Tema 5: Espacios Vectoriales Métricos Euclídeos.

Índice

1. Métricas y formas cuadráticas.

¿Cómo medir en un espacio vectorial?
En $\mathbb{R}^3$, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x^t \cdot y$.
Si lo anterior es cero, medimos perpendicularidad. Si es positivo o negativo, medimos si los vectores están en un mismo semiespacio o no. Si tomamos $x = y$, medimos longitud. Necesitamos $V(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ para comparar signos; también necesitamos simetría.

Definición 1 $V(\mathbb{R})$ (espacio vectorial real), $g : V \times V \to \mathbb{R}$.
g métrica $\Longleftrightarrow$ g bilineal + simétrica.
(V, g): espacio vectorial métrico (EVM).

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $g_0(x,y) = x^t \cdot y$ (producto escalar usual).

2. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, g_A),\ g_A(x,y) = x^t \cdot A \cdot y$.
   $A = I_n \rightsquigarrow$ producto escalar usual.
   $A = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$ métrica de Lorentz-Minkowski (Relatividad especial)

3. $V = C([a,b],\mathbb{R})$, $g(f,h) = \displaystyle\int_a^b f(t)h(t)\,dt$ (producto L^2).

4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g(A,B) =$Traza$(A^t \cdot B)$.
   Qué tiene que ver con $(\mathbb{R}^{n^2}$, prod. escalar usual)?

5. Métrica inducida en un subespacio.

6. Métrica producto.

Definición 2 (V,g) EVM. Forma cuadrática asociada a g:
$F_g \colon V \to \mathbb{R}$, $F_g(x,x) = g(x,x)$.

Lema 1 (Propiedades de F_g) *$\forall x,y \in V$, $a \in \mathbb{R}$,*

1. *$F_g(ax) = a^2 F_g(x)$,*

2. *$g(x,y) = \frac{1}{2}\left[F_g(x+y) - F_g(x) - F_g(y)\right]$.*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 3 $V(\mathbb{R})$. Forma cuadrática sobre V:
$F \colon V \to \mathbb{R}$ tal que 1 del Lema 1 se cumple y 2 del Lema 1 define una métrica sobre V (métrica asociada a F).

Proposición 1 *$V(\mathbb{R})$. $S_2(V) = \{$métricas en $V\}$, $F(V) = \{$formas cuadráticas en $V\}$. Entonces:*

1. *$S_2(V), F(V)$ son EV reales de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$.*

2. *La aplicación $\Phi \colon S_2(V) \to F(V)$, $\Phi(g) = F_g$ es un isomorfismo de EV.*

Demostración. Ejercicio. □

2. Perpendicularidad: tipos de métricas.

Definición 4 (V, g) EVM, $x, y \in V$. $\quad x, y$ ortogonales $(x \perp y) \Leftrightarrow g(x, y) = 0$.

Ejemplo: $\mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,1) \perp_{g_A} (1,1)$.

Definición 5 (Tipos de métricas)
g degenerada $\Leftrightarrow \exists x \in V - \{0\} \mid x \perp y, \forall y \in V$.
g no degenerada $\Leftrightarrow$ Si $x \in V$ cumple $x \perp V$, entonces $x = 0$.
g semidefinida positiva $\Leftrightarrow g(x, x) \geq 0, \forall x \in V$.
g semidefinida negativa $\Leftrightarrow g(x, x) \leq 0, \forall x \in V$.
g definida positiva (euclídea) $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{semidef. } +, \text{ y} \\ \text{Si } x \in V \mid x \perp x \Rightarrow x = 0. \end{cases}$
g definida negativa $\Leftrightarrow -g$ def. $+$.
g indefinida $\Leftrightarrow$ es no degenerada, pero no es def. $+$ ni def. $-$.

<table>
<tr><td rowspan="6">Tipos de Métricas</td><td rowspan="3">no degeneradas</td><td>euclídea (def. +)</td></tr>
<tr><td>def. −</td></tr>
<tr><td>indefinida</td></tr>
<tr><td rowspan="3">degeneradas</td><td>semidef. +</td></tr>
<tr><td>semidef. −</td></tr>
<tr><td>otras</td></tr>
</table>

Proposición 2 *(V, g) EVM, B base de V. Entonces:*
g no degenerada $\Leftrightarrow M_B(g)$ regular.

Demostración. Tomemos $B = (x_1, \ldots, x_n)$ base ordenada de V. Pasamos a coordenadas: Dados $x, y \in V$,

$$g(x, y) = (x_B)^t \cdot M_B(g) \cdot y_B$$

donde $M_B(g) = (g(x_i, x_j))_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Así que

$$g(x, y) = 0 \ \forall y \in V \ \Leftrightarrow \ (x_B)^t \cdot M_B(g) \cdot y_B = 0 \ \forall y_B \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ (x_B)^t \cdot M_B(g) = 0.$$

Luego g es no degenerada $\Leftrightarrow$ el sistema de ecuaciones lineales $(x_B)^t \cdot M_B(g) = 0$ tiene solución no trivial $\Leftrightarrow \det M_B(g) = 0$. □

3. Norma y ángulos en un EVME. Desigualdad de Schwarz.

De ahora en adelante, (V, g): EVME.

Definición 6 (Norma) $\|x\| = \sqrt{g(x,x)} \in \mathbb{R}_0^+$, $\forall x \in V$.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}^n, g_0): \ \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}$ si $x = (a_1, \ldots, a_n)$.

2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), g): \ \|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$ si $A = (a_{ij})_{i,j}$.

3. $(C([a,b], \mathbb{R}), g): \ \|f\| = \left(\int_a^b f(t)^2\, dt\right)^{1/2}$.

