

# Una nueva edad de oro de las superficies mínimas

Joaquín Pérez\*

15 de septiembre de 2016

## 1. Introducción

Las superficies mínimas, junto con el problema isoperimétrico, están entre los problemas geométricos más antiguos y estudiados en Matemáticas, y su interés a través de los siglos ha provocado el desarrollo de diversas ramas de esta ciencia. En sus orígenes, el Cálculo de Variaciones desarrollado por Euler y Lagrange en el siglo XVIII permitió una formulación satisfactoria del problema de minimizar el área de una superficie con un borde dado, aunque con poca profusión de ejemplos. Un siglo más tarde, matemáticos de la talla de Enneper, Scherk, Schwarz, Riemann y Weierstrass produjeron enormes avances sobre superficies mínimas mediante la aplicación del recién creado Análisis Complejo (nuevos ejemplos, representación analítica,...). En la primera mitad del siglo XX, de nuevo las superficies mínimas cobraron empuje con la incipiente teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales, destacando las aportaciones de Bernstein, Courant, Douglas (quien ganó en 1936 la primera medalla Fields<sup>1</sup> por su solución al problema de Plateau), Morrey, Morse, Radó y Shiffman. A partir de la segunda mitad del siglo pasado, gigantes de la altura de Almgren, Alt, Calabi, do Carmo, Chern, Federer, Finn, Fleming, Gackstatter, Gulliver, Hardt, Hildebrandt, Jenkins, Lawson, Nitsche, Osserman, Serrin y Simon, abrieron nuevas vías mediante el uso de múltiples técnicas, desde las superficies de Riemann a la Teoría Geométrica de la Medida, pasando por los Sistemas Integrables, la Geometría Conforme o el Análisis Funcional. La irrupción de los ordenadores, con su potencia de cálculo y de representación gráfica, fue crucial para el descubrimiento a partir de los años 80 de nuevos ejemplos de superficies mínimas completas sin autointersecciones y el consiguiente planteamiento de conjeturas sobre clasificación de ejemplos, estructura de familias con topología prescrita, etc. Muchos de los expertos actuales en la teoría de superficies mínimas están de acuerdo en que estos hitos definen “edades de oro” de la teoría de superficies mínimas.

En este artículo intentaremos convencer al lector de que al igual que en los hitos anteriores, parece que estamos asistiendo desde 2004 a una nueva edad de oro de las superficies mínimas, propiciada por una nueva herramienta: la teoría de Colding-Minicozzi, publicada en una serie impresionante de cuatro artículos en el mismo número de *Annals of Mathematics* [6, 7, 8, 9], que analiza la convergencia de sucesiones de superficies mínimas embebidas sin imponer a priori cortas uniformes del área o de la

---

\*Investigación financiada parcialmente por el proyecto MEC/FEDER MTM2014-52368-P.

<sup>1</sup>Compartida con Ahlfors por sus trabajos sobre superficies de Riemann.

curvatura. Veremos cómo esta teoría (no exenta de cierta polémica por lo intrincado de la misma) ha permitido resolver problemas abiertos que hasta hace relativamente poco se consideraban inalcanzables. Y nos aventuraremos, con todas las reservas que merecen las predicciones, a exponer algunos de los problemas abiertos más interesantes en este campo.

Para desarrollar estos objetivos en un número reducido de páginas, debemos pagar el precio de no entrar en detalles. El lector interesado podrá saciar su curiosidad en textos científicos más o menos expositivos como [3, 5, 10, 15, 20, 21, 22, 23, 25, 35, 45], y en los libros o capítulos de libros [16, 17, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 46].

## 2. Resultados básicos

Hemos citado que la teoría de superficies mínimas es una confluencia de muchas ramas de las Matemáticas. Esto se pone de manifiesto por el hecho de que podemos definir la minimalidad de una superficie de ocho formas distintas pero equivalentes, atendiendo a la teoría que más nos interese.

**Definición 2.1** Una inmersión isométrica  $X = (x_1, x_2, x_3): M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie Riemanniana en el espacio Euclídeo tridimensional es mínima cuando sus funciones coordenadas son armónicas:  $\Delta x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

La fórmula clásica  $\Delta X = 2HN$ , que liga el laplaciano de la inmersión isométrica con su curvatura media  $H \in C^\infty(M)$  (media aritmética de las curvaturas principales) y su normal unitario o aplicación de Gauss  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ , nos lleva a la segunda definición.

**Definición 2.2** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* cuando su curvatura media se anula en todo punto.

Localmente y tras un giro, toda superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  puede escribirse como el grafo de una función diferenciable  $u = u(x, y)$ . In 1776, Meusnier [44] descubrió que la condición de anulación de la curvatura media se expresa por una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, cuasilineal elíptica.

**Definición 2.3** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es mínima si alrededor de cada punto, se escribe como grafo de una función  $u = u(x, y)$  que satisface la EDP

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0, \quad (1)$$

que admite una formulación como divergencia:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Si perturbamos la inclusión  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  en un dominio relativamente compacto  $\Omega \subset M$  por medio de una función diferenciable con soporte compacto  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , entonces  $X + tuN$  es de nuevo una inmersión para  $|t| < \varepsilon$  y  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. La curvatura media  $H$  de  $M$  se relaciona con la primera derivada del funcional

área de la variación,  $A(t) = \text{Area}((X + tuN)(\Omega))$ , por medio de la *primera fórmula de variación del área*:

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} uH \, dA, \quad (2)$$

donde  $dA$  es el elemento de área de  $M$ . Con esto llegamos a la cuarta definición de minimalidad.

**Definición 2.4** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* si es un punto crítico del funcional área para toda variación con soporte compacto.

Una consecuencia de la segunda fórmula de variación del área (esto es, la expresión para  $A''(0)$  con la notación anterior, que no desarrollaremos aquí) muestra que todo punto en una superficie mínima admite un entorno que tiene la menor área de entre todas las superficies con el mismo borde que este entorno. Esto justifica la denominación “mínima” para estas superficies (no confundir con minimizar el área globalmente, que es una propiedad mucho más restrictiva: las únicas superficies completas que cumplen esta minimización global en  $\mathbb{R}^3$  son los planos afines).

**Definición 2.5** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* cuando todo punto  $p \in M$  admite un entorno que tiene la menor área de entre todas las superficies con la misma frontera.

