Geometría II
Grado en Matemáticas, Grupo B

Prueba del tema 3: Espacios vectoriales métricos euclídeos (30/05/2018)

1. Sea $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la aplicación dada dada por

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^{n} k x_k y_k,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

   (a) (2 puntos) Probar que g es una métrica euclídea sobre $\mathbb{R}^n$.

   (b) (3 puntos) Demostrar que dado $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k^2\right),$$

   y que la igualdad es cierta si y sólo si $x_1 = \ldots = x_n$.

2. (5 puntos) Se consideran siguientes los planos vectoriales en $\mathbb{R}^3$:

$$\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}, \qquad \Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}.$$

Sean S_1, S_2 las simetrías de $(\mathbb{R}^3, g_0)$ respecto a Π_1, Π_2, respectivamente (g_0 es el producto escalar usual). Calcular la matriz de $S_1 \circ S_2$ respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$.