Proposición 3 (Propiedades de la norma) *Dados $x, y \in V$, $a \in \mathbb{R}$,*

1. $\|x\| \geq 0$, *"="* $\Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$, $a \in \mathbb{R}$.
3. *(Desigualdad de Schwarz):* $|g(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$, *"="* $\Leftrightarrow x, y$ *l.d.*
4. *(Desigualdad de Minkowski o triangular):* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demostración. 1,2: Ejercicios. Veamos la desigualdad de Schwarz: Tomemos $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq g(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 g(x,x) + 2\lambda g(x,y) + g(y,y).$$

Viendo lo anterior como polinomio en λ (parábola), su discriminante Δ ha de ser ≤ 0. Pero

$$\Delta = 4g^2(x,y) - 4g(x,x)g(y,y),$$

luego la desigualdad de Schwarz se cumple. Si la igualdad se da en la desigualdad de Schwarz, entonces $\Delta = 0$ luego la parábola anterior en λ toca al eje de abscisas: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 = \lambda^2 g(x,x) + 2\lambda g(x,y) + g(y,y) = g(\lambda x + y, \lambda x + y)$, de donde $\lambda x + y = 0$.

Finalmente, la desigualdad triangular:
$\|x + y\|^2 = g(x + y, x + y) = g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y) \leq g(x,x) + 2|g(x,y)| + g(y,y)$
$\leq g(x,x) + 2\|x\|\|y\| + g(y,y) = (\|x\| + \|y\|)^2$. $\square$

Dados $x, y \in V - \{0\}$, la desigualdad de Schwarz implica que $\frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|} \in [0, 1]$, luego éste es el coseno de un ángulo (en general, dos en $[0, 2\pi)$; nos quedaremos con el menor):

Definición 7 (Angulo entre dos vectores) Sean $x, y \in V - \{0\}$.
$\sphericalangle(x, y) \in [0, \pi]$ t.q. $\cos \sphericalangle(x, y) = \frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|}$.

Proposición 4 (Propiedades del ángulo) *Dados $x, y \in V - \{0\}$,*

1. $g(x, y) = \|x\|\|y\| \cos \sphericalangle(x, y)$.
2. $\sphericalangle(x, y) = 0, \pi \iff x, y$ *l.d.*
3. $\sphericalangle(x, y) = \frac{\pi}{2} \iff x \perp y$.

4. Bases ortonormales.

(V, g) EVME.

Definición 8
1. Vector unitario: $x \in V$ tal que $\|x\| = 1$.
2. Conjunto ortogonal $\{x_1, \dots, x_k\} \subset V$ tal que $x_i \perp x_j$, $\forall i \neq j$.
3. Conjunto ortonormal: ortogonales + unitarios.

Lema 2 (Coordenadas, métrica y norma en una base ortonormal) $B = (x_1, \dots, x_n)$ *base ortonormal de (V, g). Entonces:*

1. *Dado $x \in V$, $x_B = (g(x, x_1), \dots, g(x, x_n))_B$ (coordenadas).*
2. *Dados $x, y \in V$, $g(x, y) = x_B^t \cdot y_B$.*
3. *Dado $x \in V$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} g(x, x_i)^2 \right)^{1/2}$.*

¿Existen bases ortonormales en todo EVME?

Teorema 1 (Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt) $B = \{y_1, \dots, y_n\}$ *base de V.*
PARTE 1: Obtención de una base ortogonal:

$$z_1 = y_1, \;\; z_2 = y_2 - a_{12} z_1 \text{ con } a_{12} = \frac{g(y_2,z_1)}{g(z_1,z_1)}, \dots, z_n = y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} z_i \text{ con } a_{in} = \frac{g(y_n,z_i)}{g(z_i,z_i)}.$$

PARTE 2: Obtenció¡n de una base ortonormal:
$x_i = \frac{1}{\|z_i\|} z_i \Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ *base ortonormal de (V, g).*

¿Cómo es la matriz de cambio de base entre bases ortonormales?

Lema 3 *Si $g \in S_2(V)$ y B, B' son bases de V, entonces $M_B(g) = P^t \cdot M_{B'}(g) \cdot P$, donde $P = M(1_V, B, B')$.*

Demostración. Ejercicio. □

Del Lema 3 se deduce que si B, B' son bases ortonormales de un EVME (V, g), entonces $M(1, B, B') \in O(n)$, donde

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\} \subset Gl(n, \mathbb{R}) \quad (\underline{\text{grupo}} \text{ ortogonal}).$$

En particular, el determinante de toda matriz ortogonal es ± 1.

Proposición 5 *Dada B base ortonormal de (V, g) y B' base, son equivalentes:*

1. *B' es ortonormal.*
2. *$M(1_V, B, B') \in O(n)$.*

Demostración. Ejercicio. □

5. Isometrías.

Definición 9 $f\colon (V, g) \to (V', g')$ es una isometría entre EVM si es lineal, biyectiva y

$$g'(f(x), f(y)) = g(x, y) \quad \forall x, y \in V. \tag{1}$$

Luego una isometría conserva todas las cantidades asociadas a una métrica.

Como los dos miembros de (1) son tensores de tipo (2,0) (supuesto que f es lineal), que se dé (1) equivale a que se dé sólo para los vectores de una base de V. En el caso particular de que (V, g) sea euclídeo, es fácil llegar a que

Lema 4

1. *Si $f\colon (V, g) \to (V', g')$ es una isometría entre EVME y B es una base ortonormal de $(V, g) \Rightarrow f(B)$ es una base ortonormal de (V', g'). Recíprocamente, si $f\colon V \to V'$ es lineal y $B, f(B)$ son bases ortonormales de $(V, g), (V', g')$ respectivamente $\Rightarrow f$ es una isometría.*
2. $\mathrm{Iso}(V, g) = \{f\colon (V, g) \to (V, g) \mid f$ *isometría$\}$ es un grupo con la composición.*
3. *Si (V, g) EVME y B es una base ortonormal, entonces $F_B\colon \mathrm{Iso}(V, g) \to O(n)$, $F_B(f) = M(f, B)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Aprenderemos a clasificar las isometrías de los EVME de dimensiones 2 y 3, o equivalentemente, las matrices de $O(2)$ y $O(3)$.

