X es prehilbertiano (su norma procede de un producto escalar) si, y sólo si, lo es $X_{\mathbb{R}}$, el espacio normado real subyacente a X.*

ii) Si X es un espacio normado real con $\dim(X)\geq 2$*, entonces X es un espacio prehilbertiano si, y sólo si, cada subespacio bidimensional de X es prehilbertiano.*

Puede ser un buen momento para que los alumnos decidan cuáles de los espacios de Banach que conocen son prehilbertianos (algo que indudablemente es antihistórico, pero instructivo). La conclusión más destacable debe ser la siguiente:

Ejemplo 5.7. De la familia de espacios de Banach

$$\{\ell_p : 1\leq p\leq +\infty\}\cup\{L_p[0,1] : 1\leq p\leq +\infty\}$$

son espacios de Hilbert sólo ℓ_2 y $L_2[0,1]$. Si es posible, se puede partir de los espacios $L_p(\mu)$.

Pasando a consecuencias geométricas, igualmente inmediatas pero más ingeniosas, del Teorema de Jordan-Von Neumann obtendremos la que motivó a Clarkson para introducir los espacios de Banach uniformemente convexos, en particular la convexidad estricta de los espacios prehilbertianos.

Corolario 5.8. *Sea H un espacio prehilbertiano.*

i) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones en la bola unidad de H tales que $\{\|x_n+y_n\|\}\to 2$, entonces $\{\|x_n-y_n\|\}\to 0$. En particular la esfera unidad de H no contiene segmentos no triviales y H es reflexivo si es completo, como consecuencia del teorema de Milman-Pettis.

ii) (La propiedad de Radon-Riesz, también llamada de Kadec-Klee). Si $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores de H y $x\in H$, entonces:

$$\left.\begin{array}{c}\{\|x_n\|\}\to\|x\|\\ (x_n|y)\to(x|y)\ \ \forall y\in H\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \{\|x_n-x\|\}\to 0.$$

Es ya el momento de abordar la consecuencia más importante de la igualdad del paralelogramo, el Teorema de aproximación óptima.

Teorema 5.9 (Teorema de aproximación óptima)**.** *Sea H un espacio prehilbertiano, M un subconjunto convexo y completo de H y $a \in H$. Existe un único punto $x_0 \in M$ tal que*

$$\|a - x_0\| \leq \|a - x\| \quad \forall x \in M,$$

esto es, a tiene única mejor aproximación en M.

Para llegar al Teorema de la proyección ortogonal, principal resultado de este tema, sólo nos queda obtener una sencilla caracterización de las mejores aproximaciones con lo que se llega de forma natural al concepto de vectores ortogonales:

Definición 5.10. Decimos que dos vectores x, y en un espacio prehilbertiano H son *ortogonales* y escribimos $x \perp y$ cuando $(x|y) = 0$ (evidentemente $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$). Dado un subconjunto no vacío M de H notamos:

$$M^{\perp} = \{y \in H : \ y \perp x \ \forall x \in M\}$$

y es evidente que $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H, así como que $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ y $M \subset M^{\perp\perp}$.

Del Teorema de Aproximación Óptima obtendremos el siguiente resultado:

Teorema 5.11 (de la proyección ortogonal)**.** *Sea H un espacio prehilbertiano y M un subespacio completo de H. Entonces:*

i) $H = M \oplus M^{\perp}$.

ii) *La proyección lineal P_M de H sobre M tal que* $\operatorname{Ker} P_M = M^{\perp}$ *recibe el nombre de* proyección ortogonal *de H sobre M y verifica que:*

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in H),$$

en particular P_M es continua y, si $M \neq \{0\}$, $\|P_M\| = 1$. Además, para cada $x \in H$, $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M.

Notemos que, si H no es completo, la situación de M y $M^{\perp}$ en el teorema anterior no es simétrica; puesto que la aplicación $x \to (P_M(x), x - P_M(x))$ es un isomorfismo isométrico de H sobre $M \times M^{\perp}$ usando en el producto la norma dada por

$$\|(y,z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad (y \in M, \ z \in M^{\perp}),$$

si $M^{\perp}$ fuese completo también lo sería H. En el caso de que H sea completo y M cerrado, la situación es perfectamente simétrica y $P_{M^{\perp}} = I - P_M$ donde I es la identidad en H, con lo que $M = M^{\perp\perp}$. Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert H, podemos aplicar lo anterior, tomando como M el subespacio cerrado de H engendrado por A; puesto que claramente $A^{\perp} = M^{\perp}$ obtenemos:

Corolario 5.12. *Sea A un subconjunto no vacío arbitrario de un espacio de Hilbert H. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el mínimo subespacio cerrado de H que contiene al conjunto A. En particular, si Y es un subespacio de H se tiene $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en H si, y sólo si, $Y^{\perp} = \{0\}$.*

Como principal aplicación del Teorema de la proyección ortogonal obtenemos la autodualidad de los espacios de Hilbert.

Comenzamos por una observación elemental que podía haberse hecho inmediatamente después de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si H es un espacio prehilbertiano y $x \in H$ podemos considerar la aplicación $\tilde{x} : H \to \mathbb{K}$ definida por

$$\tilde{x}(y) = (y|x) \quad (y \in H);$$

tenemos claramente que $\tilde{x}$ es un funcional lineal continuo en H, esto es $\tilde{x} \in H^*$, y $\|\tilde{x}\| = \|x\|$. La aplicación $x \to \tilde{x}$ es conjugado-lineal (lineal en caso real) e isométrica. Para que sea sobreyectiva H deberá ser completo, puesto que H^* siempre lo es. Bajo la hipótesis de complitud el Teorema de la Proyección ortogonal nos permite probar fácilmente:

Teorema 5.13 (Riesz-Fréchet)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$. Existe un único vector $x \in H$ tal que $f(y) = (y|x)$ para todo $y \in H$. Como consecuencia la aplicación $x \to \tilde{x}$, donde*

$$\tilde{x}(y) = (y|x) \quad (x, y \in H)$$

es una biyección conjugado-lineal isométrica de H sobre H^*.

Como caso particular del teorema anterior obtenemos la descripción del dual de $L_2[0,1]$. Notemos que, en el caso complejo, la identificación de $L_2[0,1]$ con su dual que ahora obtenemos es conjugado-lineal. Ello no es ningún problema, puesto que la aplicación $g \to \overline{g}$ ($g \in L_2[0,1]$) es a su vez una biyección conjugado-lineal isométrica de $L_2[0,1]$ en sí mismo, y basta componerla con la que da el teorema anterior. Del mismo modo, si se quiere, se identifica el dual de $L_2(\mu)$.

Concluimos este tema con una segunda aplicación del Teorema de Riesz-Fréchet, para el estudio de formas sexquilineales continuas en espacios de Hilbert, que culmina con el resultado que se conoce como Teorema de Lax-Milgram, de utilidad en el estudio de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de tipo elíptico.

De forma fácil, del Teorema de Riesz-Fréchet se deduce:

Corolario 5.14. *Si H y K son espacios de Hilbert, para cada forma sexquilineal continua $\varphi : H \times K \to \mathbb{K}$, existen aplicaciones lineales continuas $T \in L(H,K)$, $S \in L(K,H)$, determinadas en forma única, tales que:*

$$\varphi(x,y) = (Tx|y) = (x|Sy) \quad (x \in H,\ y \in K).$$

Se tiene además $\|T\| = \|S\| = \|\varphi\|$. En el caso particular $K = H$, φ es hermítica si, y sólo si, $S = T$.

Concentrándonos en el caso más interesante, $K = H$, y, añadiendo a la forma sexquilineal la hipótesis de ser coerciva, esto es,

$$\exists m > 0 : |\varphi(x,x)| \geq m\|x\|^2 \ \ \forall x \in H.$$

el correspondiente operador es un isomorfismo, hecho que usaremos para obtener:

Corolario 5.15 (Teorema de Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : H \times H \to \mathbb{K}$ una forma sexquilineal continua y coerciva. Entonces, para cada funcional lineal continuo $f \in H^*$ existe un único vector $x_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x, x_0) = f(x) \quad (x \in H). \tag{1}$$

De hecho en caso real si φ es simétrica y definida positiva, el punto x_0 viene caracterizado por la condición

$$\frac{1}{2}\varphi(x_0, x_0) - f(x_0) = \min_{x \in H} \left\{ \frac{1}{2}\varphi(x, x) - f(x) \right\} \quad (x \in H, f \in H^*). \tag{2}$$

Merece la pena observar que la relación entre la ecuación (1) y el problema de minimización (2) suele tener interpretación física (principios de minimización de energía, por ejemplo). Como aplicación del Teorema de Lax-Milgram se pueden recomendar a alumnos especialmente interesados en Ecuaciones Diferenciales las que hace Brezis a ecuaciones lineales elípticas en derivadas parciales (algún problema de contorno de los que aparecen en el capítulo 8 de [5, §V.3]). También puede encontrarse en el libro de Brezis una versión más fuerte del teorema anterior (Teorema de Stampacchia).

5.2. Bases ortonormales y espacios de Hilbert «tipo»

La descripción, salvo isomorfismos totales, de todos los espacios de Hilbert, es el objetivo central del presente tema. En particular se obtiene la versión abstracta del Teorema de Riesz-Fisher al probar la unicidad del espacio de Hilbert separable sobre $\mathbb{K}$. Hacemos un estudio previo de las familias sumables en espacios normados. Este estudio, cuyo principal resultado es la esencial equivalencia entre las nociones de familia sumable y serie incondicionalmente convergente, no es estrictamente imprescindible en este tema y tampoco en los que siguen, pero nos parece de interés en sí mismo y es indudable que la terminología de las familias sumables permite formalizar muy elegantemente algunos resultados, como por ejemplo el desarrollo de Fourier con respecto a una base ortonormal arbitraria, sin ir más lejos.

El concepto de familia sumable de vectores de un espacio normado es bastante intuitivo, por lo que no precisa demasiada motivación. Si bien evitamos la terminología de redes, la idea que subyace es clara, las sumas finitas se aproximan tanto como se quiera a un cierto vector cuando el conjunto de vectores que se suman es suficientemente grande. Conviene insistir en que el conjunto de índices puede no ser numerable y en que no se involucra ningún orden en dicho conjunto, aún cuando posea algún orden natural.

Definición 5.16. Si Λ es un conjunto no vacío arbitrario, $\mathcal{F}(\Lambda)$ denotará el conjunto de las partes finitas de Λ. Si X es un espacio normado, se dice que una familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de vectores de X es *sumable* cuando existe un $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)$ tal que si $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ y $J_0 \subset J$, entonces

$$\|\sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x\| < \varepsilon.$$

Es evidente que el vector x, si existe, es único, le llamamos *suma* de la familia. Escribimos $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ para indicar simultáneamente que la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y que x es su suma.

Propiedades básicas del concepto que acabamos de introducir son la conmutatividad, carácter lineal de la suma y conservación por aplicaciones lineales continuas, todas ellas deducibles directamente de la definición.

La condición de Cauchy necesaria para la sumabilidad de una familia toma el siguiente aspecto:

Definición 5.17. Se dice que una familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de elementos de un espacio normado X verifica la *condición de Cauchy* si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J \in \mathscr{F}(\Lambda) : \ K \in \mathscr{F}(\Lambda), \ K \cap J = \emptyset \Rightarrow \| \sum_{\lambda\in K} x_\lambda \| < \varepsilon.$$

La prueba del siguiente resultado es inmediata:

Proposición 5.18. *Sea* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de vectores de un espacio normado. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:*

i) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*

ii) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *verifica la condición de Cauchy.*

iii) $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ *es numerable.*

La condición iii) podría inducir a pensar que basta limitarse al estudio de familias numerables. Sin embargo, puede interesarnos considerar "todas" las familias sumables con un mismo conjunto de índices Λ no numerable. Por otra parte, aunque Λ sea numerable la noción de sumabilidad es una cómoda reformulación de la convergencia incondicional o conmutativa de una serie:

Teorema 5.19. *Dada una familia* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *de elementos de un espacio normado* X*, son equivalentes:*

i) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*

ii) El conjunto $A = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ *es numerable y, para cualquier biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to A$ *la serie* $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ *es convergente.*

Caso de que se cumplan i) *y* ii) *se tiene que* $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *para cualquier biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to A$.