Las Definiciones 2.4 y 2.5 sitúan las superficies mínimas como los análogos 2-dimensionales de las geodésicas en la Geometría Riemanniana, y las conectan con el Cálculo de Variaciones. En este último, otro funcional de gran importancia es la *energía*,

$$E = \int_{\Omega} |\nabla X|^2 dA,$$

donde de nuevo  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión isométrica y  $\Omega \subset M$  es un dominio relativamente compacto. Los funcionales área y energía se relacionan mediante la desigualdad  $E \geq 2A$ , y la igualdad se da exactamente cuando  $X$  es conforme. El hecho de que toda superficie admite coordenadas locales conformes (isotermas) nos permite dar otras dos definiciones equivalentes de minimalidad.

**Definición 2.6** Una inmersión conforme  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *mínima* si es un punto crítico del funcional energía para variaciones con soporte compacto, o equivalentemente, cuando todo punto de la superficie admite un entorno que tiene la menor energía de entre todas las superficies con la misma frontera.

Desde un punto de vista físico, la curvatura media de una superficie que separa dos medios expresa la diferencia de presiones entre los dos medios. Luego cuando ambos medios están sometidos a la misma presión, la superficie que los separa es mínima. Esto ocurre con las películas de jabón que formamos al sacar un marco de alambre (matemáticamente, una curva de Jordan no necesariamente plana) previamente sumergido en agua con jabón<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Sin embargo, las pompas de jabón que todos hemos soplado alguna vez tienen curvatura media constante distinta de cero, ya que el volumen que encierran está sometido a una presión mayor que la atmosférica.

**Definición 2.7** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* si cada punto  $p \in M$  tiene un entorno que coincide con la película de jabón que podemos formar con su frontera.

Para la última definición de minimalidad, recordemos que la diferencial  $dN_p$  en cada punto  $p \in M$  de la aplicación de Gauss  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  es un endomorfismo autoadjunto del espacio tangente  $T_pM$ , y por tanto existe una base ortonormal de  $T_pM$  en la que  $dN_p$  diagonaliza (direcciones principales de  $M$  en  $p$ ), siendo los opuestos de sus valores propios las curvaturas principales de  $M$  en  $p$ . Como la curvatura media  $H$  es la media aritmética de las curvaturas principales, la minimalidad de  $M$  equivale a que  $dN_p$  tenga traza cero, es decir, que en cualquier base ortonormal de  $T_pM$  la matriz de  $dN_p$  sea del tipo

$$dN_p = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Después de identificar  $N$  con su proyección estereográfica sobre el plano complejo extendido, las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos permiten enunciar la octava versión equivalente de minimalidad.

**Definición 2.8** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* cuando su aplicación de Gauss proyectada estereográficamente  $g: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  es una función meromorfa.

Las superficies mínimas aparecen en la naturaleza no sólo en las películas de jabón, sino por ejemplo en las interfases que separan fluidos inmiscibles a la misma presión, como los copolímeros [1]. Sus propiedades de minimización han hecho que renombrados arquitectos como Frei Otto las hayan usado para diseñar estructuras óptimas como la cubierta del estadio olímpico de Munich, y sus formas equilibradas han despertado el interés de escultores como Robert Engman o Robert Longhurst. Desde un punto de vista puramente matemático, se han estudiado las superficies mínimas en ambientes distintos del espacio Euclídeo, lo que ha producido aplicaciones en problemas tan diversos como la conjetura de la masa positiva y la conjetura de Penrose en Física Matemática, la conjetura de Smith sobre difeomorfismos de la esfera tridimensional de orden finito, o las conjeturas de Poincaré y de geometrización de Thurston en teoría de 3-variedades.

### 3. Superficies mínimas clásicas

Por teoría clásica entenderemos la que estudia las superficies mínimas conexas, orientables y sin autointersecciones (embebidas) en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . También impondremos hipótesis globales como completitud. Abreviaremos por  $\mathcal{M}_C$  a la familia de todas las superficies completas, mínimas y embebidas  $M \subset \mathbb{R}^3$  con género finito. Para entender esto último, recordemos que el principio del máximo para funciones armónicas implica que no existen superficies mínimas compactas y sin borde en  $\mathbb{R}^3$ ; por tanto, las superficies mínimas completas han de tener finales topológicos (es decir, formas de ir “a infinito” intrínsecamente en la superficie), y tras compactificar topológicamente la superficie mínima  $M$  añadiendo un punto por cada final, el género de  $M$  se define como el de su compactificación. Si  $g \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$  y  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,

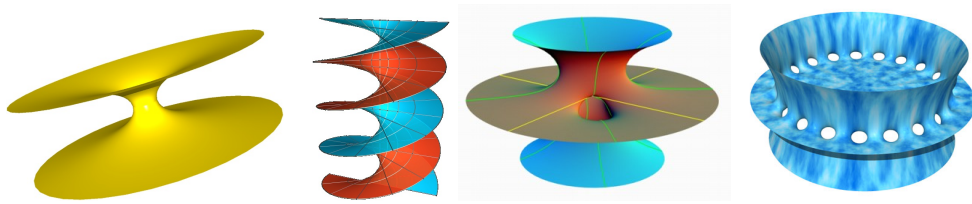


Figura 1: De izquierda a derecha: La catenoide, el helicoides, el toro de Costa y una superficie mínima de Hoffman-Meeks.

denotaremos por  $\mathcal{M}_C(g, k)$  al subconjunto de  $\mathcal{M}_C$  formado por aquellas superficies con género  $g$  y  $k$  finales topológicos.

Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice *propia* si toda sucesión divergente de puntos de  $M$  (en la topología inducida) diverge también en  $\mathbb{R}^3$ . Es decir, las superficies completas que son propias son aquellas cuyos finales topológicos están en el “infinito” de  $\mathbb{R}^3$ . Llamaremos  $\mathcal{M}_P$  al subconjunto de  $\mathcal{M}_C$  formado por las superficies mínimas propias, y llamaremos  $\mathcal{M}_P(g, k) = \mathcal{M}_P \cap \mathcal{M}_C(g, k)$ .

Nuestro objetivo en esta sección consiste en describir los ejemplos principales de superficies mínimas en estas familias, atendiendo a su topología, estructura conforme, comportamiento asintótico y los principales resultados de clasificación. A medida que vayamos pasando por esta descripción, comentaremos algunos de los problemas abiertos más interesantes.

### 3.1. Superficies mínimas completas con topología finita

El ejemplo trivial en esta clase es el plano (topológicamente equivalente a una esfera menos un punto, luego con género cero y un final). Los primeros ejemplos no triviales de superficies mínimas caen en esta clase: la catenoide descubierta por Euler [18] en 1741 (género cero y dos finales) y el helicoides encontrado por Meusnier [44] en 1776 (género cero y un final). Ambas superficies admiten múltiples caracterizaciones: entre las más clásicas están que la catenoide es la única superficie mínima de revolución junto con el plano (Euler), y el helicoides es la única superficie mínima reglada junto con el plano (Catalan). Siguiendo con ejemplos destacados en esta familia, merecen una mención el toro de Costa [13] por ser la primera superficie mínima completa, embebida y de topología finita descubierta tras las anteriores (¡después de 206 años!), que tiene género 1 y 3 finales, y su generalización a cualquier género  $g \geq 1$  por Hoffman y Meeks [24], también con tres finales, véase la Figura 1.