Definición 10 Dos EVM (V, g), (V', g') se dicen ISOMETRICOS si $\exists f\colon (V, g) \to (V', g')$ isometría. "Ser isométrico a" es una relación de equivalencia.

Por ejemplo, dos EVME son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión. Esto no es verdad para EVM generales, pero veremos su equivalente (Teorema de Sylvester).

6. Proyección ortogonal. Endomorfismos autoadjuntos.

En esta sección, (V, g) es un EVME.

Definición 11 (Subespacio ortogonal respecto a g) Si $U \leq V$, $U^\perp = \{x \in V \mid g(x, y) = 0,\ \forall y \in U\} \leq V$.

Ejemplo: $(\mathbb{R}^2, g)$, $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (métrica euclídea). Si $U = L(\{(1, 0)\})$, entonces $U^\perp = L(\{(1, -2)\})$.

Lema 5 (Propiedades del subespacio ortogonal) *Sea $U \leq V$. Entonces:*

1. $V = U \oplus U^\perp$.
2. $(U^\perp)^\perp = U$, $\{0\}^\perp = V$, $V^\perp = \{0\}$.

Demostración. Veamos que $V = U + U^\perp$. Tomemos una base ortonormal $B_U = (x_1, \dots, x_k)$ de $(U, g|_U)$. Ampliamos B_U a una base $(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$ de V y aplicamos a esta última el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. De esta forma, obtenemos una base ortonormal de (V, g) del tipo $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ (los primeros k vectores no cambian), y claramente $x_i \in U^\perp$ $\forall i = k + 1, \dots, n$. Así que $V = U + U^\perp$.

Si $x \in U \cap U^\perp$, entonces $g(x, x) = 0$ luego $x = 0$. Por tanto, $U \cap U^\perp = \{0\}$ y 1 está probado. 2 se deja como ejercicio. $\square$

Definición 12 (Proyección ortogonal sobre un subespacio) Sea $U \leq V$. Definimos $p_U\colon V \to V$, $p_U(x) = x_1 \in U$, donde $x = x_1 + x_2$, $x_2 \in U^\perp$.

Lema 6 (Propiedades de la proyección ortogonal) *Sea $U \leq V$. Entonces:*

1. $p_U \circ p_U = p_U$.

2. $g(p_U(x), y) = g(x, p_U(y))$, $\forall x, y \in V$.

3. p_U *es diagonalizable, y* $U = V_1$, $U^\perp = V_0$ *(subespacios propios).*

4. $\exists B$ *base ortonormal de* (V, g) *tal que* $M(p_U, B)$ *es diagonal.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Definición 13 $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ se dice *autoadjunto* respecto a g si $g(f(x), y) = g(x, f(y))$, $\forall x, y \in V$.

Proposición 6 *Sea* $A_g = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \mid f \text{ autoadjunto}\}$. *Entonces:*

1. *Dado* $f \in A_g$, *se define* $g_f \in S_2(V)$, $g_f(x, y) = g(f(x), y)$. *Entonces, la aplicación* $\Phi \colon A_g \to S_2(V)$, $\Phi(f) = g_f$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, estudiar todas las métricas en un EV equivale a fijar una métrica euclídea y estudiar todos los endomorfismos autoadjuntos para esa métrica euclídea.*

2. $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ *es autoadjunto si y sólo si* $M(f, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\forall B$ *base ortonormal de* (V, g).

3. $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ *es autoadjunto si y sólo si* $\exists B$ *base ortonormal de* (V, g) *tal que* $M(f, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Demostración. 1,2,3 son consecuencias sencillas de la fórmula $M(f, B) = M_B(g_f)$, donde B es cualquier base ortonormal de (V, g). $\square$

7. Diagonalización de endomorfismos autoadjuntos.

Lema 7 *Toda matriz* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *tiene (al menos) un valor propio real.*

Demostración. Sea $p_A(t) = \det(A - tI_n) \in \mathbb{R}[t]$ el polinomio característico de A. El Teorema Fundamental del Algebra asegura que $\exists a \in \mathbb{C}$ tal que $p_A(a) = 0$. Se trata de comprobar que $a \in \mathbb{R}$ (en particular, A tendrá un vector propio REAL asociado a a).

Como a es valor propio (complejo) de A, $\exists z = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tal que $Az = az$. Así,

$$\overline{z}^t A z = \overline{z} a z = a \overline{z} z = a \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2. \tag{2}$$

Además,
$$\overline{z}^t A z = \sum_{i=1}^{n} (\overline{z}^t)_i (Az)_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z}_i a_{ij} z_j \in \mathbb{C}. \tag{3}$$
Por tanto,
$$\overline{\overline{z}^t A z} = \sum_{i,j=1}^{n} z_i a_{ij} \overline{z_j}. \tag{4}$$
Como A es simétrica, (3) y (4) coinciden luego $\overline{z}^t A z \in \mathbb{R}$. Como $\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, de (2) se deduce que $a \in \mathbb{R}$. □

Proposición 7 (Propiedades de los endomorfismos autoadjuntos)
Sea $f \in A_g$. Entonces:

1. *Si $U \leq V$ cumple $f(U) \subset U \Rightarrow f(U^{\perp}) \subset U^{\perp}$.*
2. *f tiene (al menos) un valor propio real.*
3. *Si $a \neq b \in \mathbb{R}$ son valores propios distintos de $f \Rightarrow V_a \perp V_b$.*

Demostración. Si $x \in U^{\perp}$ e $y \in U$, entonces $g(f(x), y) = g(x, f(y)) = 0$ por ser $f(y) \in U$; esto prueba 1. 2 es consecuencia directa de la Proposición 6 y el Lema 7. Veamos 3: si $x \in V_a$ e $y \in V_b$, entonces $a\, g(x, y) = g(ax, y) = g(f(x), y) = g(x, f(y)) = g(x, by) = b\, g(x, y)$ luego $g(x, y) = 0$. □

Teorema 2 *Si $f \in A_g$, entonces existe B base ortonormal de (V, g) tal que $M(f, B)$ es diagonal.*