Conviene resaltar que en la condición ii) del teorema anterior no se supone que todas las series de la forma $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ tengan la misma suma, sino que este hecho se obtiene como tesis. Aclarada la relación (esencialmente equivalencia) entre familias sumables y series incondicionalmente convergentes nos restringimos ya al caso completo para redondear la equivalencia entre sumabilidad y condición de Cauchy. Podemos evitar la complitud en términos de redes o bases de filtro simplemente aplicando el teorema anterior. Es obvio que si la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ verifica la condición de Cauchy, igual le ocurre a cualquiera de las series $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ que aparecen en el teorema anterior, luego:

Corolario 5.20. *Una familia de vectores de un espacio de Banach es sumable si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.*

Es obvio que toda subfamilia de una familia que verifique la condición de Cauchy la sigue verificando, luego en espacios de Banach, toda subfamilia de una familia sumable es sumable.

Definición 5.21. Se dice que la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de elementos de un espacio normado es *absolutamente sumable* cuando la familia de números $\{\|x_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable.

Como consecuencia inmediata del corolario anterior obtenemos lo siguiente:

Corolario 5.22. *Sea X un espacio de Banach, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de vectores de X y supongamos que existe $\alpha \in \ell_1^\Lambda$ tal que $\|x_\lambda\| \leq |\alpha(\lambda)|$ para $\lambda \in \Lambda$. Entonces la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable en X y se verifica que:*

$$\|\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|.$$

En particular, en un espacio de Banach, toda familia absolutamente sumable es sumable.

Cubiertos razonablemente los requisitos previos relativos a las familias sumables de vectores, volvemos a la teoría de los espacios de Hilbert, con el loable propósito de probar que todo espacio de Hilbert es totalmente isomorfo a uno de los llamados espacios de Hilbert «tipo», esto es, a un espacio ℓ_2^Λ para conveniente conjunto Λ. Todo el desarrollo que sigue puede motivarse muy bien considerando la base natural del espacio ℓ_2^Λ.

Si Λ es un conjunto no vacío arbitrario y para cada $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \in \ell_2^\Lambda$ denota la función característica del conjunto $\{\lambda\}$, toda la estructura del espacio ℓ_2^Λ se reconstruye fácilmente a partir de la familia de vectores $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. En efecto, si $x \in \ell_2^\Lambda$ se tiene fácilmente

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda\ ,$$

lo que nos da una forma muy concreta de aproximar cada $x \in \ell_2^\Lambda$ mediante elementos del subespacio vectorial generado por $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Finalmente conviene resaltar que

$$\|e_\lambda\| = 1, \quad (e_\lambda|e_\mu) = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu).$$

Aparece así de manera natural el siguiente concepto:

Definición 5.23. Un *sistema ortonormal* en un espacio prehilbertiano X es un subconjunto no vacío $E = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X, tal que $(x_\lambda|x_\mu) = 0$ para $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ y $\|x_\lambda\| = 1$ para $\lambda \in \Lambda$. Para cada $x \in X$, la familia de escalares $\{(x|x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es, por definición, la familia de los *coeficientes de Fourier* del vector x con respecto al sistema ortonormal E.

El siguiente lema, no obstante la sencillez de su demostración, es fundamental para los resultados que siguen:

Lema 5.24. *Sea $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano X.*

i) Si para $J \in \mathscr{F}(\Lambda)$ denotamos M_J al subespacio de X engendrado por $\{x_\lambda : \lambda \in J\}$ y P_J a la proyección ortogonal de X sobre M_J, se tiene:

$$P_J(x) = \sum_{\lambda \in J} (x|x_\lambda) x_\lambda \quad (x \in X).$$

En particular:

$$\|x - \sum_{\lambda \in J} (x|x_\lambda) x_\lambda\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\lambda \in J} |(x|x_\lambda)|^2 \quad (x \in X).$$

ii) Para cada $x \in X$, la familia $\{|(x|x_\lambda)|^2 : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y se verifica:

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2 + [\mathrm{dist}(x, M)]^2 \quad (x \in X)$$

donde M es el subespacio de X engendrado por $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. En particular, se verifica la desigualdad de Bessel

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in X).$$

Teorema 5.25. *Sea $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano X y M el subespacio vectorial de X engendrado por $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2, \quad (x \in X)$.

ii) M es denso en X.

iii) $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda \quad (x \in X)$.

iv) $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda)(x_\lambda|y) \quad (x, y \in X)$.

Definición 5.26. Un sistema ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ en un espacio prehilbertiano X, que verifique cualquiera de las afirmaciones del teorema anterior, recibe el nombre de *base ortonormal* de X. La igualdad $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda$ recibe el nombre de *desarrollo de Fourier* del vector $x \in X$ con respecto a la base ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, mientras que la afirmación iv) del teorema anterior suele conocerse como *igualdad de Parseval.* Recordemos que si Λ es un conjunto no vacío arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \in \ell_2^\Lambda$ es la función característica del conjunto $\{\lambda\}$, el conjunto $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de ℓ_2^Λ a la que suele denominarse *base canónica* de ℓ_2^Λ.

Con respecto al objetivo que motivó la discusión anterior tenemos, claramente, el siguiente resultado:

Corolario 5.27. *Si un espacio prehilbertiano X posee una base ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, entonces X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2^Λ.*

Veremos más adelante que un espacio prehilbertiano puede carecer de base ortonormal. Damos ahora dos condiciones suficientes para la existencia de base ortonormal. En primer lugar, para un espacio prehilbertiano separable puede construirse explícitamente una base ortonormal a partir de una base de Hamel numerable para un subespacio denso:

Lema 5.28 (Método de Gram-Schmidt). *Si $\{y_n\}$ es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio prehilbertiano X, existe un sistema ortonormal $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X tal que el subespacio engendrado por $\{x_k : 1 \le k \le n\}$ coincide con el engendrado por $\{y_k : 1 \le k \le n\}$, para todo natural n.*

Nótese que una construcción análoga a la anterior permite obtener, en el caso finito-dimensional, una base ortonormal a partir de cualquier base de Hamel. Enlazando los dos últimos resultados obtenemos:

Teorema 5.29. *i) Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio prehilbertiano de dimensión N.*

ii) Un espacio prehilbertiano es separable si, y sólo si, posee una base ortonormal numerable.

iii) Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.

iv) ℓ_2 es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert infinito-dimensional separable.

Pasamos a la segunda condición suficiente para la existencia de base ortonormal. Es claro que toda base ortonormal es un sistema ortonormal maximal, ya que el desarrollo de Fourier nos hace ver que sólo el vector cero puede ser ortogonal a todos los elementos de una base ortonormal. Es obvio que la familia de todos los sistemas ortonormales de un espacio prehilbertiano está ordenada inductivamente por inclusión. Del Lema de Zorn deducimos:

Lema 5.30. *En un espacio prehilbertiano, todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.*

Es el momento de involucrar el Teorema de la proyección ortogonal que hasta ahora no se había usado. Si $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un sistema ortonormal maximal en un espacio de Hilbert H, y M es el subespacio de H engendrado por dicho sistema, la maximalidad nos dice que $M^\perp = \{0\}$, lo que nos permite concluir que M es denso en H. Obtenemos así la primera parte del siguiente resultado, que clasifica, salvo isomorfismos isométricos, todos los espacios de Hilbert.

Teorema 5.31. *i) En un espacio de Hilbert, todo sistema ortonormal maximal es una base ortonormal.*

ii) Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal.

iii) Si $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, entonces H es isométricamente isomorfo a ℓ_2^Λ.

iv) Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal, llamado dimensión hilbertiana *del espacio.*

v) *Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana.*

Del teorema anterior se deduce nueva información sobre sistemas ortonormales arbitrarios, no necesariamente maximales, en un espacio de Hilbert, que merece ser destacada.

Corolario 5.32. *Sea H un espacio de Hilbert, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en H.*

i) *Si $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de escalares, la familia de vectores $\{\alpha_\lambda x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable si, y sólo si, lo es la familia de escalares $\{|\alpha_\lambda|^2 : \lambda \in \Lambda\}$.*

ii) *Si M es el subespacio cerrado de H engendrado por el conjunto $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ y P_M es la proyección ortogonal de H sobre M, se tiene*

$$P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda)x_\lambda \quad (x \in H).$$

El primer apartado del corolario anterior nos proporciona abundantes ejemplos de familias sumables en espacios de Hilbert que no son absolutamente sumables; $\{\frac{1}{n}e_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\{e_n\}$ es la base canónica de ℓ_2 es el ejemplo más sencillo. La comparación entre las nociones de base ortonormal y base de Hamel debe también comentarse. Es claro que si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita, toda base ortonormal de H es una base de Hamel y la dimensión algebraica de H coincide con su dimensión hilbertiana. Por el contrario, ninguna base ortonormal infinita puede ser una base de Hamel. Por supuesto, toda base ortonormal numerable es una base de Schauder.

Concluimos nuestro estudio de las bases ortonormales mostrando que la hipótesis de complitud y separabilidad son imprescindibles, en los resultados obtenidos.

Ejemplo 5.33. i) *En un espacio prehilbertiano un sistema ortonormal maximal puede no ser una base ortonormal.* Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base canónica de ℓ_2 y $x \in \ell_2$ la sucesión dada por $x(n) = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Si X es el subespacio de ℓ_2 engendrado por $\{x\} \cup \{e_n : n \geq 2\}$, se comprueba fácilmente que $\{e_n : n \geq 2\}$ es un sistema ortonormal maximal en X y no es una base ortonormal.

ii) *Un espacio prehilbertiano sin base ortonormal.* Consideremos los espacios de Hilbert ℓ_2 y $\ell_2^{\mathbb{R}}$ y pongamos $H = \ell_2 \times \ell_2^{\mathbb{R}}$ que es claramente un espacio de Hilbert con el producto escalar obvio. Utilizando el hecho de que la dimensión algebraica de ℓ_2 es el cardinal de $\mathbb{R}$, podemos conseguir una base de Hamel de ℓ_2 de la forma: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base (ortonormal) canónica de ℓ_2. Sea por otra parte $\{y_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ la base ortonormal canónica de $\ell_2^{\mathbb{R}}$ y $T : \ell_2 \to \ell_2^{\mathbb{R}}$ la aplicación lineal que verifica $T(e_n) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$ y $T(x_\lambda) = y_\lambda$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalmente sea X la gráfica de T:

$$X = \{(x, T(x)) : x \in \ell_2\}.$$

Es fácil ver que X es denso en H. Se sigue que toda base ortonormal de X es también una base ortonormal de H, luego X no puede tener una base ortonormal numerable. Sin embargo, todo sistema ortonormal en X es numerable.

Consideramos ahora el caso particular más importante de los resultados abstractos tratados antes. Todo espacio de Hilbert separable H es isométricamente isomorfo a ℓ_2, pero con frecuencia es importante conocer la forma concreta de un tal isomorfismo, equivalentemente, conocer una base ortonormal del espacio de Hilbert H. Para el caso $H = L_2([-\pi,\pi])$, el sistema trigonométrico es sin duda la más importante base ortonormal de H y nos da la ocasión de presentar la conexión entre los espacios de Hilbert y las series de Fourier.