Sobre la relación de las clases  $\mathcal{M}_C$  y  $\mathcal{M}_P$  en el caso de superficies de topología finita, debemos destacar un resultado reciente de Colding y Minicozzi [11], que asegura que toda superficie mínima completa, embebida y de topología finita es propia. Esta es ya una aplicación de la famosa teoría de los autores, de la que hablaremos un poco más adelante.

Para continuar nuestra discusión sobre el caso de topología finita distinguiremos dos subcasos, según que el número de finales de nuestra superficie mínima sea 1 o mayor.

SUPERFICIES CON GÉNERO FINITO Y UN FINAL. Meeks y Rosenberg [43] fueron los primeros en aplicar la teoría de Colding-Minicozzi para demostrar en 2005 que el plano y el helicoides son los únicos ejemplos posibles en  $\mathcal{M}_P(0, 1)$  (es decir, resolvieron el caso simplemente conexo), y por el resultado anterior de Colding y Minicozzi, también se tiene la misma unicidad en  $\mathcal{M}_C(0, 1)$ . En cuanto al comportamiento asintótico de las superficies en  $\mathcal{M}_P(g, 1) = \mathcal{M}_C(g, 1)$  con  $1 \leq g < \infty$ , Bernstein y Breiner [2] probaron en 2011 que toda superficie en  $\mathcal{M}_P(g, 1)$  es asintótica a un helicoides y es conformemente parabólica<sup>3</sup>. Por ello, las superficies en  $\mathcal{M}_P(g, 1)$  suelen llamarse *helicoides de género  $g$* . Sobre resultados de existencia en esta línea destacaremos que Hoffman, Weber y Wolf [28] encontraron en 2009 un helicoides de género 1 con la estructura conforme de un toro rómbico menos un final, y Hoffman, Traizet y White [26, 27] han encontrado recientemente ejemplos en  $\mathcal{M}_P(g, 1)$  para cada  $g \geq 1$  finito. Un problema abierto importante sobre  $\mathcal{M}_P(g, 1)$  es la posible unicidad de ejemplos con género dado: se conjetura que existe un único helicoides de género  $g$  para cada  $g \geq 1$ , aunque ni siquiera se conoce la versión local de este resultado.

SUPERFICIES CON GÉNERO FINITO Y  $k$  FINALES,  $2 \leq k < \infty$ . Aquí el principal resultado estructural se debe a Collin [12], que probó en 1997 que si  $M \in \mathcal{M}_P(g, k)$  tiene  $g, k$  finitos,  $k \geq 2$ , entonces  $M$  cae en una familia particularmente bien estudiada: las superficies de *curvatura total finita*, es decir, aquellas donde la curvatura de Gauss  $K$  es integrable:

$$\int_M K \, dA = - \int_M |K| \, dA > -\infty. \quad (3)$$

Esta condición, por trabajos previos de Huber y Osserman, implica que  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\mathbb{M}$  de género  $g$  a la que hemos quitado  $k$  puntos (en particular,  $M$  es conformemente parabólica), y que la aplicación de Gauss  $g: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  extiende a una aplicación meromorfa definida sobre  $\mathbb{M}$ . Esto permite aplicar herramientas poderosas del Análisis Complejo y la Geometría Algebraica en superficies de Riemann compactas a esta familia de superficies mínimas; en cierto modo, y ante la imposibilidad de que una superficie mínima completa en  $\mathbb{R}^3$  sea compacta, aquellas con curvatura total finita son las que más próximas están a las compactas. El comportamiento asintótico de estas superficies también es bien conocido: cada final es asintótico a un plano o a la mitad de una catenoide. Sobre resultados de unicidad, destacaremos los siguientes:

1. Schoen [52] probó que si  $M \in \mathcal{M}_C(g, 2)$  tiene curvatura total finita, entonces  $M$  es una catenoide. Esta es una aplicación de famoso método de reflexión en planos móviles de Alexandrov, que se basa en el principio del máximo para la ecuación (1).
2. López y Ros [32] caracterizaron la catenoide como la única superficie en  $\mathcal{M}_C(0, k)$  con curvatura total finita además del plano. De nuevo la idea se basa en el principio del máximo, pero aplicado a una deformación de una superficie mínima por superficies mínimas, conocida por ello como la *deformación de López-Ros*, y que sólo existe bajo ciertas hipótesis sobre el flujo<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> $M$  es conformemente parabólica cuando no admite ninguna función  $f \in C^\infty(M)$  no constante, no positiva y subarmónica.

<sup>4</sup>El flujo de una superficie mínima  $M \subset \mathbb{R}^3$  puede verse como la aplicación lineal  $F: H_1(M) \rightarrow \mathbb{R}^3$

3. Costa [14] clasificó las superficies en  $\mathcal{M}_C(1, 3)$  con curvatura total finita, que se reducen al toro de Costa y a una familia 1-paramétrica de toros mínimos obtenida deformando el de Costa, descubierta por Hoffman y Meeks y estudiada posteriormente por Hoffman y Karcher [22].

El resultado anterior de Costa constituyó la primera descripción completa de un *espacio de moduli*  $\mathcal{M}_C(g, k)$  que no se reduce a una única superficie:  $\mathcal{M}_C(1, 3)$  consiste en una familia 1-paramétrica de ejemplos, es decir,  $\mathcal{M}_C(1, 3)$  tiene la estructura de una variedad 1-dimensional no compacta (es identificable con un intervalo abierto). Generalizando este resultado, Pérez y Ros [48] dotaron de estructura diferenciable de variedad de dimensión  $k - 2$  a los espacios de moduli  $\mathcal{M}_C(g, k)$  con curvatura total finita y  $3 \leq k < \infty$ , alrededor de cada superficie mínima con una hipótesis adicional de no degeneración. Hasta ahora, todos los ejemplos conocidos de superficies en  $\mathcal{M}_C(g, k)$  cumplen esta hipótesis de no degeneración. Destacamos que la dimensión del espacio de moduli  $\mathcal{M}_C^*(g, k) \subset \mathcal{M}_C(g, k)$  de superficies no degeneradas no depende del género, sino sólo del número de finales.