Demostración. (Por inducción sobre $n = \dim V$). Si $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que el teorema es cierto para $n - 1$. Sea $V(\mathbb{R})$ con $\dim V = n$ y $f \in A_g$. Por el apartado 2 de la Proposición 7, existen $a \in \mathbb{R}$ y $x \in V - \{0\}$ tales que $f(x) = ax$. Sea $U = L(\{x\})$. Como $f(U) \subset U$, el apartado 1 de la Proposición 7 implica que $f(U^{\perp}) \subset U^{\perp}$, luego $f|_{U^{\perp}}$ es un endomorfismo autoadjunto del EVME $(U^{\perp}, g|_{U^{\perp}})$. Como $\dim U^{\perp} = n-1$, por hipótesis de inducción existe una base ortonormal $B_1 = (x_2, \ldots, x_n)$ de $(U^{\perp}, g|_{U^{\perp}})$ tal que $M(f|_{U^{\perp}}, B_1)$ es diagonal. Tomando $x_1 = \frac{1}{\|x\|} x$, tenemos que $B = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ es una base ortonormal de (V, g) y $M(f, B)$ es diagonal. □

Corolario 1

1. *Toda matriz simétrica real es ortogonalmente diagonalizable: si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, entonces $\exists P \in O(n)$ tal que $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal.*
2. *Si (V, g) es un EVME y $g' \in S_2(V)$, entonces $\exists B$ base ortonormal de (V, g) tal que $M_B(g')$ es diagonal.*

8. El Teorema de Sylvester.

Sabemos que todo EVME admite una base ortonormal. Vamos a generalizar esto a EVM cualesquiera.

Teorema 3 (Sylvester) *Sea* (V, g') *un EVM. Entonces, existen* $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *(que sólo dependen de* g*) y existe una base ordenada* B *de* V *tal que*

$$M_B(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A s *se le llama el* índice *de* (V, g')*; a se le llama el* rango *de* (V, g')*; y a* $n - (r + s)$ *la* nulidad *de* (V, g').

Demostración. Tomemos una métrica euclídea auxiliar g sobre V. Por el apartado 2 del Corolario 1, $\exists B_1 = (y_1, \ldots, y_n)$ base ortonormal de (V, g) tal que $M_B(g')$ es diagonal. Reordenamos los y_j de forma que primero estén los vectores correspondientes a valores propios negativos, luego los asociados a positivos y por último a cero. Si $g'(y_j, y_j) < 0$, definimos $x_j = \frac{1}{\sqrt{-g(x_j, x_j)}} y_j$; si $g'(y_j, y_j) > 0$, definimos $x_j = \frac{1}{\sqrt{g(x_j, x_j)}} y_j$; finalmente, si $g'(y_j, y_j) = 0$, definimos $x_j = y_j$. Ahora $B = (x_1, \ldots, x_n)$ cumple que $M_B(g')$ es como en el enunciado del teorema.

Sólo queda ver que s, r no dependen de la construcción anterior. Supongamos que B' es otra base ordenada de V tal que

$$M_{B'}(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_{s'} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se trata de ver que $s = s'$ y $r = r'$. Como las matrices $M_{B'}(g)$, $M_{B'}(g')$ son congruentes, tienen el mismo rango. Por tanto, $s + r = s' + r'$. Queda ver, por ejemplo, que $s = s'$. Llamemos

$$B = (x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+r}, x_{s+r+1}, \ldots, x_n),$$
$$B' = (x'_1, \ldots, x'_{s'}, x'_{s'+1}, \ldots, x'_{s'+r'}, x'_{s'+r'+1}, \ldots, x'_n)$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que $s > s'$ (si $s < s'$ el razonamiento es análogo). Considero los subespacios vectoriales de V

$$U_1 = L(\{x_1, \ldots, x_s\}), \quad U_2 = L(\{x'_{s'+1}, \ldots, x'_{s'+r'}, x'_{s'+r'+1}, \ldots, x'_n\}).$$

Entonces, $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = s + (n - s') - \dim(U_1 + U_2) \geq s + (n - s') - n = s - s' > 0$, luego $\exists x \in U_1 \cap U_2$, $x \neq 0$. Como $x \in U_1$, $g(x, x) < 0$. Como $x \in U_2$, $g(x, x) \geq 0$, contradicción. $\square$

Corolario 2 *Sean (V,g), (V',g') dos EVM. Entonces, son equivalentes:*

1. (V,g), (V',g') *son isométricos.*
2. $\dim V = \dim V'$, *Indice*$(V,g) =$ *Indice*$(V'g')$ *y Rango*$(V,g) =$ *Rango*(V',g').
3. $\dim V = \dim V'$, *Indice*$(V,g) =$ *Nulidad*$(V'g')$ *y Rango*$(V,g) =$ *Nulidad*(V',g').

9. Orientación.

En el conjunto $\mathcal{B}$ de las bases ordenadas en un EV $V(\mathbb{R})$, se define la relación de equivalencia
$$B \sim B' \Leftrightarrow \det M(1_V, B, B') > 0.$$
El conjunto cociente $\mathcal{B}/\sim$ tiene dos clases de equivalencia
$$C(B) = \{B_1 \in \mathcal{B} \mid \det M(1_V, B, B_1) > 0\}, \quad C(B') = \{B_1 \in \mathcal{B} \mid \det M(1_V, B, B_1) < 0\},$$
donde $B' = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si $B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A cada una de las dos clases $C(B), c(B')$ se le llama una *orientación* sobre V.

Si (V,g) es un EVME, podemos representar cada orientación de V por una base ortonormal. El cambio de base entre dos bases ordenadas ortonormales en la misma orientación es 1.

10. Angulo orientado en el plano.

En esta sección, (V,g) es un EVME con $\dim V = 2$.

