Criterio de Descartes sobre el número de raíces positivas de un polinomio

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales y grado $n \geq 1$. Tras ordenar los monomios de $p(x)$ con grados descendentes (o ascendentes), $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, producimos una lista de coeficientes $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$. Llamamos

$$C(p) = \#\{\text{cambios de signo en } (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)\}, \quad R_+(p) = \#\{\text{raíces positivas de } p(x)\}.$$

Teorema 0.1 *En la situación anterior, $R_+(p) \equiv C(p)$ (mód 2) y $R_+(p) \leq C(p)$.*

Demostración. Haremos la demostración del teorema por inducción sobre n. Primero notemos que multiplicando p por una constante no nula no variamos $C(p)$ ni $R_+(p)$. Así, podemos suponer que el coeficiente líder de p es $a_n = 1$. También podemos suponer que $p(0) \neq 0$ (en caso contrario, factorizamos $p(x) = x^k q(x)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $q(x)$ polinomio con $q(0) \neq 0$ y es evidente que $R_+(p) = R_-(q)$, $C(p) = C(q)$).

Notemos también que la lista de coeficientes de p es $(a_n = 1, \ldots, a_0 = p(0))$, luego

$$(\star) \quad p(0) > 0 \iff C(p) \text{ es par.}$$

Para $n = 1$, $p(x) = x + a_0$, que tiene como única raíz a $-a_0$. Si $a_0 < 0$, tenemos $R_+(p) = 1 = C(p)$ y si $a_0 > 0$ entonces $R_+(p) = 0 = C(p)$, y el teorema se tiene para $n = 1$.

Suponiendo el teorema cierto para $n - 1$, a continuación lo probamos para n.

(A) Supongamos que $p(0) < 0$. Como $p(0) < 0$, $(\star)$ nos dice que $C(p)$ es impar. Debemos entonces probar que $R_+(p)$ es impar. Como $a_n > 0$ existe $x_0 \gg 1$ tal que $p(x) > 0$ $\forall x \geq x_0$. Como $p(0)p(x_0) < 0$, el Teorema de Bolzano asegura que existe $x_1 \in (0, x_0)$ tal que $p(x_1) = 0$. Por tanto, podemos factorizar $p(x) = (x - x_1)q(x)$ siendo $q(x)$ un polinomio de grado $n - 1$, cuyo coeficiente líder es 1 y con $p(0) = -x_1 q(0)$ luego $q(0) > 0$. Aplicando $(\star)$ a q deducimos que $C(q)$ es par. Como por hipótesis de inducción $R_+(q) \equiv C(q)$ (mód 2), tenemos que $R_+(q)$ es par. Como $R_+(q) = R_+(p) - 1$, se tiene que $R_+(p)$ es impar.

(B) Supongamos que $p(0) > 0$. Usando $(\star)$ tenemos que $C(p)$ es par, luego debemos probar que $R_+(p)$ es par. Si fuera $R_+(p) = 0$ habríamos terminado, luego supongamos que existe $x_1 > 0$ tal que $p(x_1) > 0$. Por tanto, podemos factorizar $p(x) = (x - x_1)q(x)$ siendo $q(x)$ un polinomio de grado $n - 1$, cuyo coeficiente líder es 1 y con $p(0) = -x_1 q(0)$ luego $q(0) < 0$. Por $(\star)$ aplicado a q, $C(q)$ es impar. Como $R_+(q) \equiv C(q)$ (mód 2) por hipótesis de inducción, $R_+(q)$ es impar. Como $R_+(q) = R_+(p) - 1$, se tiene que $R_+(p)$ es par.

De (A) y (B) deducimos que $R_+(p) \equiv C(p)$ (mód 2). Veamos que $R_+(p) \leq C(p)$ y habremos terminado: Por reducción al absurdo, supongamos que $R_+(p) > C(p)$. Como $R_+(p) \equiv C(p)$ (mód 2), tenemos que $R_+(p) \geq C(p) + 2$. Por el Teorema de Rolle,

$$R_+(p') \geq C(p) + 1. \tag{1}$$

Pero el coeficiente de p' de cada grado $k \in \{n-1, \dots, 0\}$ tiene el mismo signo que el correspondiente coeficiente de p de grado $k+1$, luego

$$C(p') \leq C(p). \tag{2}$$

De (1) y (2) se tiene que $R_+(p') \geq C(p') + 1$, lo que contradice la hipótesis de inducción (p' es un polinomio de grado $n-1$). Esto termina la demostración del teorema. $\square$

Cambiando $p(x)$ por $p(-x)$ y aplicando el Teorema anterior tenemos que el número de raíces negativas de $p(x)$ no puede superar al número de cambios de signo de $p(-x)$, y que estos dos números tienen la misma paridad.