Como problema abierto de primer orden en este campo, debemos citar la *Conjetura de Hoffman-Meeks*: Si  $M \in \mathcal{M}_C(g, k)$ , entonces  $k \leq g + 2$ . En este línea, el mejor resultado conocido hasta la fecha se debe a Meeks, Pérez y Ros [39], que han probado la existencia de una cota superior (no explícita) para  $k$  en función sólo de  $g$ , de nuevo aplicando la teoría de Colding-Minicozzi.

Otro problema abierto importante consiste en decidir si existen superficies en algún espacio de moduli  $\mathcal{M}_C(g, k)$  que no cumplan la hipótesis de no degeneración mencionada anteriormente, y si eso es posible, dotar de alguna estructura “razonable” al espacio  $\mathcal{M}_C(g, k)$  alrededor de esa superficie singular (por ejemplo, como *orbifold*).

### 3.2. Superficies mínimas completas con topología infinita

A partir de ahora nos adentraremos en el mundo de las superficies mínimas clásicas que tienen topología infinita, es decir, o bien infinitos finales o género infinito. Los ejemplos paradigmáticos en esta familia fueron descubiertos por Riemann en el siglo XIX (y publicados póstumamente por su discípulo Hattendorf [50, 51]), y consisten en una familia 1-paramétrica de superficies mínimas propias, invariantes por una traslación, con género cero e infinitos finales asintóticos a planos paralelos igualmente espaciados. Los ejemplos de Riemann admiten la fascinante caracterización junto con el plano, el helicoides y la catenoides por ser las únicas superficies mínimas foliadas por circunferencias y rectas en planos paralelos (de hecho, ésta fue la propiedad que usó Riemann para encontrar estos ejemplos), véase la Figura 2 izquierda.

En los ejemplos de Riemann se muestra cómo la periodicidad de una superficie (es decir, su invarianza por un grupo infinito discreto de simetrías de  $\mathbb{R}^3$  que actúa propia y discontinuamente) es un método directo para producir ejemplos de topología infinita: si la superficie cociente por ese grupo no es simplemente conexa (en el caso de los ejemplos de Riemann, este cociente es un toro menos una cantidad par de puntos),

---

que asocia a cada clase de homología 1-dimensional  $[c] \in H_1(M)$  la integral sobre un representante  $c \in [c]$  del campo de vectores unitarios a lo largo de  $c$  que es tangente a  $M$  y ortogonal a  $c$ . La condición para que la deformación de López-Ros está bien definida sobre  $M$  es que el rango de  $F$  sea a lo más 1.

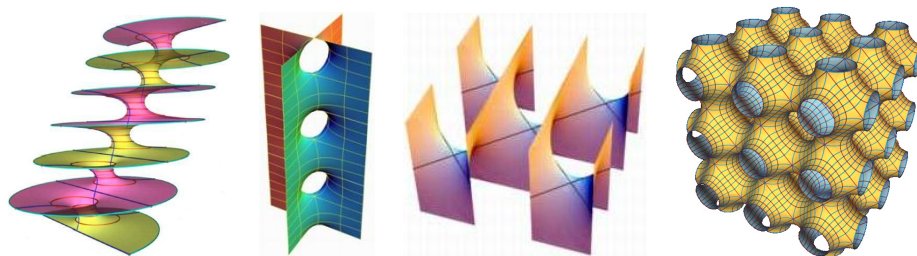


Figura 2: De izquierda a derecha: Un ejemplo de Riemann, superficies de Scherk simplemente y doblemente periódicas, y la superficie triplemente periódica de Schwarz.

entonces su levantamiento a  $\mathbb{R}^3$  tendrá topología infinita. Esto mismo ocurre con otros ejemplos de superficies mínimas descubiertas en el siglo XIX, como los mostrados en la Figura 2:

1. La superficie de Scherk simplemente periódica (segunda por la izquierda en la Figura 2), que es invariante por un grupo cíclico de traslaciones verticales. En este caso, la superficie cociente por dicho grupo cíclico tiene género cero y cuatro finales (asintóticos a semiplanos; estos finales reciben el nombre de *finales de tipo Scherk*); vista en  $\mathbb{R}^3$ , esta superficie tiene género infinito y un final. Podemos ver esta superficie como desingularización de dos planos verticales. Como en el caso de los ejemplos de Riemann, esta superficie mínima también es parte de una familia 1-paramétrica de superficies mínimas propias y simplemente periódicas, obtenida desingularizando dos planos verticales que se cortan con un ángulo  $\theta \in (0, \pi)$ .
2. La superficie de Scherk doblemente periódica (tercera por la izquierda en la Figura 2), que es invariante por un grupo infinito generado por dos traslaciones de vectores linealmente independientes. De nuevo la superficie cociente tiene género cero y cuatro finales (de tipo Scherk); vista en  $\mathbb{R}^3$ , esta superficie tiene género infinito y un solo final. Puede verse como la desingularización de dos familias infinitas de semiplanos verticales equidistantes, una en  $\{(x, y, z) \mid z > 0\}$  y la otra en  $\{(x, y, z) \mid z < 0\}$ , de forma que los semiplanos de una familia cortan ortogonalmente a los de la otra familia en puntos de los bordes de los semiplanos. También esta superficie vive dentro de una familia 1-paramétrica de superficies mínimas propias y doblemente periódicas, donde el parámetro es el ángulo  $\theta \in (0, \pi)$  en que se cortan los semiplanos verticales de ambas familias. Hay una relación directa entre la superficies de Scherk simplemente y doblemente periódicas, reflejo del hecho de que cada función armónica admite localmente una conjugada armónica definida salvo constantes aditivas.
3. La superficie de Schwarz triplemente periódica, que es invariante por el grupo generado por tres traslaciones de vectores linealmente independientes. La superficie cociente por ese retículo de traslaciones vive en un toro cúbico tridimensional, es compacta y tiene género 3. Vista en  $\mathbb{R}^3$ , esta superficie mínima tiene género infinito y un sólo final. Esta superficie es una de las más conocidas entre las llamadas *triplamente periódicas*, (es decir, invariantes por un retículo  $\Gamma$  de traslaciones de



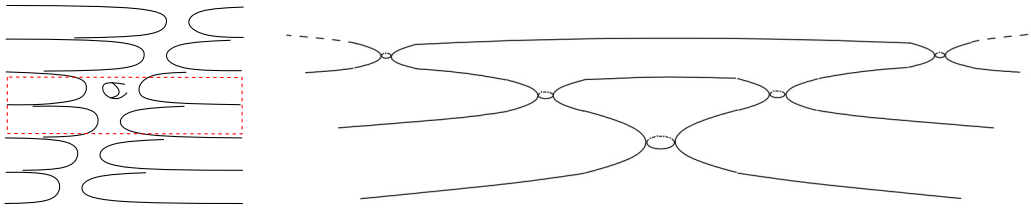


Figura 3: De izquierda a derecha: Representaciones esquemáticas de una superficie de Hauswirth-Pacard con género 1 y de la superficie de Traizet de género infinito.

rango 3), familia con múltiples aplicaciones a la Cristalografía y la Ciencia de Materiales: cada superficie mínima triplemente periódica  $M \subset \mathbb{R}^3$  tiene por grupo de isometrías un grupo cristalográfico y su correspondiente cociente  $M/\Gamma$  divide al toro tridimensional  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  en dos regiones de igual volumen, llamadas *laberintos*. La clasificación de las superficies mínimas triplemente periódicas con cociente de género 3 (el menor valor posible no trivial) es otro problema central abierto.