Definición 5.34. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ consideremos la función e_n definida por:

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se comprueba inmediatamente que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2([-\pi,\pi])$, que recibe el nombre de *sistema trigonométrico.* Para $f \in L_2([-\pi,\pi])$ los coeficientes de Fourier de f vienen dados por:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

El sistema trigonométrico en $L_2([-\pi,\pi])$ es un sistema ortonormal maximal:

Teorema 5.35. *El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2([-\pi,\pi])$. Por tanto:*

i) Igualdad de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \quad (f, g \in L_2([-\pi,\pi])),$$

en particular,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad (f \in L_2([-\pi,\pi])).$$

ii) Desarrollo de Fourier: *Para $f \in L_2([-\pi,\pi])$, la serie de Fourier de f converge a f en $L_2([-\pi,\pi])$:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt}|^2 dt = 0.$$

iii) Teorema de Riesz-Fisher: *Para $\{c_n\} \in \ell_2^{\mathbb{Z}}$ existe una única función $f \in L_2([-\pi,\pi])$ tal que $\hat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

En suma, la aplicación $f \to \hat{f}$, definida por

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}, f \in L_2([-\pi,\pi]))$$

es un isomorfismo isométrico de $L_2([-\pi,\pi])$ sobre $\ell_2^{\mathbb{Z}}$.

Para probar el resultado anterior basta obtener la maximalidad del sistema trigonométrico en $L_2([-\pi,\pi])$. De las múltiples demostraciones que pueden hacerse de dicha maximalidad destacamos la que nos parece más directa y elemental, que aparece en el libro de Wilansky [43].

Concluimos este tema con una generalización, meramente formal, de algunos resultados anteriores, en términos de la siguiente noción abstracta:

Definición 5.36. Sea $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de espacios prehilbertianos; consideremos el conjunto:

$$X = \left\{ x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : \{\|x(\lambda)\|^2 : \lambda \in \Lambda\} \text{ es sumable} \right\}.$$

Se comprueba que X es un subespacio de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, para cualesquiera $x, y \in X$ la familia de escalares $\{(x(\lambda)|y(\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y definiendo

$$(x|y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x(\lambda)|y(\lambda)) \quad (x, y \in X)$$

se obtiene un producto escalar en X. El espacio prehilbertiano así obtenido recibe el nombre de *suma hilbertiana* (o suma ortogonal) de la familia $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ y escribiremos $X = \perp_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Proposición 5.37. *Sea $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H, dos a dos ortogonales, esto es $M_\lambda \subset M_\mu^\perp$ para $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$; notemos M al subespacio cerrado de H engendrado por $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.*

i) Si $x_\lambda \in M_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y la familia $\{\|x_\lambda\|^2 : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable, entonces la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ también es sumable.

ii) Recíprocamente, cada vector $x \in M$ se expresa de manera única en la forma $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ con $x_\lambda \in M_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, verificándose que $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|^2$.

En resumen M es (isométricamente isomorfo a) la suma hilbertiana $\perp_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Escribimos también en este caso

$$M = \perp_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda.$$

La proposición anterior, mera extensión formal de resultados anteriores, pone de manifiesto, en el caso de que Λ sea finito, una consecuencia del Teorema de la proyección ortogonal que hasta ahora no habíamos comentado.

Corolario 5.38. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \subset N^\perp$. Entonces $M + N$ es cerrado.*

La hipótesis $M \subset N^\perp$ no puede suprimirse:

Ejemplo 5.39. *Dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert cuya suma no es cerrada.* Se considera el operador $T \in L(\ell_2)$ dado por:

$$T(x)(n) = \frac{1}{n} x(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

y notemos que la imagen de T es densa en ℓ_2 (contiene a la base canónica) pero T no es sobreyectivo (la sucesión $\{1/n\}$ no está en la imagen de T). Sea entonces H la suma hilbertiana de ℓ_2 consigo mismo, M la gráfica de T y $N = \{(x, 0) : \ x \in \ell_2\}$. Es claro que M y N son subespacios cerrados y que $M + N = \{(x, T(y)) : \ x, y \in \ell_2\}$. Puesto que $T(\ell_2)$ no es cerrado, tampoco lo es $M + N$.

Bibliografía

Este capítulo pretende completar la formación anterior del alumno sobre espacios de Hilbert en un marco más general en lo que respecta a los dos primeros temas, de ahí que hayamos decidido no hacer demostraciones. Algunos textos de Análisis Funcional que incluyen los espacios de Hilbert son [3], [6], [11], [30], [34] y [39]. Nosotros hemos seguido casi por entero el libro de Conway, [11], sin olvidar el clásico de Choquet, [8].

6. Operadores compactos

Concluimos el último capítulo de este proyecto docente con dos temas dedicados a los fundamentos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert, junto con otro tema dedicado a la teoría de Riesz-Schauder para operadores compactos en espacios de Banach. Puede decirse que la teoría de operadores en espacios de Hilbert significó el nacimiento del Análisis Funcional y es la principal responsable de su posterior desarrollo. El primer tema, de carácter descriptivo, introduce los hechos básicos sobre operadores en espacios de Hilbert, para mostrar en el segundo tema el teorema de resolución espectral de operadores compactos normales en espacios de Hilbert complejos, así como para operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert reales. Como consecuencia obtenemos la diagonalización y el cálculo funcional acotado de tales operadores. Concluimos el segundo tema con la noción de equivalencia unitaria de operadores compactos normales entre espacios de Hilbert. El último tema se dedica a la teoría de Riesz-Schauder para operadores compactos en espacios de Banach, llegando al teorema de la alternativa de Fredholm para ecuaciones integrales, pasando por el teorema de Schauder, que pone en equivalencia la compacidad de un operador entre espacios de Banach con la de su adjunto.

6.1. Operadores en espacios de Hilbert

Este tema tiene un carácter descriptivo y preparatorio para el siguiente y recoge una serie de resultados básicos sobre operadores en espacios de Hilbert, destacando la existencia de adjunto, en la que se refleja la gran perfección geómetrica de los espacios de Hilbert, principal responsable de que los operadores en tales espacios admitan una teoría general elegante y bien desarrollada, que contrasta notoriamente con la mucho más oscura teoría de operadores en espacios de Banach generales. Aprovechamos para presentar algunos ejemplos clásicos de operadores asociados a ecuaciones integrales, cuyo estudio es anterior al de los espacios de Hilbert y motivó de hecho la consideración de tales espacios.

La existencia de adjunto de un operador lineal continuo entre espacios de Hilbert se deduce directamente de la representación de las formas sexquilineales continuas.

Teorema 6.1. *Sean X e Y espacios de Hilbert y $T \in L(X,Y)$.*

i) Existe una única aplicación $T^* : Y \to X$ verificando que:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad (x \in X, y \in Y).$$

ii) $T^* \in L(Y,X)$ y $T^{**} = T$.

iii) $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

iv) Para $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, se tiene

$$(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*, \ (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*.$$

v) Si Z es otro espacio de Hilbert y $S \in L(Y,Z)$, se tiene

$$(ST)^* = T^* S^*.$$

Definición 6.2. En lo sucesivo usaremos el término *operador* para referirnos a una aplicación lineal continua entre dos espacios de Hilbert. Si $T \in L(X,Y)$ es un operador, T^* recibe el nombre de operador *adjunto* de T. Como ya se ha hecho en el enunciado anterior, cuando ello no cause confusión, escribiremos Tx en lugar de $T(x)$ y notaremos por yuxtaposición ST, a la composición de dos operadores S y T, siempre que tenga sentido. Conviene resaltar la rica estructura que, según el teorema anterior, tiene el espacio vectorial $L(H)$ de los operadores de un espacio de Hilbert H en sí mismo, constituida por tres elementos: la norma de operadores, que convierte a $L(H)$ en un espacio de Banach, el producto (composición) que lo convierte en un álgebra asociativa con unidad I (el operador identidad en H, I_H si hay lugar a confusión) (hasta aquí nada nuevo) y la aplicación $T \to T^*$ que es una biyección conjugado-lineal que coincide con su inversa, esto es, una *involución.* Tenemos además una buena avenencia entre los tres tipos de estructura, que se concreta en las siguientes afirmaciones. En primer lugar, la norma es *submultiplicativa*

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \quad (S,T \in L(H)),$$

equivalentemente, el producto es una aplicación bilineal continua de norma 1 (descartado el caso trivial $H = \{0\}$), y $\|I\| = 1$; estamos por tanto ante un ejemplo de lo que se conoce como "álgebra de Banach unital". En segundo lugar, la involución es *multiplicativa*

$$(ST)^* = T^* S^* \quad (S,T \in L(H)),$$

en particular $I^* = I$. Finalmente, norma e involución están ligadas por la crucial propiedad

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \quad (T \in L(H))$$

denominada a veces "propiedad estelar de la norma" y también "axioma de Gelfand-Naimark" en honor de quienes pusieron de manifiesto su importancia en el estudio de C^*-álgebras.

Las consideraciones hechas en la definición anterior sólo tienen la intención de poner de manifiesto la riqueza estructural de $L(H)$, de la que depende en el fondo la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Sin ninguna dificultad obtenemos las siguientes relaciones entre las propiedades de un operador y las de su adjunto. Aprovechamos para caracterizar "algebraicamente" ciertas propiedades de un operador.

Proposición 6.3. *Sean X e Y espacios de Hilbert, $T \in L(X,Y)$.*

i) $\ker T = T^*(Y)^{\perp}$. *Como consecuencia, T es inyectivo sí, y sólo si, T^* tiene imagen densa.*

ii) *T es un isomorfismo si, y sólo si, lo es T^*, en cuyo caso se tiene $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

iii) *T es isométrico si, y sólo si, $T^* T = I_X$.*

iv) *T es un isomorfismo isométrico si, y sólo si,*

$$T^* T = I_X \quad T T^* = I_Y$$

esto es, T es biyectivo con $T^* = T^{-1}$.

Consideremos ahora tres tipos particulares de operadores. El primero viene motivado por el último apartado de la proposición anterior. La importancia de los otros dos se pondrá de manifiesto, sobre todo, en el siguiente tema.

Definición 6.4. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador; se dice que T es

unitario si $T^* T = T T^* = I$;

autoadjunto si $T^* = T$;

normal si $T^* T = T T^*$.

Notemos que un operador isométrico es unitario si, y sólo si, es normal.

Proposición 6.5. *Sea H un espacio de Hilbert y $P \in L(H)$ tal que $P^2 = P$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *P es autoadjunto.*

ii) *P es normal.*

iii) *P es la proyección ortogonal sobre $P(H)$.*

Volvamos a la correspondencia biunívoca entre operadores T en un espacio de Hilbert H y formas sexquilineales continuas φ_T en $H \times H$, dada por

$$\varphi_T(x, y) = (Tx|y) = (x|T^* y) \quad (x, y \in H).$$

Cada operador T da lugar por tanto a una forma cuadrática Q_T definida por

$$Q_T(x) = (Tx|x) = (x|T^* x) \quad (x \in H).$$

Observemos que T es autoadjunto si, y sólo si, φ_T es hermítica, en cuyo caso, T queda determinado por Q_T. La siguiente propiedad importante de los operadores autoadjuntos procede de esa observación:

Proposición 6.6. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$.*

i) *Si $T = T^*$, entonces*

$$\|T\| = \sup\{|(Tx|x)| : x \in H, \ \|x\| = 1\}.$$

En particular, si $T = T^*$ y $(Tx|x) = 0$ para todo $x \in H$, entonces $T = 0$.

ii) T *es normal si, y sólo si,* $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *para todo* $x \in H$.

