Geometría I
Doble Grado Informática-Matemáticas

Examen Tema 3 (22/01/2016)

1. (a) *(2 puntos) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $f, g \in End(V)$ tales que $f \circ g = 1_V$. Demostrar que f, g son automorfismos y que $g = f^{-1}$.*

   Como f, g son endomorfismos, son aplicaciones lineales de V en sí mismo. Para que sean automorfimos basta probar que son biyectivas. Como ambas aplicaciones van entre espacios vectoriales de la misma dimensión (de hecho, entre el mismo espacio vectorial), podemos reducirnos a probar que son inyectivas o bien sobreyectivas.

   Sea $x \in \ker(g)$. Entonces, $x = 1_V(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$ donde hemos usado que $g(x) = 0$ y que f es lineal. Esto nos dice que $\ker(g) = \{0\}$, luego g es inyectiva. Por tanto, g es biyectiva. Ahora tenemos dos opciones:

   (I) Como g es biyectiva, existe su inversa g^{-1}, y $f = f \circ 1_V = f \circ (g \circ g^{-1}) = (f \circ g) \circ g^{-1} = 1_V \circ g^{-1} = g^{-1}$. Por tanto, f también es biyectiva. Finalmente, $f^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$ y hemos terminado.

   (II) Dado $y \in V$, tenemos $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = 1_V(y) = y$, luego $y \in \mathrm{Im}(f)$. Como y es arbitrario en V, entonces f es sobreyectiva, luego f es biyectiva. Esto último implica que existe su inversa f^{-1}, y $g = 1_V \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ 1_V = f^{-1}$. En particular, g es también biyectiva y ya hemos probado que $g = f^{-1}$.

   (b) *(2 puntos) Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Probar que las ecuaciones implícitas (independientes) de U vienen dadas por*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} (\star)$$

   si y sólo si las formas lineales $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ definidas mediante

$$\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ i = 1 \ldots, m$$

   forman base del anulador de U.

El anulador de U es $\mathrm{an}(U) = \{\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \varphi(x) = 0,\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U\}$.

Supongamos que las ecuaciones implícitas de U vienen dadas por el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\star)$. Considero las formas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in (\mathbb{R}^n)^*$ dadas en el enunciado. Notemos que sobre vectores $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios, $\varphi_i(x)$ no tiene porqué anularse, pero sí se anula $\varphi_i(x)$ para todo $x \in U$, porque x cumple la i-ésima ecuación de $(\star)$. Por definición de anulador de U, esto nos dice que $\varphi_i \in \mathrm{an}(U)$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Además, las formas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ son linealmente independientes porque las ecuaciones de $(\star)$ se suponen independientes. Como la dimensión de $\mathrm{an}(U)$ es $n - \dim U$ y $\dim U = n-$[número de ecuaciones independientes de $(\star)$] $= n - m$, entonces $\dim \mathrm{an}(U) = n - (n - m) = m$. Como $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio vectorial $\mathrm{an}(U)$, que tiene dimensión m, entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es base de $\mathrm{an}(U)$.

Recíprocamente, supongamos que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es base de $\mathrm{an}(U)$. En particular, $\varphi_i \in \mathrm{an}(U)$ $\forall i = 1, \ldots, m$ luego $\varphi_i(x) = 0$ $\forall x \in U$ por definición de anulador, de donde

$$U \subseteq \{\text{soluciones de } (\star)\}.$$

Queda ver que se da la igualdad en la última inclusión. Basta que se dé la igualdad entre las dimensiones. Veamos estoúltimo y habremos terminado:

$$\dim U = n - \dim \mathrm{an}(U) \overset{\text{(a)}}{=} n - m,$$

donde en (a) hemos usado que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es base de $\mathrm{an}(U)$. Como las formas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ son linealmente independientes, también lo son las ecuaciones que forman $(\star)$. Es decir, lo anterior se escribe

$$\dim U = n - [\text{número de ecuaciones independientes de } (\star)] = \dim\{\text{soluciones de } (\star)\}.$$

2. *En el espacio vectorial $P_2[x]$ de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, se consideran las formas lineales $\psi_1, \psi_2 \colon P_2[x] \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$\psi_1(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx, \qquad \psi_2(p(x)) = p(0), \qquad p(x) \in P_2[x].$$

En el espacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de matrices simétricas reales de orden 2, se considera el subespacio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \;/\; \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{array} \right\}.$$

(a) *(3 puntos) Encontrar una aplicación lineal $f \colon P_2[x]^* \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tal que $\dim \ker(f) = 2$ y $f(U) = W$, donde $U = L(\{\psi_1, \psi_2\})$.*

Tomamos un polinomio arbitrario $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2[x]$. Entonces,

$$\psi_1(p(x)) = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2) dx = \left[ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = 2a + \frac{2}{3}c.$$