Lema 8 *Sea B una base ortonormal de (V,g). Entonces,*
$$(\det_B(x,y))^2 + g(x,y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in V,$$
donde $\det_B = \varphi^1 \otimes \varphi^2 - \varphi^2 \otimes \varphi^1$, *y* $B^* = (\varphi^1, \varphi^2)$ *es la base dual de B.*

Demostración. Si $B = (x_1, x_2)$ y $x_B = (a_1, a_2)$, $y_B = (b_1, b_2)$ son las coordenadas de x, y respecto a B, entonces
$$\begin{aligned}\|x\|^2\|y\|^2 - g(x,y)^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (\det_B(x,y))^2.\end{aligned}$$
□

Si además suponemos $x, y \in V - \{0\}$, el Lema 8 se traduce en
$$\left(\frac{\det_B(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right)^2 + \left(\frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right)^2 = 1.$$

Definición 14 Sea $C(B)$ una orientación en un plano euclídeo (V, g), representada por una base ortonormal B. Dados $x, y \in V - \{0\}$, el ángulo orientado es el único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\det_B(x, y)}{\|x\|\|y\|}, \qquad \cos\theta = \frac{g(x, y)}{\|x\|\|y\|}.$$

11. Producto vectorial en el espacio.

En esta sección, (V, g) es un EVME con $\dim V = 3$. Sabemos que por ser g no degenerada, la aplicación

$$\Phi \colon V \to V^*, \quad \Phi(x) = \varphi_x \colon V \to \mathbb{R}$$

donde $\varphi_x(y) = g(x, y)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Sea B una base ortonormal, y $\det_B$ el tensor determinante en esa base, es decir

$$\det_B(y_1, y_2, y_2) = \det((y_1)_B, (y_2)_B, (y_3)_B), \quad \forall y_1, y_2, y_3 \in V,$$

donde $(y_i)_B \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas de $y_i \in V$ respecto a B.

Dados $x, y \in V$, consideremos la forma lineal $\det_B(x, y, \cdot) \in V^*$. Así, existe un único vector $x \times y \in V$ tal que $\Phi(x \times y) = \det_B(x, y, \cdot)$. Es decir,

$$g(x \times y, z) = \det_B(x, y, z) \quad \forall z \in V. \tag{5}$$

A $x \times y$ se le llama el *producto vectorial* de x, y respecto a la orientación dada por B.

Proposición 8 (Propiedades del producto vectorial) *Dados $x, y, z, x', y' \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$,*

1. *Si $x_B = (a_1, a_2, a_3)$, $y_B = (b_1, b_2, b_3)$, entonces*
$$(x \times y)_B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\imath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$
2. $(ax + bx') \times y = a(x \times y) + b(x' \times y)$.
3. $x \times (ay + by') = a(x \times y) + b(x \times y')$.
4. $x \times y = -y \times x$.
5. $g(x \times x', y \times y') = g(x, y)\, g(x', y') - g(x, y')\, g(x', y)$.
6. $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - g(x, y)^2$.
7. $\|x \times y\| = \|x\|\, \|y\| \operatorname{sen} \sphericalangle(x, y)$ *si $x, y \neq 0$ (aquí $\sphericalangle(x, y)$ es el ángulo orientado en el plano generado por x, y y respecto a la orientación inducida).*

8. $x \times (y \times z) = g(x, z)y - g(x, y)z$.

Demostración. 1 se deduce de (5) tomando z como cada vector de B. 2 y 3 son triviales. 4 se deduce de que $\det_B$ es antisimétrico en sus dos primeras variables. 6 se deduce de 5 tomando $y = x, y' = x'$.

Veamos 5: Ambos miembros de la igualdad son tensores de tipo $(4, 0)$ luego basta ver que coinciden sobre los vectores de una base ordenada ortonormal positiva $B = (x_1, x_2, x_3)$ de (V, g). Hay $3^4 = 81$ listas de cuatro vectores con los elementos de B, pero no tenemos que comprobarlos todos debido a las propiedades de simetría en los dos miembros. Por ejemplo, es fácil comprobar que

- Si $x = x'$ o $y = y'$, los dos miembros se anulan.
- Si cambiamos x por x' o bien y por y', los dos miembros cambian de signo.
- Si cambiamos la primera pareja por la segunda pareja de variables, los dos miembros permanecen igual.

Usando las propiedades anteriores, al evaluar en una lista (x_i, x_j, x_k, x_j) de vectores de B, tenemos:

- Si sólo interviene un dígito distinto en la lista, los dos miembros valen cero.
- Si intervienen dos dígitos distintos $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ en la lista, sólo tenemos que comprobar la igualdad para listas del tipo (x_a, x_b, x_a, x_b) con $a < b$. Esto produce 3 posibles listas (abreviado): $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 3, 1, 3)$, $(2, 3, 2, 3)$.
- Si intervienen 3 dígitos distintos $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ en la lista, sólo tenemos que comprobar la igualdad para listas del tipo (x_a, x_b, x_a, x_c). Esto produce otras 3 posibles listas (abreviado): $(1, 2, 1, 3)$, $(2, 1, 2, 3)$, $(3, 1, 3, 2)$.

La igualdad en cada una de las 6 listas anteriores se comprueba por cálculo directo.

Probamos 7: $\|x \times y\|^2 \overset{(6)}{=} \|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2 \sphericalangle(x, y)) = \|x\|^2\|y\|^2 \operatorname{sen}^2 \sphericalangle(x, y)$, y sólo queda extraer raíces cuadradas ($\operatorname{sen} \sphericalangle(x, y) \geq 0$ porque $\sphericalangle(x, y) \in [0, \pi]$).

Terminamos probando 8: Per definición, $x \times (y \times z)$ es el único vector de V tal que

$$g(x \times (y \times z), w) = \det_B(x, y \times z, w), \quad \forall w \in V.$$

Pero $g(g(x, z)y - g(x, y)z, w) = g(x, z)g(y, w) - g(x, y)g(z, w) = g(x, z)g(w, y) - g(x, y)g(z, w)$ $\overset{(5)}{=} g(x \times w, z \times y) = \det_B(x, w, z \times y) = \det_B(x, y \times z, w)$. □

12. Clasificación de las isometrías de un EVME.

En esta sección, (V, g) es un EVME.