En el caso complejo disponemos de ventajas adicionales, toda forma sexquilineal (por tanto todo operador) queda determinada por la forma cuadrática asociada y el operador es autoadjunto si, y sólo si, la correspondiente forma cuadrática toma sólamente valores reales. El resto de las afirmaciones del siguiente enunciado se comprueba inmediatamente:

Proposición 6.7. *Sea* T *un operador en un espacio de Hilbert* complejo H.

i) *Si* $(Tx|x) = 0$ *para todo* $x \in H$, *entonces* $T = 0$.

ii) T *es autoadjunto si, y sólo si,* $(Tx|x) \in \mathbb{R}$ *para todo* $x \in H$.

iii) T *se expresa de manera única en la forma* $T = A + iB$ *donde* $A, B \in L(H)$ *son operadores autoadjuntos;* T *es normal si, y sólo si,* $AB = BA$.

Es el momento de presentar algunos ejemplos importantes de operadores en espacios de Hilbert.

Ejemplo 6.8. i) *Matrices*: Extendiendo de forma natural la representación matricial de las aplicaciones lineales entre espacios finito-dimensionales, fijadas sendas bases ortonormales $\{x_i : i \in I\}$,

$\{y_j : j \in J\}$ en los espacios de Hilbert X e Y respectivamente, a cada operador $A \in L(X,Y)$ podemos asociar una "matriz", más propiamente una función $a : I \times J \to \mathbb{K}$, dada por

$$a(i,j) = (Ax_i|y_j) \quad (i \in I, j \in J).$$

Usando los desarrollos de Fourier, la función a determina al operador A por

$$Ax = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}(x|x_i)a(i,j)\right)y_j \quad (x \in X)$$

y el operador adjunto A^* viene determinado por la función $a^* : J \times I \to \mathbb{K}$ dada por

$$a^*(j,i) = \overline{a(i,j)} \quad (j \in J, i \in I).$$

Semejante representación matricial tiene muy poco valor a menos que la función a sea de un tipo muy especial. Por ejemplo no es fácil saber qué funciones de $I \times J$ en $\mathbb{K}$ representan a un operador y, salvo casos sumamente elementales, no se sabe calcular siquiera la norma del operador A en términos de la matriz a. La posibilidad de elegir las bases ortonormales de forma que a sea especialmente sencilla es más interesante. A título de ejemplo, en el caso $X = Y = H$, es claro que un operador $A \in L(H)$ es unitario si, y sólo si, $\{Tx_i : i \in I\}$ es una base ortonormal de H, lo que equivale a la posibilidad de elegir la base $\{y_i : i \in I\}$ de forma que a sea la "matriz unidad", es decir, la función característica de la diagonal de $I \times I$. Dicho de otra forma, la función a asociada a un operador unitario A puede considerarse como la matriz de transformación de coordenadas en un cambio de base ortonormal.

ii) *Operadores de multiplicación*: Consideremos el espacio de Hilbert $H = L_2[0,1]$. Cada $\phi \in L_\infty(\mu)$ da lugar a un operador $M_\phi \in L(H)$ mediante:

$$M_\phi(f) = \phi f \quad (f \in L_2[0,1]).$$

M_ϕ es un operador en $L_2[0,1]$ y $\|M_\phi\| \le \|\phi\|_\infty$. Se dice que M_ϕ es el operador de multiplicación por ϕ. Se tiene de hecho $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Así pues, $\phi \to M_\phi$ es una inyección lineal isométrica de $L_\infty[0,1]$ en $L(H)$ con $H = L_2[0,1]$. Nótese que $L_\infty[0,1]$ es un álgebra con el producto definido puntualmente y que $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$ para $\phi, \psi \in L_\infty[0,1]$, esto es, tenemos un monomorfismo de álgebras. Más aún, $L_\infty[0,1]$, tiene una involución natural, dada por

$$\phi^*(w) = \overline{\phi(w)} \quad (w \in [0,1], \phi \in L_\infty[0,1])$$

y es claro que $M_{\phi^*} = (M_\phi)^*$. Así, todo operador de multiplicación es un operador normal; M_ϕ es autoadjunto si, y sólo si, $\phi(w) \in \mathbb{R}$ para casi todo $w \in [0,1]$; M_ϕ es unitario si, y sólo si, $|\phi(w)| = 1$ para casi todo $w \in [0,1]$.

El caso $H = \ell_2$ merece destacarse, si $\phi = \{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de escalares, el operador de multiplicación por ϕ viene dado por

$$\left[M_\phi x\right](n) = \alpha_n x(n) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \ell_2)$$

y en la base canónica $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de ℓ_2 tiene una representación "diagonal", ya que

$$M_\phi e_n = \alpha_n e_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Así pues ℓ_∞ es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $L(\ell_2)$, en particular, $L(\ell_2)$ no es separable. Nótese también que si un operador $T \in L(\ell_2)$ verifica

$$Te_n = \lambda_n e_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

la sucesión $\{\lambda_n\}$ ha de estar acotada.

También en el caso $H = \ell_2^\Lambda$ donde Λ es un conjunto no vacío arbitrario volvemos a tener una perfecta identificación de ℓ_∞^Λ con un subespacio de $L(\ell_2^\Lambda)$ (operadores diagonales) siendo ciertas todas las afirmaciones hechas en el caso de $L_2[0,1]$.

iii) *Operadores de desplazamiento*: Sea $H = \ell_2^{\mathbb{Z}}$ y consideremos el operador $S \in L(H)$ dado por

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_2^{\mathbb{Z}}).$$

Claramente S es un operador unitario, que podemos ver como un operador T sobre $L_2([-\pi,\pi])$, es decir,

$$\widehat{Tf}(n) = \hat{f}(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, f \in L_2([-\pi,\pi])).$$

Si para $f \in L_2([-\pi,\pi])$ ponemos $g(t) = f(t)e^{-it}$ tenemos claramente $\hat{g}(n) = \hat{f}(n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$, luego $Tf = g$. En suma T es el operador de multiplicación por la función $t \to e^{-it}$.

La situación es diferente si tomamos, formalmente, el mismo operador, pero ahora en ℓ_2, es decir, $S \in L(\ell_2)$,

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \ell_2).$$

Ahora, para $x \in \ell_2$, se comprueba fácilmente que

$$[S^* x](n) = x(n-1) \text{ si } n \geq 2, \; [S^* x](1) = 0.$$

S^* recibe el nombre de *operador de desplazamiento unilateral.* Nótese que S^* es isométrico, equivalentemente $SS^* = I$, pero no es sobreyectivo (no es normal), $S^* S$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio $\{x \in \ell_2 : x(1) = 0\} = \{e_1\}^{\perp}$.

iv) *Operadores integrales*: Sea $K \in L_2([0,1] \times [0,1])$. El *operador integral de núcleo* K es, por definición, el operador $T_K \in L(L_2[0,1])$, definido por:

$$[T_K(f)](x) = \int_{\Omega} K(x,y) f(y) dy \quad (x \in [0,1], f \in L_2[0,1]).$$

El Teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder nos dicen que la función $y \mapsto K(x,y)f(y)$ pertenece a $L_1[0,1]$ y que

$$|\left[T_K f\right](x)| \leq \|f\|_2 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

para casi todo $x \in [0,1]$. Una nueva aplicación del Teorema de Fubini y obtenemos que $T_K f \in L_2[0,1]$ para $f \in L_2[0,1]$ y que $\|T_K f\|_2 \leq \|K\|_2$.

El operador adjunto T_K^* es el operador integral T_{K^*} cuyo núcleo viene dado por

$$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)} \quad (x,y \in [0,1]).$$

Un caso particular importante se presenta cuando K es la función característica del conjunto $\{(x,y) : 0 \leq y < x \leq 1\}$. El correspondiente operador integral es el *operador de Volterra,* V, dado por:

$$[Vf](x) = \int_0^x f(y) dy \quad (x \in [0,1], f \in L_2[0,1]).$$

Se calcula fácilmente el operador adjunto V^* y se comprueba igual de fácilmente que V no es normal.

Razonablemente cumplida la tarea ejemplificadora, planteémonos, de forma mucho más ingenua y como motivación para los operadores compactos, protagonistas en lo que sigue, qué operadores podemos construir abstractamente en un espacio de Hilbert del que no tenemos información alguna. Sólo disponemos del producto escalar, utilicémoslo:

Definición 6.9. Dados dos vectores u, v de un espacio de Hilbert H definimos $u \otimes v : H \to H$ por:

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad (x \in H).$$

Si $u \neq 0, v \neq 0$ la imagen de $u \otimes v$ es el subespacio unidimensional de H engendrado por v. En general llamaremos *rango* de un operador a la dimensión de su imagen. Notaremos $F(H)$ al subconjunto de $L(H)$ formado por los *operadores de rango finito.*

Reunimos en el siguiente enunciado, cuya demostración no ofrece dificultad alguna, una serie de hechos básicos sobre operadores de rango finito:

Proposición 6.10. *Sea H un espacio de Hilbert.*

i) *Para $u, v \in H$ se tiene $u \otimes v \in F(H)$,*

$$\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|, \quad [u \otimes v]^* = v \otimes u.$$

ii) *$F(H)$ es el subespacio de $L(H)$ engendrado por el conjunto*

$$\{u \otimes v : u, v \in H\},$$

esto es, cada operador de rango finito T puede expresarse en la forma

$$T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

con $n \in \mathbb{N}$, $u_k, v_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Además $F(H)$ es un ideal bilátero del álgebra $L(H)$ y $T^* \in F(H)$ para $T \in F(H)$.

Así pues, los operadores $u \otimes v$ definidos elementalmente a partir del producto escalar generan linealmente el espacio $F(H)$ de los operadores de rango finito, subespacio que es estable por las demás operaciones algebraicas de $L(H)$, producto e involución. Si H es finito dimensional es claro que $F(H) = L(H)$. En otro caso, $F(H)$ nunca es cerrado.

Nuestro objetivo ahora es caracterizar los operadores que pertenecen al cierre de $F(H)$. Es claro que si $T \in F(H)$ y B_H es, como siempre, la bola unidad de H, $T(B_H)$ es un conjunto acotado y está contenido en el espacio finito-dimensional $T(H)$, luego es relativamente compacto. Motivamos así el siguiente concepto:

Definición 6.11. Sea H un espacio de Hilbert. Un *operador compacto* en H es, por definición, una aplicación lineal $T : H \to H$ tal que la imagen por T de la bola unidad de H es un subconjunto relativamente compacto de H. Nótese que en particular $T \in L(H)$, ya que $T(B_H)$ es un conjunto acotado. Notaremos por $K(H)$ al subconjunto de $L(H)$ formado por los operadores compactos. Notemos que $T \in K(H)$ si, y sólo si, $T(A)$ es relativamente compacto para cada subconjunto acotado A de H, equivalentemente, para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en H, la sucesión $\{Tx_n\}$ admite una parcial convergente.

Teorema 6.12. *Sea H un espacio de Hilbert.*

i) *$K(H)$ es un ideal bilátero cerrado de $L(H)$ y $F(H) \subset K(H)$.*

ii) *Si $T \in K(H)$, $\overline{T(H)}$ es separable; si $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(H)}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es la proyección ortonormal de H sobre el subespacio engendrado por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ entonces $\{P_n T\}$ converge a T en $L(H)$. Como consecuencia, $K(H) = \overline{F(H)}$.*

iii) *Dado $T \in L(H)$ se tiene $T \in K(H)$ si y sólo si $T^* \in K(H)$.*

Completamos el tema con algunos ejemplos de operadores compactos y no compactos.

Ejemplo 6.13. i) Si $\{e_n\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert separable H y $T \in K(H)$, entonces $\{Te_n\}$ converge a cero. En particular ningún operador de multiplicación no nulo en $L_2([-\pi,\pi])$ es compacto.