A la vista de los ejemplos anteriores, podríamos preguntarnos si el único método para producir superficies mínimas con topología infinita es mediante periodicidad. La respuesta es no, como mostraron en 2007 Hauswirth y Pacard [19], quienes usando técnicas de *pegado*<sup>5</sup>, fueron capaces de “fusionar” una superficie de Hoffman-Meeks (hablamos de éstas al describir ejemplos en  $\mathcal{M}_C(g, 3)$  en la Sección 3.1) con dos “mitades” de un mismo ejemplo de Riemann obtenidas intersecándolo con semiespacios de  $\mathbb{R}^3$  cuyos planos borde son paralelos a los finales planos del ejemplo de Riemann, después de perturbar convenientemente cada una de las tres piezas que se fusionan. En la Figura 3 izquierda podemos ver una representación esquemática de uno de los ejemplos de Hauswirth y Pacard, cuando la superficie central a fusionar es el toro de Costa (es decir,  $g = 1$ ). También mediante la técnica de pegado, pero usando superficies de Riemann con nodos, Traizet [53] consiguió en 2012 mostrar la existencia de una superficie mínima completa, no periódica, con género infinito e infinitos finales asintóticos a semi-catenoides (Figura 3 derecha). En resumen, la variedad y disparidad de ejemplos en el caso de topología infinita es patente.

En cuanto a resultados de unicidad para superficies mínimas de topología infinita, está claro a la luz del párrafo anterior que debemos tratar el problema distinguiendo de alguna forma las familias que hemos encontrado: por ejemplo, imponiendo cierto tipo de periodicidad. En esta línea, conviene citar los siguientes resultados de clasificación de espacios de moduli de superficies mínimas periódicas:

1. Los ejemplos de Riemann son los únicos toros mínimos propiamente embebidos con una cantidad finita de finales planos en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por una traslación (Meeks, Pérez y Ros [40] 1998).

<sup>5</sup>Esta técnica consiste en una aplicación sofisticada del Teorema de la Función Implícita al operador curvatura curvatura media definido entre ciertos espacios de Banach. Conviene comentar que para aplicar el Teorema de la Función Implícita, la condición necesaria de no degeneración sobre la diferencial del operador curvatura media viene dada por la no degeneración de superficies mínimas de la que hablábamos en la Sección 3.1.

2. Las superficies de Scherk doblemente periódicas son las únicas superficies mínimas propiamente embebidas con género cero y una cantidad finita de finales en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por dos traslaciones linealmente independientes (Lazard-Holly y Meeks [31] 2001).
3. La clasificación de las superficies mínimas propiamente embebidas y doblemente periódicas con cociente de género 1 y una cantidad finita de finales paralelos de tipo Scherk (Pérez, Rodríguez y Traizet [47] 2005). Este espacio de moduli es una variedad no compacta de dimensión 3, cuyas superficies se llaman ejemplos KMR, en los que no entraremos aquí.
4. La clasificación de las superficies mínimas propiamente embebidas y simplemente periódicas con cociente de género cero y una cantidad finita de finales de tipo Scherk (Pérez y Traizet [49] 2007). En este caso, el número de finales ha de ser par, y el espacio de moduli es una variedad no compacta de dimensión  $2k - 3$  (siendo  $2k$  el número de finales), cuyas superficies fueron descubiertas por Karcher [29] en 1988 como una generalización de las superficies de Scherk simplemente periódicas.

En los resultados de unicidad anteriores, la periodicidad se usa de forma fuerte ya que permite trabajar en el cociente de  $\mathbb{R}^3$  por el correspondiente grupo de isometrías, y la superficie cociente siempre tiene curvatura total finita en en sentido de la ecuación (3); en esta situación, se tiene un control sobre la geometría asintótica y representación conforme de la superficie que permite abordar el problema. Esta estrategia falla si buscamos resultados de clasificación de superficies mínimas con topología infinita sin imponer periodicidad, pero en este caso la teoría de Colding-Minicozzi sale en nuestra ayuda, como explicaremos a continuación.

## 4. La teoría de Colding-Minicozzi

Consideremos la siguiente cuestión:

**Problema 4.1** *¿Cuáles son las superficies mínimas propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  con género cero?*

Supongamos que  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie en las condiciones del problema anterior. Si repasamos lo explicado anteriormente, el caso de que  $M$  tenga un solo final sabemos que  $M$  es un plano o un helicoides por el Teorema de Meeks y Rosenberg [43]. Si  $M$  tiene  $k$  finales con  $2 \leq k < \infty$ , entonces  $k = 2$  y  $M$  es una catenoide por los teoremas de Collin [12] y López-Ros [32]. Nos queda estudiar el caso en que  $M$  tiene infinitos finales. Si supiéramos que  $M$  es invariante por una traslación  $T$ , entonces no es difícil comprobar que la superficie cociente por el grupo cíclico  $\langle T \rangle$  sería un toro con una cantidad finita de finales planos, luego  $M$  sería un ejemplo de Riemann por el Teorema de Meeks, Pérez y Ros [40]. Luego una forma de resolver el Problema 4.1 consiste en probar que si  $M$  tiene infinitos finales, entonces ha de ser periódica.