Lema 9 *Sea* $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. *Entonces:*

1. $\det f = \pm 1$.

2. Si $a \in \mathbb{R}$ *es un valor propio de* $f \;\Rightarrow\; a = \pm 1$.

3. Si $U \leq V$ *cumple* $f(U) \subset U \;\Rightarrow\; f(U^\perp) \subset U^\perp$.

Demostración. 1,2 se dejan como ejercicio. Probamos 3: Sean $x \in U^\perp$, $y \in U$. $g(f(x), y) = g(x, f^{-1}(y))$, luego para que esto sea cero basta probar que $f^{-1}(U) \subset U$. Pero $f(U) \subset U$ implica $f(U) = U$, luego $U = f^{-1}(U)$. □

Teorema 4 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim 2) *Sea* (V, g) *un EVME son* $\dim V = 2$, *y* $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. *Entonces,* $\exists B$ *base ortonormal de* (V, g) *tal que*

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textit{para algún } \theta \in [0, 2\pi), \textit{ ó } M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Tomemos una base ortonormal B_1 de (V, g). Por el Lema 4, $M(f, B_1) = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Como $\det f = \pm 1 \;\Rightarrow\; ad - bc = \pm 1$. De $M(f, B_1) \cdot M(f, B_1)^t = I_2$ obtenemos otras tres ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0.$$

Sean $u, v, w \in V$ tales que $u_{B_1} = (a, b)$, $v_{B_1} = (c, d)$, $w_{B_1} = (d, -c)$. Como B_1 es ortonormal, las ecuaciones anteriores implican que

$$g(u, w) = \pm 1, \quad \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1, \quad g(u, v) = 0.$$

Por la desigualdad de Schwarz, $1 = |g(u, w)| \leq \|u\|\|w\| = 1$, luego $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda w$. Tomando normas, $\lambda = \pm 1$ luego $u = \pm w$. Discutimos casos:

- Si $u = w \;\Rightarrow\; M(f, B_1) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + c^2 = 1$, luego $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\theta = a$, $\operatorname{sen}\theta = c$. Es decir, podemos tomar la base ortonormal B del enunciado como cualquier base ortonormal de (V, g).

- Si $u = -w \;\Rightarrow\; M(f, B_1) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + c^2 = 1$, luego $\exists! \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\theta = a$, $\operatorname{sen}\theta = c$, es decir, $M(f, B_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Esta matriz es simétrica (luego ortogonalmente diagonalizable por el Corolario 1). Su polinomio característico es $p_f(t) = (t-1)(t+1)$. Tomemos $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_{-1}$ (vectores propios) con $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Como f es autoadjunto (ya que $M(f, B_1)$ es simétrica y B_1 es ortonormal), tenemos $x_1 \perp x_2$ (apartado 3 de la Proposición 7) luego $B = (x_1, x_2)$ es una base ortonormal de (V, g) y $M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. □

Corolario 3 *Toda matriz $A \in O(2)$ es de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \textit{rotación de ángulo } \theta, \textit{ ó}$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \equiv \textit{simetría respecto de la recta generada por } (\cos\tfrac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}).$$

para un único $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Para llegar a las dos posibilidades anteriores para A basta seguir la demostración del Teorema 4. Para probar que la segunda posibilidad es una simetría respecto de la recta generada por $(\cos\frac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$, basta diagonalizar la segunda matriz. □

Definición 15 Una isometría $f \in \operatorname{Iso}(V, g)$ (en cualquier dimensión) se dice *rotación* si $\det f = 1$, y *reflexión* si $\det f = -1$.

Teorema 5 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim 3) *Sea (V, g) un EVME son $\dim V = 3$, y $f \in \operatorname{Iso}(V, g)$. Entonces, $\exists B$ base ortonormal de (V, g) y $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ tales que*

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \quad \text{ó} \quad M(f, B) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right).$$

Demostración. El polinomio característico de f tiene grado 3, luego tiene una raíz $a \in \mathbb{R}$ al menos. Por el apartado 2 del Lema 9, $a = \pm 1$. Tomemos $x \in V - \{0\}$ tal que $f(x) = ax$ y sea $U = L(\{x\})$. Así, $f(U) \subset U$ luego $f(U^\perp) \subset U^\perp$ por el apartado 3 del Lema 9. Por tanto, $f|_{U^\perp}$ cae en las hipótesis del Teorema 4 luego $\exists B' = (x_2, x_3)$ base ortonormal de $(U^\perp, g|_{U^\perp})$ tal que

$$M(f|_{U^\perp}, B') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\text{ ó }\; M(f|_{U^\perp}, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea $x_1 = \frac{1}{\|x\|}x$, y $B_1 = (x_1, x_2, x_3)$, base ortonormal de (V, g). Entonces,

$$M(f, B_1) = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \quad \text{ó} \quad M(f, B_1) = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si $a = 1$, la matriz de la izquierda es una de las opciones del enunciado del Teorema (luego tomamos $B = B_1$), y la matriz de la derecha también lo es si intercambiamos el primer y el tercer vector de B_1 (luego tomamos $B = (x_3, x_1, x_2)$ y $\theta = 0$). Si $a = -1$, la matriz de la izquierda es una de las opciones del enunciado del Teorema (luego tomamos $B = B_1$), y la matriz de la derecha también lo es si tomamos $B = (x_2, x_3, x_1)$ y $\theta = \pi$. □

Nota 1 1. Si fijamos una orientación en V, la demostración anterior prueba que podemos elegir la base ortonormal B positivamente orientada.

2. La interpretación geométrica de f cuando su matriz en una base ortonormal $B = (x_1, x_2, x_3)$ es la de la izquierda en el enunciado del Teorema 5, es la de un giro de ángulo θ respecto al eje dado por $L(\{x_1\})$, en el sentido contrario a las agujas del reloj en el plano $L(\{x_2, x_3\})$ (y es una rotación en el sentido de la Definición 15). En el caso de que $M(f, B)$ venga dada por la de la derecha en el enunciado del Teorema 5, f es una reflexión (según la Definición 15), pero no es una reflexión geométrica respecto a un plano: es la composición de la simetría respecto del plano $L(\{x_2, x_3\})$ con el giro de ángulo θ respecto al eje $L(\{x_1\})$.