La situación en ℓ_2 es más interesante; si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada y T es el operador de multiplicación dado por

$$[Tx](n) = \alpha_n x(n) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \ell_2),$$

es claro que $T \in K(H)$ siempre que $\{\alpha_n\} \to 0$. Recíprocamente, por lo dicho antes, si $T \in K(H)$ se tendrá $\{Te_n\} \to 0$, luego $\{\alpha_n\} \to 0$. Así pues los operadores de multiplicación compactos en ℓ_2 se corresponden con sucesiones convergentes a cero al igual que los operadores de multiplicación de rango finito se corresponden con las sucesiones casi-nulas.

ii) Todo operador integral del tipo considerado en los ejemplos anteriores es compacto. Ello se debe a las dos observaciones siguientes, de fácil comprobación:

En primer lugar, si $\{e_i : i \in I\}$ es una base ortonormal en $L_2[0,1]$, definiendo

$$\phi_{ij}(w) = e_i(w)\overline{e_j(w)} \quad (w \in [0,1], i, j \in I)$$

se tiene que $\{\phi_{ij} : i, j \in I\}$ es una base ortonormal en el espacio $L_2([0,1] \times [0,1])$.

En segundo lugar, es casi obvio que para $i, j \in I$ el operador integral de núcleo ϕ_{ij} es de rango 1. Se considera entonces la aplicación $K \mapsto T_K$ de $L_2([0,1] \times [0,1])$ en $L(L_2[0,1])$ que a cada núcleo K asocia el operador integral T_K. Tal aplicación es lineal y continua; puesto que sus valores en un subespacio denso de $L_2([0,1] \times [0,1])$ (el engendrado por $\{\phi_{ij} : i, j \in I\}$) son operadores de rango finito, deducimos que $T_K \in \overline{F(H)} = K(H)$ para $K \in L_2([0,1] \otimes [0,1])$, como se quería. En particular el operador de Volterra es compacto. Conviene decir que en el caso de los operadores integrales todo se podría haber hecho en el espacio $L_2(\mu)$, como siempre dependiendo de los conocimientos de la teoría de la medida.

6.2. El teorema espectral

Como resultado básico en la teoría espectral de operadores obtenemos en este tema el que suele denominarse "Teorema espectral" para un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo, usando técnicas completamente elementales. A tal fin, nos parece conveniente destacar las tres versiones equivalentes que el Teorema espectral puede adoptar. La primera consiste en descomponer el espacio ambiente en suma ortogonal de subespacios propios, en cada uno de los cuales el operador actúa como un múltiplo de la identidad; se conoce como resolución o descomposición espectral de un operador compacto normal y de ella se deduce claramente la posibilidad de "diagonalizar" un tal operador, esto es, de encontrar una base ortonormal del espacio formada por vectores propios para el operador. Por último, como tercera versión del teorema, menos importante en el presente contexto, pero que será la principal protagonista en ambientes más generales, obtenemos el cálculo funcional acotado en un operador compacto normal y presentamos algunas de sus aplicaciones. Como otra consecuencia importante del Teorema espectral se consigue la clasificación por equivalencia unitaria de los operadores compactos normales.

Como ya se comentó en el tema anterior, si $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, cada operador $T \in L(H)$ queda determinado por la función ("matriz") $a_T : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{K}$, definida por

$$a_T(\lambda, \mu) = (Te_\mu | e_\lambda) \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda).$$

Concretamente se tiene

$$Tx = \sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda} a_T(\lambda,\mu)(x|e_\mu)e_\lambda \qquad (x \in H) \tag{1}$$

expresión que se comprueba fácilmente usando los desarrollos de Fourier y propiedades conocidas de las familias sumables. Si se quiere resaltar el aspecto matricial de la representación anterior, basta pensar que (1) es equivalente a

$$(Tx|e_\lambda) = \sum_{\mu\in\Lambda} a_T(\lambda,\mu)(x|e_\mu) \quad (\lambda \in \Lambda, x \in H).$$

Viendo cada elemento $x \in H$ como el vector columna formado por sus coordenadas (coeficientes de Fourier) la expresión anterior nos da el "vector" Tx como "producto" de la "matriz" a_T por el "vector" x.

Como también se ha comentado ya, a pesar de que la función a_T es un objeto matemático más sencillo que el operador $T \in L(H)$, la anterior representación, incluso en el caso finito dimensional, tiene escaso valor, a menos que la matriz a_T tenga una forma muy sencilla. Puede decirse que el primer objetivo de la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert consiste en encontrar condiciones suficientes, y a ser posible necesarias, sobre un operador $T \in L(H)$, para que pueda elegirse la base ortonormal $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de forma que la matriz a_T tenga alguna forma sencilla.

A semejanza del caso finito-dimensional podemos plantearnos la posibilidad de que a_T sea una matriz diagonal, esto es

$$a_T(\lambda,\lambda) = \alpha_\lambda, \; a_T(\lambda,\mu) = 0 \qquad (\lambda,\mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu) \tag{2}$$

donde $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una cierta familia de escalares, con lo que la representación (1) del operador T tomaría la forma sencilla

$$Tx = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda (x|e_\lambda)e_\lambda \qquad (x \in H) \tag{3}$$

que muestra a T como un operador de multiplicación en ℓ_2^Λ. Si tal cosa se puede conseguir, se ha de tener obligatoriamente, como consecuencia de (3), que

$$Te_\lambda = \alpha_\lambda e_\lambda \qquad (\lambda \in \Lambda). \tag{4}$$

Recíprocamente, si se verifica (4), la definición de la matriz a_T nos dice que también se verifica (2) y hemos conseguido “diagonalizar” el operador T. Quedan así motivados los siguientes conceptos:

Definición 6.14. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador; se dice que $\alpha \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de T si existe un vector $x \in H$, con $\|x\| = 1$, tal que $Tx = \alpha x$, esto es, si

$$\ker(T - \alpha I) \neq \{0\},$$

en tal caso decimos también que ker $(T - \alpha I)$ es el *subespacio propio* asociado al autovalor α y sus elementos reciben el nombre de *vectores propios* de T, asociados al autovalor α. Notaremos $\sigma_p(T)$ al conjunto de los autovalores de T. Se dice que el operador T es *diagonalizable* si existe una base ortonormal de H formada por vectores propios de T, equivalentemente, si existe un sistema ortonormal $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ en H y una familia $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de escalares tal que

$$Tx = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda (x|e_\lambda) e_\lambda \quad (x \in H).$$

Es obvio que todo operador diagonalizable es normal. El primero de los siguientes ejemplos muestra hasta qué punto un operador (incluso compacto) no normal puede estar lejos de ser diagonalizable; el segundo pone de manifiesto la existencia de operadores normales sin autovalores. La comprobación de las afirmaciones que se hacen es un sencillo ejercicio:

Ejemplo 6.15. i) El operador de Volterra carece de autovalores.

ii) El operador de desplazamiento $S \in L(\ell_2^{\mathbb{Z}})$, dado por

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_2^{\mathbb{Z}})$$

es unitario, en particular normal y carece de autovalores. $S + S^*$ es autoadjunto y también carece de autovalores.

Así pues, encontrar condiciones suficientes para que un operador posea autovalores es una cuestión no trivial. Para operadores compactos y autoadjuntos la situación es particularmente agradable:

Lema 6.16. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $S \in L(H)$ un operador compacto autoadjunto. Entonces $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\alpha \in \sigma_p(S)$ tal que $|\alpha| = \|S\|$.*

Incluso en el caso finito-dimensional, un operador normal puede carecer de autovalores. Sin embargo, en el caso complejo, el lema anterior puede extenderse al caso de un operador compacto normal, y éste será el punto de ruptura para la obtención de la descomposición espectral de un tal operador.

Lema 6.17. *Si T es un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo H, entonces $\sigma_p(T) \neq \emptyset$. Además, se tiene* $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ *para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y, en particular*

$$\sigma_p(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T)\}.$$

Proposición 6.18. *Sea T un operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo H. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ pongamos*

$$E_\lambda = \ker(T - \lambda I).$$

i) Existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, E_λ tiene dimensión finita.

iii) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \mu$, se tiene $E_\lambda \subset E_\mu^\perp$. Equivalentemente,

$$P_\lambda P_\mu = P_\mu P_\lambda = 0$$

donde P_λ y P_μ son las proyecciones ortogonales de H sobre E_λ y E_μ respectivamente.

iv) Para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ es finito. Como consecuencia $\sigma_p(T)$ es numerable y el cero es su único posible punto de acumulación.

El siguiente resultado colma totalmente nuestras aspiraciones acerca de un operador compacto normal:

Teorema 6.19 (Resolución espectral de un operador compacto normal)**.** *Sea T un operador compacto normal, en un espacio de Hilbert complejo H, sea $\Lambda = \sigma_p(T)$ el conjunto de autovalores de T y, para $\lambda \in \Lambda$, sea P_λ la proyección ortogonal de H sobre el subespacio propio* $\ker(T - \lambda I)$ *asociado al autovalor λ. Entonces la familia $\{\lambda P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable en el espacio de Banach $L(H)$ y se verifica que:*

$$T = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda \tag{$*$}$$

Además, para $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, P_λ tiene rango finito y para $\lambda, \mu \in \Lambda$, con $\lambda \neq \mu$, se tiene $P_\lambda P_\mu = P_\mu P_\lambda = 0$.

Nótese que, recíprocamente, todo operador de la forma $(*)$ con las condiciones indicadas al final del enunciado anterior, es un operador compacto normal. Además, la forma que ha de tener el conjunto Λ queda claramente de manifiesto en la proposición anterior: Λ puede ser un conjunto finito o el conjunto de los términos de una sucesión convergente a cero, incluyendo o no al cero. Todas las posibilidades son fácilmente ejemplificables en cualquier espacio de Hilbert infinito-dimensional. En la mayoría de los textos consultados la expresión $(*)$ aparece en la forma

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{\lambda_n} \tag{$**$}$$

que se explica por los comentarios anteriores y la “sucesión” $\{\lambda_n\}$ se ordena de forma que $\{|\lambda_n|\}$ sea decreciente.

Consecuencia inmediata de la resolución espectral es:

Corolario 6.20 (Diagonalización de un operador compacto normal)**.** *Si T es un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo H, existe un sistema ortonormal numerable $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ en H y un conjunto de escalares $\{\alpha_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ tales que*

$$T = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma e_\gamma \otimes e_\gamma$$

siendo la familia del segundo miembro sumable en el espacio de Banach $L(H)$. En particular

$$Tx = \sum \alpha_\gamma (x|e_\gamma) e_\gamma \quad (x \in H)$$

y T es diagonalizable. Así pues, un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable si, y sólo si, es normal.

Aunque conseguir la forma diagonal del operador dada por el corolario anterior se había propuesto como objetivo en este tema por su claro e intuitivo contenido, la descomposición dada por la resolución espectral es preferible, ya que es claramente única, está canónicamente asociada al operador, mientras la diagonalización introduce un cierto grado de arbitrariedad en la elección de una base ortonormal para cada subespacio propio. Dedicamos el resto de este tema a obtener algunas aplicaciones importantes de dicha resolución espectral.

Para evitar repeticiones fijamos la siguiente nomenclatura:

Notación. En lo sucesivo H será un espacio de Hilbert complejo, T un operador compacto normal en H y pondremos

$$\Lambda = \sigma_p(T);$$

para $\lambda \in \Lambda$, escribiremos $E_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ y P_λ será la proyección ortogonal de H sobre E_λ.

La siguiente observación es importante en lo que sigue:

Corolario 6.21. *El espacio H es la suma hilbertiana de la familia $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.*

La utilidad de la descomposición en suma ortogonal obtenida en el corolario anterior se reflejará en la posibilidad de definir operadores en H cuyo comportamiento en cada subespacio E_λ se puede prefijar con libertad casi total. Ello es caso particular del siguiente resultado, extensión natural de la definición de los operadores de multiplicación en ℓ_2.