A menudo nos encontramos con una sucesión de superficies mínimas embebidas de la que queremos extraer un límite. Por ejemplo, pensemos en una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  que es invariante por una traslación de vector  $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ . La sucesión constante  $\{M_n := M - nv = M\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene como límite evidente a la propia  $M$ . Este ejemplo

trivial nos da una posible vía para resolver el Problema 4.1: supongamos que una superficie mínima  $M \subset \mathbb{R}^3$  con infinitos finales es solución a dicho problema. De que  $M$  tenga infinitos finales se puede deducir que  $M$  tiene curvatura total infinita, luego es posible elegir una sucesión de puntos  $p_n \in M$  donde el normal unitario a  $M$  toma siempre el mismo valor. Es razonable intentar concluir que  $\{M_n := M - p_n\}_n$  tiene al menos una parcial convergente, como paso previo a demostrar la deseada periodicidad de  $M$ . Hemos transformado el Problema 4.1 en otro, quizás más ambicioso:

**Problema 4.2** *¿Bajo qué condiciones podemos extraer una parcial convergente de una sucesión de superficies mínimas embebidas?*

Supongamos que  $\{M_n\}_n$  es una sucesión de superficies mínimas embebidas en un abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ , a las que permitiremos tener frontera compacta  $\partial M_n$ . También supondremos que  $\{M_n\}_n$  tiene al menos un punto de acumulación, puesto que queremos analizar la estructura de los posibles límites de dicha sucesión. Cada superficie  $M_n$  se escribe localmente como grafo sobre un abierto del plano tangente en un punto dado (no hace falta minimalidad para esto), y el tamaño de dicho grafo se puede controlar si tenemos cotas locales uniformes sobre la curvatura de Gauss de las superficies. Con ello hemos transformado el Problema 4.2 de convergencia de superficies en otro de convergencia de grafos. Si además tenemos cotas locales uniformes sobre el área de las  $M_n$ , entonces controlaremos el número de grafos que entran en una región dada de  $A$ , luego de nuevo trabajando localmente deduciremos que cada superficie  $M_n$  da lugar a un sólo grafo  $u_n$ . En estas condiciones, la cota local uniforme sobre la curvatura de las  $M_n$  produce equicontinuidad de las funciones grafo  $u_n$ , y el que trabajemos localmente produce equiacotación de las  $u_n$ . Por tanto, el teorema de Arzelá-Ascoli nos permite tomar límites en una parcial de las  $u_n$ , y no es difícil deducir que la función límite  $u_\infty$  verifica la misma EDP (1) que las  $u_n$ . Un argumento de prolongación única permite ahora concluir que una parcial de  $\{M_n\}_n$  converge a una superficie mínima embebida en  $A$ , luego nuestro Problema 4.2 está resuelto en este caso.

Si no disponemos de cotas locales uniformes del área de las  $M_n$  pero sí de cotas uniformes locales de la curvatura, un razonamiento parecido al anterior permite concluir la convergencia de una parcial de  $\{M_n\}_n$  a un objeto algo más general que una superficie mínima: una *laminación* cuyas hojas son mínimas. Sin entrar en detalles, una laminación  $\mathcal{L}$  de  $A$  es una unión cerrada en la topología inducida en  $A$  de superficies embebidas en  $A$  llamadas *hojas* de  $\mathcal{L}$ , con una cierta estructura local producto (podemos tomar cartas locales en  $A$  que transforman las hojas en el producto de un disco bidimensional por un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}$ ). Por ejemplo, si  $Z$  es un subconjunto cerrado no vacío de  $\mathbb{R}$ , la colección de planos horizontales  $\mathcal{L}_Z = \{P_z = \mathbb{R}^2 \times \{z\} \mid z \in Z\}$  es una laminación mínima de  $A = \mathbb{R}^3$  cuyas hojas son los planos  $P_z$  (en el caso  $Z = \mathbb{R}$  la laminación se dice una *foliación* porque la unión de las hojas es  $A$ ). La teoría de laminaciones mínimas es, por tanto, una extensión natural de la de las superficies mínimas. Sin embargo, aún no se conoce ningún ejemplo de una laminación mínima no trivial de  $A = \mathbb{R}^3$  que no sea una sólo superficie o de la forma  $\mathcal{L}_Z$  anterior.

Pero volviendo al Problema 4.2, ¿qué podemos decir del límite en el caso de que las  $M_n$  no tengan cotas locales uniformes de la curvatura? aquí es donde la teoría de Colding-Minicozzi acude en nuestra ayuda. Siguiendo con la notación anterior, la falta

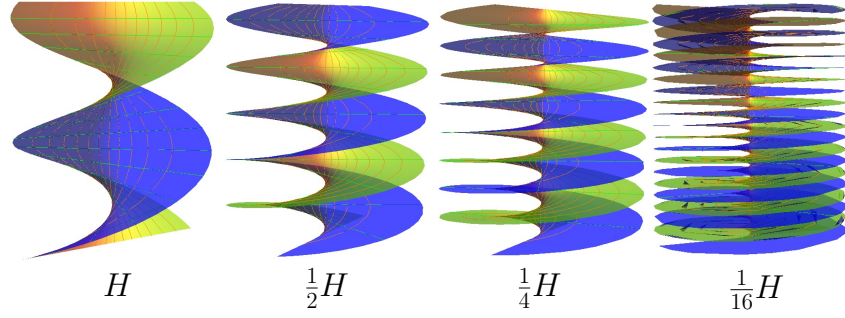


Figura 4: Imágenes homotéticas del mismo helicoide vertical  $H$  de razón  $\lambda_n = 1/2^n$ .

de cotas locales uniformes de la curvatura implica que la curvatura de  $M_n$  se dispara en algún punto de  $A$ , es decir, el el conjunto siguiente es no vacío:

$$\widehat{S} = \left\{ x \in A \mid \sup |K_{M_n \cap \overline{\mathbb{B}}(x,r)}| \rightarrow \infty, \forall r > 0 \right\},$$

donde  $K_\Sigma$  denota la curvatura de Gauss de una superficie  $\Sigma$  y  $\overline{\mathbb{B}}(x,r)$  es la bola cerrada de centro  $x \in \mathbb{R}^3$  y radio  $r > 0$ . La teoría de Colding-Minicozzi nos describe el límite de (una parcial de) las  $M_n$  en la situación anterior, bajo una hipótesis adicional: cada  $M_n$  ha de ser topológicamente un disco contenido en una bola de radio  $R_n > 0$  centrada en el origen, con borde  $\partial M_n$  en la esfera borde de esa bola. La descripción de este límite es muy distinta dependiendo de que la sucesión de radios  $R_n$  diverja o esté acotada.