Teorema 6 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim n) *Sea (V, g) un EVME son $\dim V = n$, y $f \in \operatorname{Iso}(V, g)$. Entonces, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\theta_1, \ldots, \theta_r \in [0, 2\pi)$ y una base ortonormal B de (V, g) tales que $k_1 + k_2 + 2r = n$ y*

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{k_1} & & & & \\ \hline & I_{k_2} & & & \\ \hline & & \operatorname{Rot}_{\theta_1} & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & \operatorname{Rot}_{\theta_r} \end{array}\right),$$

donde $\operatorname{Rot}_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ *y fuera de las cajas en la diagonal sólo hay ceros.*

Demostración. Llamemos $U = \{x \in V \mid f(x) = x\}$, $W = \{x \in V \mid f(x) = -x\}$. Es posible que U ó W sean $\{0\}$ (pero caso de que f tenga valores propios, éstos son ± 1). Como $U \cap W = \{0\}$, tenemos $U + W = U \oplus W$. Además, $f(U + W) \subset U + W$ luego $f[(U + W)^\perp] \subset (U + W)^\perp$ por el apartado 3 del Lema 9. Tenemos dos posibilidades:

- $\underline{(U+W)^{\perp}=\{0\}}$. En este caso, $U+W=V$ luego $V=U\oplus W$. Tomando una base en cada subespacio, tenemos $M(f,B)=\left(\begin{array}{c|c} I_{k_1} & \\ \hline & I_{k_2}\end{array}\right)$ con $k_1=\dim U$, $k_2=\dim U_2$, que es una de las opciones del enunciado.

- $\underline{(U+W)^{\perp}\neq\{0\}}$. En este caso, $f|_{(U+W)^{\perp}}\in \mathrm{Iso}((U+W)^{\perp},g|_{(U+W)^{\perp}})$, y esta última isometría no tiene valores propios. Así que en este caso el argumento se reduce a clasificar las isometrías sin vectores propios de un EVME (en particular, éste ha de tener dimensión par). Esto es lo que haremos a continuación.

Simplificamos la notación llamando f a una isometría sin valores propios de un EVME (V,g). Veamos que $f+f^{-1}$ es un endomorfismo autoadjunto respecto a g: Dados $x,y\in V$,

$$g((f+f^{-1})(x),y)=g(f(x),y)+g(f^{-1}(x),y)=g(x,f^{-1}(y))+g(x,f(y))=g(x,(f+f^{-1})(y)).$$

Como $f+f^{-1}$ es autoadjunto, admite al menos un valor propio $a_1\in\mathbb{R}\ \Rightarrow \exists x_1\in V-\{0\}$ tal que $(f+f^{-1})(x_1)=a_1x_1$. Aplicando f, queda $f(f(x_1))=-x_1+a_1f(x_1)$. Por tanto, $U_1:=L(\{x_1,f(x_1)\})$ cumple $f(U_1)\subset U_1$, luego $f|_{U_1}\in \mathrm{Iso}(U_1,g|_{U_1})$. Por el Teorema 4, $\exists\theta_1\in[0,2\pi)$ y una base ortonormal B_1 de $(U_1,g|_{U_1})$ tales que

$$M(f|_{U_1},B_1)=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1\\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}=\mathrm{Rot}_{\theta_1}.$$

(la otra posibilidad del Teorema 4 no puede darse porque $f|_{U_1}$ no tiene valores propios). Como $f(U_1)\subset U_1$, tenemos $f(U_1^{\perp})\subset U_1^{\perp}$ por el apartado 3 del Lema 9. Ahora consideramos la restricción $f|_{U_1^{\perp}}\in\mathrm{Iso}(U_1^{\perp},g|_{U_1^{\perp}})$, que está en la misma situación anterior (no tiene valores propios). Repitiendo el proceso en $U_1^{\perp}$ encontraremos un segundo plano vectorial $U_2\subset U_1^{\perp}$ y una segunda rotación. De esta forma vamos descomponiendo V en planos vectoriales ortogonales U_1, $U_2\subset U_1^{\perp}$, $U_3\subset U_2^{\perp}\dots$ hasta terminar con la dimensión de V (que es par). $\square$

13. Ejercicios.

1. Prueba el Lema 1.

2. Prueba la Proposición 1.

3. Demuestra que todo EV real admite una métrica euclídea.

4. Si $\{x_1,\dots,x_n\}$ es la base usual $\mathbb{R}^n$ y $\{\varphi^1,\dots,\varphi^n\}$ es su base dual, ¿Cómo puede escribirse la métrica g_A del ejemplo 2 tras la Definición 1 en términos de la base asociada de $S_2(V)$?

5. En $\mathbb{R}^2$ se considera la base usual $B_u = \{e_1, e_2\}$ y las métricas g_k, $k = -2, -1, 0, 1, 2$ dadas por
$$M_{B_u}(g_k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$
Estudiar en función de k de qué tipo es la métrica g_k.

6. Construye una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ tal que el vector $(1, -2)$ sea ortogonal a todos los vectores.

7. Prueba los apartados 1 y 2 de la Proposición 3.

8. Caracteriza la igualdad en la desigualdad triangular.

9. Sea (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo, y $x, y \in V$. Demostrar la *ley del paralelogramo,*
$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$
y el Teorema de Pitágoras,
$$x, y \text{ son ortogonales } \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

10. Escribe las desigualdades de Schwarz y triangular en los casos particulares de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ y en $C([a, b])$ con el producto L^2.

11. Prrueba que dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, se tiene
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$
y que la igualdad se da si y sólo si $a_1 = \ldots = a_n$.

12. Demuestra que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es cualquier función continua, entonces
$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leq \int_0^1 (f(x))^2\, dx,$$
y que la igualdad se da si y sólo si f es constante.