Proposición 6.22. *Supongamos que dos espacios de Hilbert X e Y están descompuestos en sendas sumas hilbertianas de subespacios, de la forma $X = \perp_{i\in I} X_i$, $Y = \perp_{i\in I} Y_i$. Para cada $i \in I$, sea $T_i \in L(X_i, Y_i)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\exists M > 0 : \|T_i\| \leq M \quad \forall i \in I$.

ii) Existe un (único) operador $T \in L(X,Y)$ tal que $Tx = T_i(x)$ para todo $x \in X_i$ y todo $i \in I$. Concretamente se tiene

$$Tx = \sum_{i\in I} T_i P_i x \quad (x \in X)$$

donde, para cada $i \in I$, P_i es la proyección ortogonal de X sobre X_i.

Volviendo a la notación introducida, la resolución espectral del operador compacto normal $T \in L(H)$ puede ahora visualizarse de la siguiente forma. Teniendo en cuenta que

$$H = \perp_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$$

el Teorema de resolución espectral implica que T es el único operador en H que verifica

$$Tx = \lambda x \quad \forall x \in E_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

De manera más general, cabe pensar en los operadores (ya no necesariamente compactos) cuya restricción a cada subespacio E_λ es un múltiplo de la identidad. Tales operadores forman una subálgebra de $L(H)$ que veremos puede identificarse, a todos los efectos (norma, producto e involución), con el álgebra ℓ_∞^Λ, cuyo producto e involución se definen de manera obvia.

Definición 6.23. Para cada función acotada $\phi \in \ell_\infty^\Lambda$, denotaremos por $\phi[T]$ al único operador en H que verifica

$$\phi[T](x) = \phi(\lambda)x \quad (x \in E_\lambda,\ \lambda \in \Lambda),$$

equivalentemente,

$$\phi[T](x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi(\lambda) P_\lambda(x) \quad (x \in H).$$

La aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ recibe el nombre de *cálculo funcional acotado* en el operador T.

Teorema 6.24. *i) La aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ de ℓ_∞^Λ en $L(H)$ es lineal e isométrica, es un homomorfismo de álgebras y verifica que $\phi[T]^* = \overline{\phi}(T)$, donde $\overline{\phi}(\lambda) = \overline{\phi(\lambda)}$ para $\lambda \in \Lambda$, $\phi \in \ell_\infty^\Lambda$. Además $I = \phi_0[T]$, $T = \phi_1[T]$ donde $\phi_0(\lambda) = 1$ y $\phi_1(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in \Lambda$.*

ii) Para un operador $S \in L(H)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *a) $\exists \phi \in \ell_\infty^\Lambda : \phi[T] = S$.*
- *b) Todo operador que conmute con T conmuta con S, esto es, $A \in L(H)$, $TA = AT \Rightarrow SA = AS$.*

Enunciamos a continuación algunas aplicaciones típicas del cálculo funcional.

Definición 6.25. Se dice que un operador A en el espacio de Hilbert complejo H es *positivo* si verifica que $(Ax|x)$ es un número real no negativo para todo $x \in H$. En particular, A es autoadjunto.

Corolario 6.26. *Sea T un operador compacto normal en el espacio de Hilbert complejo H.*

i) T es positivo si, y sólo si, todos los autovalores de T son números reales no negativos.

ii) T es autoadjunto si, y sólo si, todos los autovalores de T son números reales. En tal caso T se expresa, de manera única, en la forma $T = A - B$ donde A y B son operadores compactos positivos y $AB = BA = 0$.

iii) Si T es positivo existe un único operador compacto y positivo S tal que $S^2 = T$.

iv) Existe un operador compacto y positivo A y un operador unitario U tales que $T = AU$.

Concluimos el tema con el estudio de la equivalencia unitaria para operadores compactos normales. Puesto que un isomorfismo isométrico entre espacios de Hilbert permite la identificación total de dichos espacios, la siguiente relación de equivalencia entre operadores resulta completamente natural.

Definición 6.27. Sean X e Y espacios de Hilbert, $T \in L(X)$, $S \in L(Y)$; se dice que los operadores S y T son *unitariamente equivalentes* si existe un isomorfismo isométrico U de X sobre Y tal que: $S = UTU^{-1}$. Sea ahora T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo H, y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ sea $m_T(\lambda)$ la dimensión hilbertiana de $\ker(T - \lambda I)$. La ley m_T así definida recibe el nombre de *función de multiplicidad* del operador T. Nótese que $m_T(\lambda) \neq 0$ solamente cuando $\lambda \in \sigma_p(T)$ en cuyo caso, si $\lambda \neq 0$, $m_T(\lambda)$ es un número natural, mientras $m_T(0)$ puede ser un cardinal arbitrario.

Teorema 6.28. *Dos operadores compactos normales en sendos espacios de Hilbert complejos son unitariamente equivalentes si, y sólo si, tienen la misma función de multiplicidad.*

6.3. La Teoría de Riesz-Schauder

Vamos a tratar en este tema una serie de resultados cuyo descubrimiento por F. Riesz en las primeras décadas de este siglo significó en gran medida el nacimiento del Análisis Funcional. El intento de formalizar matemáticamente, consecuentemente de abstraer y generalizar, los trabajos de Fredholm sobre las ecuaciones integrales que llevan su nombre, fue el detonante para el estudio de la teoría espectral de operadores compactos, primero en espacios de Hilbert, y después en espacios de Banach más generales. Utilizaremos libremente una serie de resultados posteriores a los trabajos de Riesz que permiten trabajar con más comodidad.

Comenzamos extendiendo la noción de operador compacto, introducida ya para espacios de Hilbert.

Definición 6.29. Sean X e Y espacios de Banach. Se dice que una aplicación lineal $T\colon X \to Y$ es un *operador compacto* si la imagen por T de la bola unidad de X es un subconjunto relativamente compacto de Y, equivalentemente, si T transforma cada subconjunto acotado de X en un subconjunto precompacto de Y, o si, para cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ admite una parcial convergente en la topología de la norma de Y. Notaremos $K(X,Y)$ al conjunto de los operadores compactos de X en Y, y escribiremos simplemente $K(X)$ en lugar de $K(X,X)$. Es claro que $K(X,Y)$ es un subespacio de $L(X,Y)$; si Z es otro espacio de Banach, $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$, es también evidente que $ST \in K(X,Z)$ siempre que $T \in K(X,Y)$ o $S \in K(Y,Z)$; en particular $K(X)$ es un ideal bilátero del álgebra de Banach $L(X)$. Si X tiene dimensión infinita, dicho ideal es propio, ya que $I \notin K(X)$ como consecuencia obvia del Teorema de Riesz

El Teorema de Hahn-Banach nos permite construir operadores compactos no nulos entre dos espacios de Banach arbitrarios y, en realidad, estos son esencialmente los únicos operadores que se pueden construir explícitamente si no se dispone de alguna información adicional sobre la estructura de los espacios de Banach en cuestión.

Definición 6.30. Si X e Y son espacios de Banach, $u \in X^*$, $v \in Y$ definimos:

$$[u \otimes v](x) = u(x)v \quad (x \in X).$$

Es claro que $u \otimes v \in L(X,Y)$, $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$; si $u, v \neq 0$, la imagen de $u \otimes v$ es el subespacio unidimensional de Y engendrado por v. En general llamamos *rango* de un operador $T \in L(X,Y)$ a la dimensión (algebraica) de la imagen de T. Notamos $F(X,Y)$ al subespacio de $L(X,Y)$ formado por los *operadores de rango finito*. Es claro que si Z es otro espacio de Banach, $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $ST \in F(X,Z)$ siempre que $T \in F(X,Y)$ o $S \in F(Y,Z)$; en particular $F(X) := F(X,X)$ es un ideal bilátero de $L(X)$.

Nuestra primera observación no evidente sobre operadores compactos consiste en que $K(X,Y)$ es siempre cerrado en $L(X,Y)$, cosa que puede probarse exactamente con el mismo argumento ya usado para el caso en que $X = Y = H$ es un espacio de Hilbert. Agrupamos esta observación con otra serie de hechos elementales, en el siguiente enunciado:

Proposición 6.31. *Sean X e Y espacios de Banach.*

i) *$F(X,Y)$ es el subespacio de $L(X,Y)$ engendrado por el conjunto*

$$\{u \otimes v : u \in X^*,\ v \in Y\},$$

equivalentemente, todo operador $T \in F(X,Y)$ se expresa en la forma $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ con $n \in \mathbb{N}$, $u_k \in X^*$, $v_k \in Y$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

ii) *$K(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $L(X,Y)$ verificándose que*

$$\overline{F(X,Y)} \subset K(X,Y).$$

En particular, $K(X)$ es un ideal bilátero cerrado de $L(X)$.

iii) *Si $T \in K(X,Y)$, $\overline{T(X)}$ es un espacio de Banach separable.*

Naturalmente se deja sentir la ausencia de la afirmación $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$, que es falsa en general, asunto que ni tan siquiera vamos a tantear, dado que incluso poner un ejemplo en que no se verifique la igualdad anterior es una tarea ardua. Sin embargo, podemos probar el siguiente resultado que cubre muchos casos interesantes:

Proposición 6.32. *Sean X e Y espacios de Banach; supongamos que existe una sucesión $\{S_n\}$ en $F(Y)$ verificando que*

$$\sup_n \{\|S_n\|\} < \infty, \quad \big\{\|S_n y - y\|\big\} \to 0, \quad \forall y \in Y.$$

Entonces $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$. En particular, si Y posee una base de Schauder, se tiene $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$.

También en algunos espacios clásicos, como los de tipo $C(K)$, es fácil comprobar que se verifica la propiedad de aproximación:

Proposición 6.33. *Sea K un espacio topológico compacto y $X = C(K)$, entonces $K(X) = \overline{F(X)}$.*

Una sencilla aplicación del Teorema de la gráfica cerrada nos permitirá obtener fácilmente el hecho, en cierto modo sorprendente, de que la compacidad de un operador puede deducirse con frecuencia del sólo conocimiento de su imagen:

Teorema 6.34. *Sean X e Y espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$; si existe un espacio de Banach Z y un operador $S \in K(Z,Y)$ tales que $T(X) \subset S(Z)$, entonces T es compacto.*

Observamos a continuación el comportamiento de los operadores compactos con respecto a las topologías débiles, estableciendo que un operador compacto es "más que continuo". Otros resultados fundamentales del Capítulo III entrarán ahora en juego:

Teorema 6.35. *Sean X e Y espacios de Banach. Si $T \in K(X,Y)$, entonces T es secuencialmente continuo cuando se considera en X la topología débil y en Y la topología de la norma. Si X es reflexivo, es cierto el recíproco.*

Notemos que la hipótesis de reflexividad no puede suprimirse en el teorema anterior. La identidad de (ℓ_1, w) en $(\ell_1, \|\cdot\|)$ es secuencialmente continua y no es un operador compacto. Si se prueba el resultado anterior, aparece una idea que merece ser destacada, nueva incluso para espacios de Hilbert:

Corolario 6.36. *Si X es un espacio de Banach reflexivo, Y un espacio de Banach arbitrario y $T \in K(X,Y)$, entonces la imagen por T de la bola cerrada unidad de X es compacta en Y.*

Con argumentos similares a los del teorema anterior se puede conseguir una caracterización de los operadores compactos, en términos de la topología débil-$*$ del espacio dual.

Proposición 6.37. *Sean X e Y espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T es compacto.*

ii) *T^* es continuo cuando se considera en Y^* la topología débil-$*$ y en X^* la topología de la norma.*

Concluimos nuestro breve estudio general de los operadores compactos entre espacios de Banach con el siguiente resultado importante:

Teorema 6.38 (Schauder)**.** *Sean X e Y espacios de Banach; un operador $T \in L(X,Y)$ es compacto si, y sólo si, lo es T^*.*

Pasamos a considerar ahora la teoría espectral para operadores compactos en espacios de Banach. Los resultados que siguen se deben a F. Riesz, salvo los que involucran al operador adjunto, que de alguna forma precisan el teorema anterior y se deben a J. Schauder, de ahí el nombre de Teoría de Riesz-Schauder con que se conocen estos resultados, a los que el Análisis Funcional debe en gran medida su propia existencia.