**Teorema 4.3 (Colding-Minicozzi)** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $M_n$  un disco mínimo embebido en una bola cerrada  $\overline{\mathbb{B}}(R_n) = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R_n)$ , con  $\partial M_n \subset \partial \overline{\mathbb{B}}(R_n)$ . Si  $R_n \rightarrow \infty$  y  $\widehat{S} \cap \mathbb{B}(1) \neq \emptyset$ , entonces una parcial de las  $M_n$  converge a una foliación de  $\mathbb{R}^3$  por planos paralelos, fuera de una línea recta (llamada conjunto singular de convergencia), a lo largo de la cual la curvatura de  $M_n$  se dispara cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

Para comprender mejor el Teorema 4.3 pongamos el siguiente ejemplo. Consideremos el helicoide vertical estándar  $H = \{(x, y, z) \mid x \operatorname{senc} z = y \operatorname{cos} z\}$ . Tomemos una sucesión de números positivos  $\lambda_n$  tendiendo a cero, y consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$  la homotecia  $M_n = \lambda_n H$  de  $H$  de razón  $\lambda_n$ , que vuelve a ser una superficie mínima simplemente conexa. Conforme  $n$  aumenta,  $M_n$  nos muestra el mismo helicoide  $H$  pero cada vez “desde más lejos” (es decir, en una bola centrada en el origen de tamaño dado entran cada vez más vueltas del helicoide), véase la Figura 4. Cuanto más lejos veamos este helicoide, más se aproxima éste a una colección de más y más planos horizontales separados por una distancia cada vez menor, hasta que en el límite aparece una foliación de  $\mathbb{R}^3$  por planos horizontales. Cada hoja de esta foliación límite es llana (su curvatura de Gauss es idénticamente cero), y la curvatura de las  $M_n$  converge a cero sobre compactos de  $\mathbb{R}^3 - (\text{eje } z)$ . Sin embargo, como la curvatura de Gauss de  $H$  a lo largo del eje  $z$  es constante  $-1$ , la curvatura de  $M_n$  a lo largo del mismo eje es  $-1/\lambda_n^2$ , que tiende a infinito. Es decir, en este caso  $\widehat{S}$  es el eje  $z$ . Notemos que la foliación límite es perfectamente regular a lo largo de  $\widehat{S}$ , es sólo la convergencia de las  $M_n$  a

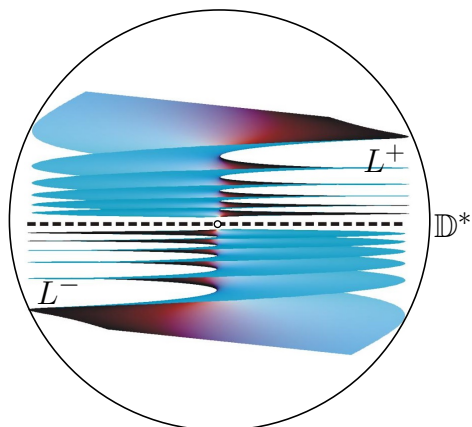


Figura 5: Una laminación mínima de la bola punteada unidad con tres hojas y una singularidad en el origen.

ese límite la que falla a lo largo de  $\widehat{S}$ . Este objeto límite es lo que se conoce como una *estructura de garaje de estacionamiento* (*limiting parking garage structure*) con una columna: pensemos que la zona más horizontal de la estructura corresponde a las plantas donde los coches aparcen, y éstos sólo pueden subir o bajar de planta por una única rampa, que es el eje donde la curvatura se dispara. Pues bien, el Teorema 4.3 nos dice que en el caso general con radios  $R_n \rightarrow \infty$ , el comportamiento del límite de las  $M_n$  es esencialmente el mismo que el de este ejemplo.

La descripción del límite de nuestra sucesión de discos embebidos  $M_n \subset \overline{\mathbb{B}}(R_n)$  con  $\partial M_n \subset \partial \mathbb{B}(R_n)$  cuando los radios  $R_n$  se mantienen acotados también se puede visualizar con un ejemplo. En 2003, Colding y Minicozzi [4] produjeron una sucesión de discos mínimos embebidos  $M_n$  en la bola  $\mathbb{B}(1)$  de aspecto helicoidal, de forma que el número de vueltas que da la curva borde  $\partial M_n \subset \partial \mathbb{B}(1) = \mathbb{S}^2(1)$  alrededor del eje  $z$  tiende a infinito, y el límite de los discos  $M_n$  es una laminación mínima  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{B}(1) - \{\vec{0}\}$  que consiste en tres hojas: una de ellas es el disco unidad punteado  $\mathbb{D}^* = \{(x, y, 0) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ , y las otras dos son superficies mínimas  $L^+, L^-$  no propias, que rotan infinitas veces por encima y por debajo de  $\mathbb{D}^*$  acumulándose sobre éste (véase la Figura 5). Ahora la curvatura de las  $M_n$  se dispara en el origen, pero este punto es una singularidad genuina de la laminación límite  $\mathcal{L}$ , que no admite ninguna extensión como laminación a través del origen.

La descripción teórica por Colding y Minicozzi para el límite de una sucesión de discos mínimos embebidos  $M_n \subset \overline{\mathbb{B}}(R_n)$  con  $\partial M_n \subset \partial \mathbb{B}(R_n)$  y sucesión de radios  $\{R_n\}_n$  acotada es muy técnica y la omitiremos aquí. Nos contentaremos con decir que tras pasar a una parcial, el límite de los discos  $M_n$  es una *laminación mínima con singularidades* (por singularidad entendemos un punto en el que no podemos extender la estructura local producto de la laminación: no se trata sólo de que la curvatura de los  $M_n$  se dispare en un entorno del punto como ocurría en el conjunto singular de convergencia descrito en el Teorema 4.3). Además, las singularidades de la laminación, que forman un conjunto cerrado, pueden ser de dos tipos:

- (a) Singularidades aisladas, en cuyo caso la Figura 5 muestra esencialmente el comportamiento del objeto límite tras aplicar un giro en el espacio: hay una hoja  $D^*$  de la laminación que pasa por la singularidad (de hecho, extiende a través de ésta a un disco embebido mínimo  $D$ , pero la estructura de la laminación límite no extiende), y una o dos hojas no propias, que rotan infinitas veces por encima y/o por debajo de  $D^*$  acumulándose sobre ésta.
- (b) Singularidades no aisladas, a las que converge al menos una sucesión de singularidades aisladas con el comportamiento de (a).

Debemos también hacer notar que en este caso, el conjunto  $\widehat{S}$  donde la curvatura de los discos  $M_n$  se dispara no sólo está formado por las singularidades de la laminación límite, sino que también puede dispararse la curvatura de los  $M_n$  a lo largo de curvas de clase  $C^{1,1}$  alrededor de las cuales la laminación límite es una foliación local (en particular, sin singularidades), de forma similar a lo que ocurría en el Teorema 4.3 con el conjunto singular de convergencia (una recta en aquel caso).