13. Demuestra que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $(\text{Traza}(A))^2 \leq n\, \|A\|^2$, y la igualdad se da si y sólo si A es un múltiplo de la identidad.

14. Prueba la Proposición 4.

15. Prueba que durante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, no se cambian los subespacios generados por cada conjunto ordenado de la base original. Es decir, si $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es la base original de V y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es la base ortonormal obtenida por ortonormalización de Gram-Schmidt a partir de ella, entonces
$$L(\{y_1\}) \oplus \ldots \oplus L(\{y_i\}) = L(\{x_1\}) \oplus \ldots \oplus L(\{x_i\}),\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

16. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$. Consideremos la aplicación
$$g : V \times V \to \mathbb{R} \mid g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt.$$
   i) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V.

   ii) Demuestra que la base $\{1, x, x^2\}$ no es ortonormal respecto de g y obtén a partir de ésta, una base ortonormal por el procedimiento de Gram-Schmidt.

17. Prueba el Lema 3.

18. Sea (V, g) un EVM y $f : V \to V'$ un isomorfismo de V en otro espacio vectorial real. Prueba que existe una única métrica g' sobre V' que hace a f una isometría de (V, g) en (V', g').

19. Sea (V', g') un EVM y $f : V \to V'$ un monomorfismo de otro espacio vectorial real V en V'. Prueba que existe una única métrica g sobre V que hace a f una isometría de (V, g) en $(f(V), g'|_{f(V)})$.

20. Prueba la Proposición 5.

21. Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, B una base de $V(\mathbb{R})$ y g la única métrica sobre V tal que $M_B(g) = A$. Demuestra que g es euclídea si y sólo si existe $Q \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $A = Q^t \cdot Q$.

22. Prueba el Lema 4.

23. Sea g la métrica sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base usual es $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Prueba que g es euclídea.

24. Prueba el apartado 2 del Lema 5.

25. Sea U un subespacio vectorial de un EVME (V, g). Prueba que dado $x \in V$, $p_U(x)$ en el único vector de U que minimiza $\|x - u\|$, $\forall u \in U$.

26. Es posible que la restricción de una métrica no degenerada a un subespacio sea degenerada (esto no ocurre para métricas euclídeas): prueba que la métrica g sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base usual es $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es no degenerada, pero que la restricción de g a $U = L(\{(1,0)\})$ es degenerada.

27. Supongamos que (V, g) es un EVM no degenerado, y $U \leq V$ tal que $g|_U$ es no degenerada. Definiendo $U^\perp$ como en el caso euclídeo, probar que $V = U \oplus U^\perp$. Indicación: para ver que $V = U + U^\perp$, toma $x \in V$ y una base $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de U. ¿Cuándo el paréntesis en la descomposición $x = \sum_{i=1}^k a_i x_i + \left(x - \sum_{i=1}^k a_i x_i\right)$ está en $U^\perp$? (traduce esto a un sistema de ecuaciones lineales).

28. Prueba el Lema 6.

29. Prueba la Proposición 6.

30. Prueba el Corolario 1.

31. Prueba el Corolario 2.

32. Prueba que al cambiar la orientación en un plano euclídeo, el ángulo orientado θ entre dos vectores pasa a ser $2\pi - \theta$.

33. Sean g, g' dos métricas sobre el mismo espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, tales que
$$g(x,y) = 0 \iff g'(x,y) = 0.$$
¿Tienen que coincidir g y g'?

34. Prueba los apartados 1,2 del Lema 9.

35. Criterio de los menores para saber si una métrica es euclídea. Sea (V, g) un EVM y B una base ordenada de V. Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea A_k el menor de $M_B(g)$ formado por las k primeras filas y columnas de A. Demuestra que g es euclídea si y sólo si $\forall k$, $\det(A_k) > 0$. Indicación para la condición suficiente: Razona por inducción sobre $\dim V$ y encuentra una base ortonormal $B_U = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ de $g|_U$, donde $U \subset V$ está generado por los primeros $n-1$ vectores de B. Amplía B_U a $B_1 = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ y expresa
$$M_{B_1}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & a^t \\ \hline a & a_n \end{array}\right)$$

para cierto $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Define $B_2 = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i y_i)$ y prueba que

$$M_{B_2}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \end{array} \right).$$

Finalmente, prueba que $a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$, por lo que g será euclídea.

36. Sea V un espacio vectorial real, y U, W subespacios vectoriales de V tales que $V = U \oplus W$. Demuestra que existe una métrica euclídea g sobre V tal que W es el suplemento ortogonal de U respecto a g.

37. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V, g). Prueba que V es suma directa ortogonal de $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

38. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ z + t = 0\}, \quad W = L(\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}).$$

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la isometría determinada por las condiciones

(A) $f(U) = W$,

(B) $f(1, -1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$,

(C) $\det f = 1$.

Prueba que f es diagonalizable, y calcula (si existe) una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual que esté formada por vectores propios de f.

39. Encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal.

40. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V, g), tal que $g(f(x), x) \geq 0$ $\forall x \in V$. Prueba que $\exists h$ endomorfismo autoadjunto de (V, g) tal que $h \circ h = f$. ¿Es h único?

41. (Descomposición polar de una matriz). Sea (V, g) un EVME y $f \colon V \to V$ un automorfismo de V. Definimos $\widehat{f} \colon V \to V$ mediante $g(f(x), y) = g(x, \widehat{f}(y))$, $\forall x, y \in V$.

(A) Prueba que $f \circ \widehat{f}$ es un endomorfismo autoadjunto de (V, g), con todos sus valores propios positivos.

(B) Encuentra un endomorfismo autoadjunto h de (V, g) con todos sus valores propios positivos tal que $h \circ h = f \circ \widehat{f}$.

(C) Prueba que $h^{-1} \circ f$ es una isometría de (V, g).

(D) Aplica lo anterior para probar que toda matriz $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ puede escribirse como $A = P \cdot R$ donde $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tiene todos sus valores propios positivos y $R \in O(n)$.