

Anuncio de Curso de Posgrado Geometría Diferencial, IMAG, enero 2025

Durante el mes de enero de 2025, se impartirá en el IMAG un curso de posgrado para estudiantes de máster, doctorales y posdoctorales con los siguientes datos.

Título: El primer autovalor del laplaciano de una subvariedad espacial compacta del espaciotiempo de Lorentz-Minkowski de dimensión arbitraria y aplicaciones a desigualdades geométricas Riemannianas

Autor: Alfonso Romero,
Departamento de Geometría y Topología,
Instituto Universitario de Matemáticas IMAG,
Universidad de Granada,
18071-Granada, Spain,
aromero@ugr.es

Audiencia: estudiantes de doctorado y posgraduados.

Conocimientos previos: los del grado en Matemáticas.

Fechas en las que se imparte: Días 12, 14, 19, 21 y 26 de enero de 2026.

Horario de cada sesión: De 17:00 a 19:30 horas.

Lugar: Seminario 1, Instituto de Matemáticas (IMAG).

Asistencia: se controlará la asistencia del alumnado en cada sesión (presencial u online) y se enviará un informe a la comisión de evaluación.

Resumen: Los valores propios del operador de Laplace en una variedad Riemanniana compacta M^n son invariantes Riemannianos de naturaleza analítica [BGM]. En particular, el primer valor propio (no trivial), $\lambda_1(M^n)$, contiene información intrínseca significativa sobre M^n [BGM]. En el caso en que M^n sea una subvariedad compacta del espacio euclídeo, la búsqueda de relaciones entre $\lambda_1(M^n)$ y alguna cantidad extrínseca surge de manera natural. En esta dirección, R.C. Reilly demostró, en su relevante artículo [Re], que el primer valor propio de una subvariedad compacta de dimensión n en un espacio euclídeo de dimensión $n + p$ está acotado superiormente por n veces el valor promedio del cuadrado de la norma del campo vectorial de curvatura media correspondiente, es decir, n veces el cociente entre la integral sobre la subvariedad del cuadrado de la norma del vector de curvatura media y el volumen de la subvariedad. Además, si el valor propio alcanza dicha cota, entonces la subvariedad se encuentra mínimalmente contenida en una hiperesfera del espacio euclídeo.

A través de un contraejemplo, mostraremos que el resultado de Reilly no se cumple para una subvariedad compacta espacial de codimensión ≥ 2 en el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski [PaRo]. En la búsqueda de un resultado alternativo, revisaremos la demostración original de Reilly [Re], observando que no se puede aplicar a una subvariedad espacial compacta del espaciotiempo de Lorentz-Minkowski.

A continuación, se desarrollará la nueva técnica introducida en [PaRo], basada en una fórmula integral sobre una sección espacial compacta del cono de luz en el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski. Esta técnica es genuina en nuestro contexto, es decir, no puede extenderse a otros espacios semi-euclídeos de índice superior. Como aplicación,

se obtiene una familia de cotas superiores para $\lambda_1(M^n)$ cuando M^n es una subvariedad espacial compacta del espaciotiempo de Lorentz-Minkowski [PaRo]. Luego, se caracteriza geoméricamente el caso de igualdad en una de estas desigualdades.

En el camino, se vuelve a demostrar el resultado original de Reilly [Re] cuando una subvariedad compacta del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$ es vista naturalmente como una subvariedad espacial del espaciotiempo de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ a través de un hiperplano espacial. En este caso, se calcula explícitamente una nueva cota superior para $\lambda_1(M^n)$ cuando M^n no está contenida mínimamente en una hipersfera del hiperplano espacial [PaRo2]. Esta nueva estimación mejora la cota superior clásica dada por Reilly en [Re]. Finalmente, ilustramos esta mejora con varios ejemplos concretos [PaRo2].

Bibliografía básica:

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture Notes in Math., **194**, Sprienger-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[PaRo] F.J. Palomo and A. Romero, On the first eigenvalue of the Laplace operator for compact spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski spacetime, *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A Math.*, **152** (2022), 311–330.

[PaRo2] F.J. Palomo and A. Romero, Exploring new extrinsic upper bounds on the first eigenvalue of the Laplace operator for compact submanifolds in Euclidean spaces, *J. Differ. Equ.* **425** (2025), 789–804.

[Re] R.C. Reilly, On the first eigenvalue of the Laplace operator for compact submanifolds of Euclidean space, *Comment. Mat. Helvetici*, **52** (1977), 525–533.

Breve descripción de los objetivos del curso:

El curso que presento está dirigido a alumnos que han podido cursar uno de los dos másteres: “Física y Matemáticas” y ‘Matemáticas’ de la Universidad de Granada así como a alumnos de otras universidades con interés en análisis geométrico. Este curso surge como iniciativa propia y, en parte, como iniciativa de alumnos de doctorado y becarios en el IMAG interesados en Geometría Riemanniana o Lorentziana global. Pretende tanto abrir el área de investigación a alumnos que investigan en temas de Geometría Riemanniana como a alumnos interesados por la Geometría de Lorentz, con el aliciente de que las técnicas que se van a explicar tienen su origen en esta última y se pueden aplicar en Geometría Riemanniana.

Motivaciones:

1. Iniciativa que ha sido recogida por el Instituto, y que se traslada a la Escuela de Posgrado para la gestión del mismo y la posterior emisión de certificados.
2. El curso se impartirá en las aulas del IMAG, para así incrementar el número de actividades que se desarrollan el mismo.

Detalle del contenido del curso:

1. Introducción. El operador de Laplace de una variedad de Riemann. Laplacianos e isometrías. Producto interno L^2 en $C^\infty(M^n)$ definido por una métrica de Riemann en M^n . Autovalores. Propiedades. Invariancia riemanniana. Cálculo explícito de autovalores. Principio del mínimo para $\lambda_1(M^n)$.

2. Teorema de Reilly. Recuerdo de las fórmulas y ecuaciones fundamentales de una subvariedad del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$. Teorema de Takahashi. El principio de la media.

Enunciado del teorema. Consecuencias. La demostración original de Reilly.

3. Subvariedades espaciales de $\mathbb{L}^m$. Geometría local. Fórmulas y ecuaciones fundamentales. Inexistencia de hipersuperficies espaciales compactas de $\mathbb{L}^{n+1}$. Un contraejemplo a una posible extensión del teorema de Reilly para subvariedades espaciales compactas (con dimensión $\leq n$) de $\mathbb{L}^{n+2}$.

4. Focalizando la nueva técnica para subvariedades espaciales compactas. ¿Por qué la demostración de Reilly no es trasladable a nuestro caso? Sección esférica definida por un vector temporal unitario. El principio de la media generalizado. Un resultado clave de carácter técnico.

5. Cotas superiores para el primer valor propio de una subvariedad espacial compacta. Obtención de una cota superior de $\lambda_1(M^n)$ para cada vector temporal unitario. Demostración. El caso en que se cumple la igualdad. Consecuencias. El teorema de Reilly reprobado.

6. Una aplicación a subvariedades compactas del espacio euclídeo. Mejora de la cota superior de $\lambda_1(M^n)$ obtenida por Reilly en el caso en que la subvariedad compacta M^n de $\mathbb{R}^{n+p}$ no esté minimalmente inmersa en una hiperesfera. Cálculo explícito de la nueva cota: el caso de un toro de revolución del espacio euclídeo tridimensional.