Por tanto, las coordenadas de ψ_1 respecto de $B_u^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ son

$$\psi_1 \equiv (\psi_1(1), \psi_1(x), \psi_1(x^2))_{B_u^*} = (2, 0, 2/3)_{B_u^*}. \tag{1}$$

Análogamente, $\psi_2(p(x)) = p(0) = a$, luego las coordenadas de ψ_2 respecto de B_u^* son

$$\psi_2 \equiv (\psi_2(1), \psi_2(x), \psi_2(x^2))_{B_u^*} = (1, 0, 0)_{B_u^*}. \tag{2}$$

Como la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, tenemos que $(2,0,2/3)$ y $(1,0,0)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, ψ_1, ψ_2 son linealmente independientes en $P_2[x]^*$, luego $\dim U = 2$. Amplío $\{\psi_1, \psi_2\}$ a una base de $P_2[x]^*$. Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2/3 \neq 0,$$

entonces $\{(2,0,2/3),(1,0,0),(0,1,0)\}$ son base de $\mathbb{R}^3$. Esto implica que $\{\psi_1, \psi_2, \varphi_2\}$ son base de $P_2[z]^*$. Ya tenemos la parte de la izquierda del cuadro que definirá f vía el teorema fundamental de las aplicaciones lineales. Vamos a razonar la parte de la derecha de dicho cuadro:

Las ecuaciones de W son

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ a-b-c=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ a=0 \end{array}\right\},$$

que son dos ecuaciones independientes. Esto nos dice que $\dim W = 1$ y resolviendo, que $\left\{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de W. Como $\dim \ker(f) = 2$, la fórmula de la nulidad y el rango nos dice que $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim P_2[x]^* - 2 = 3 - 2 = 1$. Como $W = f(U) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ y $\dim W = \dim \mathrm{Im}(f) = 1$, tenemos que $W = \mathrm{Im}(f)$. Ahora podemos formar el cuadro que definirá f:

$$\begin{array}{rcl} f\colon P_2[x]^* & \to & \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \\ \psi_1 & \mapsto & f(\psi_1) = A \\ \psi_2 & \mapsto & f(\psi_2) = A \\ \varphi_2 & \mapsto & f(\varphi_2) = A \end{array}$$

(no es la única opción: podemos poner a la derecha cualesquiera tres múltiplos de A siempre que $f(\psi_1)$ o bien $f(\psi_2)$ sea distinto de cero, ya que esto garantiza que $f(U) = W$). Por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales, existe una única $f\colon P_2[x]^* \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ aplicación lineal que cumple este cuadro. A partir del cuadro, es evidente que $\mathrm{Im}(f) = W$ luego $f(U) = W$ y $\dim \ker(f) = 2$.

(b) *(3 puntos) Para la aplicación f del apartado anterior, calcular la matriz $M(f, B_u^*, B_u')$ siendo B_u^* la base dual de $B_u = \{1, x, x^2\}$ y $B_u' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.*

Calculamos $M(f, B_u^*, B_u')$ por columnas. De (2) se deduce directamente que $\varphi_1 = \psi_2$. Por tanto,

$$f(\varphi_1) \;=\; f(\psi_2) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde la primera columna de $M(f, B_u^*, B_u')$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hacemos lo mismo con las otras dos columnas de $M(f, B_u^*, B_u')$: Por definición, $f(\varphi_2) = A$ luego la segunda columna de

$M(f, B_u^*, B_u')$ es igual que la primera. Para la tercera columna necesitamos calcular $f(\varphi_3)$, luego escribimos primero φ_3 en combinación lineal de $\{\psi_1, \psi_2, \varphi_2\}$: pongamos $\varphi_3 = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \delta\varphi_2$, siendo $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ incógnitas a calcular. Entonces,

$$0 \overset{\text{(a)}}{=} \varphi_3(1) = \alpha\psi_1(1) + \beta\psi_2(1) + \delta\varphi_2(1) \overset{\text{(b)}}{=} 2\alpha + \beta$$

donde en (a) hemos usado la definición de bases duales, y en (b) hemos usado las ecuaciones (1), (2) anteriores. Analogamente,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_3(x) = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x) + \delta\varphi_2(x) = \delta \\ 1 &= \varphi_3(x^2) = \alpha\psi_1(x^2) + \beta\psi_2(x^2) + \delta\varphi_2(x^2) = \tfrac{2}{3}\alpha \end{aligned}$$

resolviendo el sistema 3×3 anterior queda $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -3$, $\delta = 0$ de donde $\varphi_3 = \frac{3}{2}\psi_1 - 3\psi_2$. Finalmente,

$$f(\varphi_3) \quad = \quad \tfrac{3}{2}f(\psi_1) - 3f(\psi_2) = \left(\tfrac{3}{2} - 3\right)A = -\tfrac{3}{2}A,$$

de donde la tercera columna de $M(f, B_u^*, B_u')$ es $-\frac{3}{2}$ por cualquiera de las dos primeras. En resumen:

$$M(f, B_u^*, B_u') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3/2 \\ -1 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$