Teorema 6.39. *Sea X un espacio de Banach complejo, $T \in K(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

i) *El espacio $\ker(\lambda I - T)$ es finito-dimensional.*

ii) *El espacio $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado y*

$$[\ker(\lambda I - T)]^\circ = (\lambda I - T^*)(X^*)$$

$$\left[\ker(\lambda I - T^*)\right]^\circ = (\lambda I - T)(X),$$

donde los polares se toman en el par dual (X, X^*).

Si $T : X \longrightarrow X$ es una aplicación lineal, la sucesión de espacios $\ker T^n$ es creciente. Si $\ker T^n \neq \ker T^{n+1}$ para todo n, diremos que el ascendente de T es $+\infty$; en otro caso, diremos que T tiene ascendente finito y se define su ascendente como el menor natural n tal que $\ker T^n = \ker T^m$ para todo m posterior a n. La sucesión $T^n(X)$ es decreciente; si no estaciona se dice que T tiene descendente infinito, en otro caso, se define el descendente como el mínimo natural n tal que $T^n(X) = T^m(X)$ para todo m posterior a n. En el resultado que sigue usaremos el Lema de Riesz para espacios normados: Si Y es un subespacio cerrado propio de un espacio normado X, para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento x de la esfera unidad de X tal que $dist(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Teorema 6.40. *Si T es un operador compacto en un espacio de Banach X, entonces para $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ se verifica que $\lambda I - T$ tiene ascendente y descendente finito.*

Un operador $T \in L(X, Y)$ (X, Y espacios de Banach) se dice de Fredholm si el subespacio $\ker T$ tiene dimensión finita y $T(X)$ tiene codimensión finita. En este caso, se define el índice de Fredholm de T ($\text{Ind } T$) como la diferencia entre la dimensión de $\ker T$ y la codimensión de $T(X)$.

El siguiente resultado es fundamental en la teoría de Fredholm:

Proposición 6.41. *Sean $T : X \longrightarrow Y$ y $S : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones lineales de Fredholm. Entonces ST es Fredholm y se verifica:*

$$Ind\ ST = Ind S + Ind\ T.$$

Damos la siguiente inmediata aplicación del concepto de índice de Fredholm:

Teorema 6.42. *Sea X un espacio de Banach, $T \in K(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

i) El operador $\lambda I - T$ es de Fredholm y tiene índice cero.

ii) Si n es el ascendente (finito) de $\lambda I - T$, entonces

$$X = \ker(\lambda I - T)^n \oplus (\lambda I - T)^n(X).$$

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene:

Corolario 6.43. *El operador $\lambda I - T$ es inyectivo si, y sólo si, es sobreyectivo.*

Disponemos ya de todos los elementos para conseguir la siguiente descripción del espectro de un operador compacto:

Teorema 6.44. *Sea T un operador compacto en un espacio de Banach X, entonces el espectro de T es numerable, todo elemento no nulo del espectro es un autovalor de T y el origen es su único posible punto de acumulación. Además si λ es un autovalor no nulo de T, entonces*

$$\dim \ker(\lambda I - T) = \dim \ker(\lambda I - T^*).$$

Nada mejor para concluir este tema que un brillante ejemplo de aplicación del teorema anterior. Daremos precisamente el ejemplo que motivó a F. Riesz para crear su teoría:

Ejemplo 6.45. Sea $X = C[a,b]$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas en un intervalo compacto $[a,b]$ de la recta real. Consideremos una función continua

$$k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$$

y pongamos

$$[Tx](s) = \int_a^b k(s,t)x(t)\, dt \quad (x \in X, a \le s \le b).$$

Es fácil ver que $Tx \in X$ para $x \in X$, y de hecho $T \in L(X)$, verificándose

$$\|Tx\| \le M\|x\| \quad (x \in X)$$

donde $M = \text{máx}\{|k(s,t)| : s,t \in [a,b]\}$. El operador T así definido recibe el nombre de *operador integral de Fredholm* de núcleo k. Aplicando el Teorema de Ascoli-Arzelà se comprueba que T es un operador compacto. Para sacar todo el partido posible, es conveniente hacer la siguiente observación acerca del operador adjunto T^*. Consideremos la aplicación $J : X \to X^*$ definida por

$$[Jx](y) = \int_a^b y(t)x(t)\, dt.$$

Es claro que $Jx \in X^*$ para $x \in X$ y se prueba fácilmente que

$$\|Jx\| = \int_a^b |x(t)|\, dt$$

con lo que la aplicación J es inyectiva. Aplicando el Teorema de Fubini, para $x, y \in X$ tenemos:

$$\left[T^* Jx\right](y) = \left[J(\widehat{T}x)\right](y)$$

donde $\widehat{T}$ es el operador integral de Fredholm cuyo núcleo $\widehat{k}$ viene dado por

$$\widehat{k}(s,t) = k(t,s) \quad (s,t \in [a,b]).$$

Así pues $T^* J = J\widehat{T}$ y las propiedades de T^* que resultan del teorema anterior pueden traducirse en términos de $\widehat{T}$.

Aplicando el teorema anterior, y teniendo en cuenta las observaciones del ejemplo anterior obtenemos:

Corolario 6.46 (Alternativa de Fredholm)**.** *Sea $[a,b]$ un intervalo compacto en la recta real, $k : [a,b]^2 \to \mathbb{C}$ una función continua y μ un número complejo no nulo. Se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

a) Las ecuaciones

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(s,t)x(t)\, dt \quad a \le s \le b \tag{1}$$

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(t,s)x(t)\, dt \quad a \le s \le b \tag{2}$$

tienen solución única $x \in C[a,b]$ para cada $y \in C[a,b]$.

b) Las ecuaciones

$$x(s) = \mu \int_a^b k(s,t)x(t)\, dt \quad a \le s \le b \tag{3}$$

$$x(s) = \mu \int_a^b k(t,s)x(t)\, dt \quad a \le s \le b \tag{4}$$

tienen soluciones $x \in C[a,b]$ no idénticamente nulas.

Si se verifica b), las soluciones de las ecuaciones (3) *y* (4) *son subespacios de $C[a,b]$ con la misma dimensión finita; fijada $y \in C[a,b]$, la ecuación* (1) *(resp.* (2)*) tiene solución $x \in C[a,b]$ si, y sólo si,*

$$\int_a^b y(s)z(s)\, ds = 0$$

para cualquier solución z de la ecuación (4) *(resp.* (3)*). Finalmente, el conjunto de los números complejos no nulos μ para los cuales se verifica b) es numerable y carece de puntos de acumulación.*

Bibliografía

Algunos textos de Análisis Funcional que incluyen la teoría de operadores en espacios de Hilbert son [3], [6], [11], [30], [34] y [39]. Nosotros hemos seguido casi por entero el libro de Conway, [11], sin olvidar el clásico de Choquet, [8]. Para la teoría de Riesz-Schauder hemos seguido el texto de Murphy [33], «plagiando» nuestro último corolario del texto de Brown-Page [6].

A. Teoría de la medida

En este apéndice incluimos una colección de resultados básicos de Teoría de la Medida que serán útiles para el desarrollo del curso de Análisis Funcional. Primero presentamos los espacios $L_p(\mu)$ que son ejemplos clásicos de espacios normados ($p \geq 1$); si los conocimientos de medida de los alumnos son muy restringidos, se puede optar por trabajar solamente con los espacios de medida asociados a la medida de Lebesgue en un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Al menos la presentación de estos espacios pensamos que se debe de hacer en esta asignatura. Quizás algunos de los resultados que se incluyen en el apéndice, como el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz, podrían usarse sin dar una demostración, en caso de que se necesiten. Esta postura está justificada porque actualmente existe en la Licenciatura de Matemáticas una asignatura dedicada especialmente a estos tópicos, llamada precisamente Teoría de la medida.

Empezamos presentando los elementos con los que trabajaremos:

Definición A.1. Sea Ω un conjunto; una familia $\mathscr{A}$ de partes de Ω es una σ-álgebra si es estable por complementos y por uniones numerables y $\Omega \in \mathscr{A}$. Una función $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty]$ es una medida (positiva) si verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y para cualquier familia de conjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de la σ-álgebra $\mathscr{A}$, disjuntos dos a dos, se verifica

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Un espacio de medida es una terna $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ donde Ω es un conjunto, $\mathscr{A}$ una σ-álgebra de partes de Ω y μ una medida. Si $\mathscr{B}$ es una σ-álgebra de partes de un conjunto Λ, una función $f : \Lambda \longrightarrow \Omega$ es medible si $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}$ para cada $A \in \mathscr{A}$.

Para probar algunas de las propiedades de la integral asociada a una medida resulta útil el siguiente Teorema de aproximación de Lebesgue:

Teorema A.2. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función medible. Existen funciones simples (sólo toman un número finito de valores) positivas medibles $\{s_n\}$ definidas en Ω tales que*

i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.

ii) $s_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $x \in \Omega$.

Para una función característica de un conjunto $A \in \mathscr{A}$ se define $\int_\Omega \chi_A \, d\mu = \mu(A)$; para funciones simples medibles (combinación lineal de funciones características) se define la integral de la única forma posible para que sea lineal. Para una función medible y positiva f se puede definir su integral respecto de la medida μ por

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup\left\{\int_\Omega s \, d\mu : s \quad \text{es simple y } \ 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Usando el Teorema de Lebesgue se puede probar:

Teorema A.3 (de la convergencia monótona)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en Ω y supongamos que*

$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le \infty$ *para todo* $x \in \Omega$.

$f_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $x \in \Omega$.

Entonces f es medible y

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \to \int_\Omega f \, d\mu.$$

Para definir la integral de una función medible valuada real, se descompone ésta en diferencia de dos positivas (su parte positiva y negativa), y se dice que la función de partida es integrable si las integrales de la parte positiva y negativa son finitas; se define la integral por linealidad. El otro resultado de buena avenencia de la integral con la convergencia puntual es el que sigue:

Teorema A.4 (de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles en Ω tales que existe $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Si existe una función integrable g tal que*

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in \Omega),$$

entonces, f es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = 0,$$

en particular, $\int_\Omega f_n \, d\mu \to \int_\Omega f \, d\mu$.

Con las desigualdades de Hölder y Minkowski como paso previo obligado, pasamos a definir los espacios normados $L_p(\mu)$.

Lema A.5. *Sean f, g funciones medibles positivas en Ω. Se verifica:*

i) Desigualdad de Hölder*: Si $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene:*

$$\int_\Omega fg \, d\mu \le \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

ii) Desigualdad de Minkowski*: Si $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$, se tiene:*

$$\left(\int_\Omega (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega g^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Definición A.6. Para $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$, definimos

$$\mathscr{L}_p(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : \ f \text{ medible}, \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Gracias a la desigualdad de Minkowski sabemos que $\mathscr{L}_p(\mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^\Omega$, así como que la función $\nu_p : \mathscr{L}_p(\mu) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in \mathscr{L}_p(\mu))$$

es una seminorma. Se verifica $\nu_p(f) = 0$ si, y sólo si, f se anula salvo en un conjunto de medida nula. Sea pues

$$N(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : \ f \text{ medible}, \ \mu(\{\omega \in \Omega : \ f(\omega) \neq 0\}) = 0\}.$$

Es claro que $N(\mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{L}_p(\mu)$; notaremos

$$L_p(\mu) = \mathscr{L}_p(\mu)/N(\mu).$$

A efectos de notación, identificamos cada clase de equivalencia en $L_p(\mu)$ con uno de sus representantes. Definiendo:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in L_p(\mu)),$$

la aplicación $\|\cdot\|_p$ está bien definida y es una norma en $L_p(\mu)$. En lo sucesivo $L_p(\mu)$ se considerará siempre como espacio normado mediante $\|\cdot\|_p$. Si A es un subconjunto de Ω y existe un conjunto medible B tal que $\Omega \setminus A \subset B$ y $\mu(B) = 0$, decimos que $\omega \in A$ *casi por doquier* con respecto a la medida μ, y escribimos "$\omega \in A$ $[\mu]$-c.p.d.", omitiendo la referencia a la medida μ si no hay lugar a confusión.

