Geometría II
Grado en Matemáticas, Grupo B

Prueba del tema 2: Formas bilineales y cuadráticas (15/05/2018)

1. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial métrico euclídeo (V^n, g).
   (a) (3 puntos) Probar que son equivalentes:
      i. Los únicos valores propios de f son $0, 1$.
      ii. f es una proyección ortogonal.
   (b) (2 puntos) ¿Es posible cambiar los valores $0, 1$ por otra pareja de números para que (ii) pase a ser lo siguiente?
      ii'. f es una isometría de (V, g) en sí mismo.

2. Se considera la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ $F_a(x, y, z) = 2x^2 + ay^2 + 2axz + 2z^2$, siendo a un parámetro real. Sea g_a la métrica sobre $\mathbb{R}^3$ asociada a F_a.
   (a) (2 puntos) Calcular el índice y rango de $(\mathbb{R}^3, g_a)$, y clasificar la métrica g_a en función de $a \in \mathbb{R}$.
   (b) (1 punto) Para el caso $a = 1$, probar que g_1 es euclídea y dar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_a)$.
   (c) (2 puntos) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Probar que f es autoadjunto respecto a g_1 y calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_1)$ formada por vectores propios de f.