En el caso particular de que se tome como σ-álgebra el conjunto $\mathscr{P}(\Omega)$, y como medida μ la medida que cuenta el número de elementos, al espacio $L_p(\mu)$ resultante lo notaremos por ℓ_p^Ω.

Los resultados que relacionan la convergencia puntual de funciones y la de las integrales correspondientes nos permiten obtener:

Teorema A.7 (Riesz-Fisher)**.** *Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida arbitrario y $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.*

Además, se puede obtener la siguiente relación entre varias de las nociones de convergencia:

Proposición A.8. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión convergente en $L_p(\mu)$,entonces converge en medida. De toda sucesión convergente en medida $\{g_n\} \to g$ se puede extraer una sucesión parcial $\{g_{\sigma(n)}\}$ que converge puntualmente en Ω a g casi por doquier.*

Por último, usando una vez más el Teorema de aproximación de Lebesgue se puede conseguir el siguiente resultado:

Proposición A.9. *Sea $p \geq 1$, entonces el conjunto de funciones simples en $L_p(\mu)$ es denso en norma.*

A continuación presentamos dos de los teoremas que son útiles para trabajar con algunos de los espacios que aparecerán durante el curso: el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de representación de Riesz. Para enunciar el primero de ellos, introducimos la siguiente terminología:

Definición A.10. Una función $\lambda : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una medida compleja si verifica:

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

para cualquier sucesión $\{A_n\}$ de elementos de $\mathscr{A}$ disjuntos dos a dos. Para una medida compleja λ se define su variación $|\lambda|$ como la mínima medida positiva tal que $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$ para todo conjunto $A \in \mathscr{A}$. Se dice que una medida λ es *absolutamente continua* con respecto a una medida $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ y escribimos $\lambda \ll \mu$ cuando verifica:

$$E \in \mathscr{A}, \;\; \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

Dada una medida compleja μ y una función $f \in L_1(\mu)$, la aplicación

$$A \to \int_A f \, d\mu$$

es una medida y es inmediato ver que es absolutamente continua con respecto a μ. El Teorema de Radon-Nikodym da el recíproco al resultado anterior, al menos para medidas σ-finitas (Ω es unión de una sucesión de conjuntos medibles de medida finita).

Teorema A.11 (de Radon-Nikodym)**.** *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y λ una medida compleja en la σ-álgebra $\mathscr{A}$, absolutamente continua con respecto a μ. Existe una función $f \in \mathscr{L}_1(\mu)$ tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \qquad \forall E \in \mathscr{A}.$$

Además, si λ es real se puede conseguir que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ y, si λ es positiva, que $f(\Omega) \subset [0,\infty[$.

El Teorema de Radon-Nikodym permite probar sin dificultad lo siguiente:

Corolario A.12 (Descomposición polar de una medida compleja)**.** *Sea $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible y $\lambda : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja. Existe una función medible $h : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $|h(\omega)| = 1$ para todo $\omega \in \Omega$ y*

$$\lambda(E) = \int_E h \, d|\lambda| \qquad \forall E \in \mathscr{A}.$$

Si λ es una medida con valores en $\mathbb{R}$ se puede conseguir que h tome solamente los valores 1 y -1.

Resulta también interesante la descomposición $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ de una medida real como diferencia de dos medidas positivas, conocida como *"descomposición de Jordan"* de λ, es la partición del conjunto Ω en dos conjuntos que soportan la carga positiva y negativa de λ respectivamente:

Corolario A.13. *Sea* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espacio medible y* λ *una medida real en* $\mathscr{A}$*. Existen conjuntos* $A, B \in \mathscr{A}$ *tales que* $A \cup B = \Omega$*,* $A \cap B = \emptyset$ *y*

$$\lambda^+(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda^-(E) = -\lambda(B \cap E), \qquad \forall E \in \mathscr{A}.$$

Por tanto $\lambda(E) \geq 0$ *para* $E \subset A$ *y* $\lambda(E) \leq 0$ *para* $E \subset B$*.*

Se dice que los conjuntos A y B forman una *descomposición de Hahn* de Ω con respecto a la medida real λ. El par (A, B) no es en general único, pero sí lo es esencialmente, en el sentido de que si (A_1, B_1) es otra descomposición, se tiene

$$|\lambda|[(A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A)] = |\lambda|[(B \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus B)] = 0.$$

La demostración es una consecuencia de la descomposición polar de λ.

El último de los resultados que enunciaremos en este apéndice es el Teorema de representación de Riesz; para ello introducimos la siguiente notación:

Notación. Para un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, L, $C_0(L)$ será el espacio de Banach de las funciones continuas $f : L \to \mathbb{K}$ que se anulan en el infinito, esto es, tales que el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto para cualquier $\varepsilon > 0$, con norma dada por:

$$\|f\| = \text{máx}\{|f(x)| : \ x \in L\}.$$

Definición A.14. Si X es un espacio topológico de Hausdorff, *una medida de Borel* en X es una medida (positiva, real o compleja) definida en la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}$(la mínima que generan los conjuntos abiertos) de X. Si μ es una medida de Borel positiva en X, un conjunto de Borel $E \in \mathscr{B}$ es *regular exterior* con respecto a μ si verifica que:

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : \ U \text{ abierto}, \ E \subset U \subset X\},$$

mientras que $E \in \mathscr{B}$ es *regular interior* con respecto a μ cuando

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \text{ compacto}, \ K \subset E\}.$$

La medida de Borel positiva μ se dice *regular exterior* (resp. *interior*) cuando todo conjunto de Borel es regular exterior (resp. interior) con respecto a μ, y μ es *regular* cuando es simultáneamente regular exterior e interior.

El siguiente resultado se demuestra con técnicas de medida y describe el dual topológico de algunos espacios clásicos.

Teorema A.15 (de representación de Riesz)**.** *Sea* L *un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff y* Φ *un funcional lineal continuo en* $C_0(L)$*. Existe una única medida de Borel (real o compleja) regular* λ *en* L *tal que:*

$$\Phi(f) = \int_L f \, d\lambda \qquad (f \in C_0(L)).$$

Como consecuencia, se tiene una biyección lineal isométrica de $M(L)$ *sobre* $C_0(L)^*$*.*

Bibliografía

Cualquiera de los textos generales de Teoría de la Medida, como los de Halmos [22], Cohn [10] y Valdivia [40], contiene la construcción de la integral asociada a una medida, también llamada integral de Lebesgue abstracta, con diferencias insignificantes entre unos y otros. Nos parece muy recomendable la exposición de Rudin [36]. Este texto utiliza el teorema de descripción de los duales de los espacios de Hilbert (Riesz-Fréchet) para la demostración del Teorema de Radon-Nikodym. Se puede hacer una demostración independiente, como la que aparece en Halmos [22], por ejemplo, pero es más laboriosa. El Teorema de representación de Riesz se puede consultar en Rudin [36] o bien el el texto de Valdivia [40].

Bibliografía

[1] G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis.* Academic Press. New York 1966.

[2] S. Banach. *Theory of Linear Operations.* North Holland. Amsterdam 1987.

[3] S. K. Berberian. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory.* Springer-Verlag. New York 1974.

[4] F. F. Bonsall and J. Duncan. *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag. Berlin 1973.

[5] H. Brézis. *Análisis Funcional.* Alianza. Madrid 1984.

[6] A. L. Brown and A. Page. *Elements of Functional Analysis.* Van Nostrand. London 1970.

[7] G. Buskes. *The Hahn-Banach Theorem surveyed.* Dissertationes Mathematicae 327. Warszawa 1993.

[8] G. Choquet. *Course D'Analyse. Tome II: Topologie.* Masson. Paris 1964.

[9] J. A. Clarkson. *Uniformly convex spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 40, 1936, (396-414).

[10] D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser. Boston 1980.

[11] J. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag. New York 1985.

[12] J. Diestel. *Sequences and series in Banach spaces.* Springer-Verlag. New York 1984.

[13] J. Dieudonné. *History of Functional Analysis.* North Holland. Amsterdam 1981.

[14] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon. Boston 1966.

[15] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory.* Interscience. New York 1957.

[16] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann. Berlin 1989.

[17] M. J. Field. *Differential Calculus and its applications.* Van Nostrand. New York 1976.

[18] K. Floret. *Weakly compact sets.* Lecture Notes in Math. 801. Springer-Verlag. Berlin 1989.

[19] E. Gaughan. *Introducción al análisis.* Alhambra. Madrid 1972.

[20] P. Habala, P. Hájek and V. Zizler. *Introduction to Banach Spaces [I].* Matfyzpress. Praha 1996.

[21] P. Habala, P. Hájek and V. Zizler. *Introduction to Banach Spaces [II]*. Matfyzpress. Praha 1996.

[22] P. R. Halmos. *Introduction to Hilbert Space and The Theory of spectral Multiplicity. Second Edition*. Chelsea. New York 1957.

[23] O. Hanner. *On the uniform convexity of L^p and ℓ^p*. Ark. Mat. 3, 1956, (239-244).

[24] R. Holmes. *Geometric Functional Analysis and its Applications*. Springer-Verlag. New York 1975.

[25] G. J. O. Jameson. *Topology and Normed Spaces*. Chapmam and Hall. London 1974.

[26] H. Jarchow. *Locally Convex Spaces*. Teubner Stuttgart 1981.

[27] V. Kadets. *A Course in Functional Analysis and Measure Theory*. Springer-Verlag. Berlin 2018.

[28] J. Kelley. *General Topology*. Springer-Verlag. New York 1975

[29] G. Köethe. *Topological Vector Spaces I*. Springer-Verlag. New York 1969.

[30] R. Larsen. *Functional Analysis an introduction*. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker. New York 1973.

[31] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I*. Springer-Verlag. Berlin 1977.

[32] A. Mukherjea and K. Photoven. *Real and Functional Analysis. Part B: Functional Analysis*. Plenum Press. New York 1986.

[33] G. Murphy. *C^*-algebras and operator theory*. Academic Press. San Diego 1990.

[34] G. K. Pedersen. *Analysis Now*. Springer-Verlag. New York 1988.

[35] W. Rudin. *Functional Analysis*. Mc Graw-Hill. New York 1973.

[36] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill. New York 1966.

[37] I. Singer. *Bases in Banach Spaces I*. Springer-Verlarg. Berlin 1970.

[38] A. E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley and Sons. New York 1958.

[39] A. Taylor and D. Lay. *Introduction to Functional Analysis (Second Edition)*. John Wiley and Sons. New York 1980.

[40] M. Valdivia. *Análisis Matemático V. Unidades didácticas 1-2-3*. U.N.E.D. Madrid 1979.

[41] D. Van Dulst. *Reflexive and superreflexive Banach spaces*. Mathematical Centre Tracts. 102. Amsterdam 1978.

[42] D. Werner. *A Proof of the Markov-Kakutani Fixed Point Theorem Via the Hahn-Banach Theorem*. Extracta Mathematicae 8. 1993, (37-38).

[43] A. Wilansky. *Topology for Analysis*. John Wiley and Sons. New York 1970.

[44] A. Wilansky. *Modern methods in topological vector spaces*. McGraw-Hill. New York 1978.