La descripción anterior nos lleva directamente al estudio de las singularidades de una laminación mínima en un abierto de  $\mathbb{R}^3$ . ¿Tiene este conjunto alguna estructura? Esta cuestión es otro problema central abierto en la teoría clásica de superficies mínimas. Sobre él citaremos dos resultados recientes de Meeks, Pérez y Ros [42], que también usan la teoría de Colding-Minicozzi:

**Teorema 4.4 (Teorema de la singularidad evitable)** *Sea  $\mathcal{L} \subset \mathbb{B}(1) - \{\vec{0}\}$  una laminación mínima. Entonces,  $\mathcal{L}$  se extiende a una laminación mínima de  $\mathbb{B}(1)$  (es decir, la singularidad en  $\vec{0}$  es evitable) si y sólo si la función curvatura de Gauss de la laminación<sup>6</sup> no explota en el origen más rápido que el cuadrado de la distancia extrínseca a  $\vec{0}$ , es decir  $|K|(x) \cdot \|x\|^2$  es acotada en  $\mathcal{L}$ .*

Del Teorema 4.4 se deduce que si la función  $|K|(x) \cdot \|x\|^2$  es acotada en  $\mathcal{L} \subset \mathbb{B}(1) - \{\vec{0}\}$ , entonces  $|K|(x) \cdot \|x\|^2$  extiende a través del origen con valor cero. Otra consecuencia de este teorema es que en el ejemplo de la Figura 5, la curvatura de los discos  $M_n$  se dispara más rápido que el cuadrado de la distancia al origen cuando  $n \rightarrow \infty$ . El segundo resultado de [42] es la clasificación de las laminaciones mínimas de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  con decrecimiento de curvatura cuadrático.

**Teorema 4.5** *Sea  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$  una laminación mínima tal que  $|K|(x) \cdot \|x\|^2$  es acotada. Entonces,  $\mathcal{L}$  se extiende a través del origen a una laminación mínima de  $\mathbb{R}^3$  que consiste en una sólo hoja  $M$ , y ésta superficie mínima es propia y con curvatura total finita. En particular,  $|K|$  decrece mucho más rápidamente que cuadráticamente con la distancia al origen:  $|K|(x) \cdot \|x\|^4$  es acotada en  $M$ .*

## 5. La clasificación de las superficies mínimas propias en $\mathbb{R}^3$ con género cero

Para terminar nuestro breve paseo por la teoría actual de las superficies mínimas clásicas, volveremos al Problema 4.1 que planteábamos arriba. En el primer párrafo

---

<sup>6</sup>Esta función es la que hace corresponder a cada punto de la laminación la curvatura de Gauss de la única hoja que pasa por ese punto.

de la Sección 4 explicamos que el problema se reduce a probar que si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie mínima con género cero e infinitos finales, entonces  $M$  es periódica. Esta estrategia, que usa la teoría de Colding-Minicozzi como hemos explicado arriba, fue la que siguieron Meeks, Pérez y Ros [41] para probar siguiente resultado:

**Teorema 5.1** *Toda superficie mínima propiamente embebida  $M \subset \mathbb{R}^3$  con género cero es un plano, un helicoides, una catenoide o uno de los ejemplos de Riemann. En particular, existe una foliación de  $\mathbb{R}^3$  por planos paralelos que intersecan a  $M$  en circunferencias o rectas.*

Conviene comentar que para en la prueba del Teorema 5.1, la teoría de Colding-Minicozzi sólo permite probar la *cuasiperiodicidad* de  $M$  (esto es, que si  $\{p_n\}_n$  es una sucesión divergente de puntos de  $M$ , entonces una parcial de la sucesión  $\{M - p_n\}_n$  converge a una superficie mínima  $M_\infty \subset \mathbb{R}^3$  con género cero e infinitos finales. El salto para pasar de cuasiperiodicidad a periodicidad es una fascinante aplicación de los Sistemas Integrables y de la ecuación de Korteweg-de Vries, una EDP dispersiva de tercer orden que modela matemáticamente el comportamiento de las aguas poco profundas.

Joaquín Pérez      jperez@ugr.es

Departamento de Geometría y Topología e Instituto de Matemáticas de la  
Universidad de Granada (IEMath-GR)

## Referencias

- [1] Anderson, D., C. Henke, D. Hoffman y E. L. Thomas: *Periodic area-minimizing surfaces in block copolymers*. Nature, 334(6184):598–601, 1988. August 18 issue.
- [2] Bernstein, J. y C. Breiner: *Conformal structure of minimal surfaces with finite topology*. Comm. Math. Helv., 86(2):353–381, 2011. MR2775132, Zbl 1213.53011.
- [3] Boys, C. V.: *Soap bubbles: Their colours and the forces which mold them*. Dover Publications, New York, 1959.
- [4] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *Embedded minimal disks: proper versus nonproper - global versus local*. Transactions of the AMS, 356(1):283–289, 2003. MR2020033, Zbl 1046.53001.
- [5] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *An excursion into geometric analysis*. En *Surveys of Differential Geometry IX - Eigenvalues of Laplacian and other geometric operators*, páginas 83–146. International Press, edited by Alexander Grigor'yan and Shing Tung Yau, 2004. MR2195407, Zbl 1076.53001.
- [6] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold I; Estimates off the axis for disks*. Ann. of Math., 160:27–68, 2004. MR2119717, Zbl 1070.53031.
- [7] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold II; Multi-valued graphs in disks*. Ann. of Math., 160:69–92, 2004. MR2119718, Zbl 1070.53032.

- [8] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold III; Planar domains*. Ann. of Math., 160:523–572, 2004. MR2123932, Zbl 1076.53068.
- [9] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold IV; Locally simply-connected*. Ann. of Math., 160:573–615, 2004. MR2123933, Zbl 1076.53069.
- [10] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *Shapes of embedded minimal surfaces*. Proc. National Academy of Sciences, 103:11106–11111, 2006. MR2242650, Zbl pre05272457.
- [11] Colding, T. H. y W. P. Minicozzi II: *The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces*. Ann. of Math., 167:211–243, 2008. MR2373154, Zbl 1142.53012.
- [12] Collin, P.: *Topologie et courbure des surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$* . Ann. of Math. (2), 145–1:1–31, 1997. MR1432035, Zbl 886.53008.
- [13] Costa, C.: *Imersões mínimas em  $\mathbb{R}^3$  de gênero un e curvatura total finita*. Tesis de Doctorado, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1982.
- [14] Costa, C.: *Example of a Complete Minimal Immersion in  $\mathbb{R}^3$  of Genus One and Three Embedded Ends*. Bull. Soc. Bras. Mat., 15:47–54, 1984. MR0794728, Zbl 0613.53002.
- [15] Courant, R.: *Soap film experiments with minimal surfaces*. Amer. Math. Monthly, 47:167–174, 1940. MR0001622, Zbl 0024.41704.
- [16] Dierkes, U., S. Hildebrandt, A. Küster y O. Wohlrab: *Minimal Surfaces I*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 295. Springer-Verlag, 1992. MR1215267, Zbl 0777.53012.
- [17] Dierkes, U., S. Hildebrandt, A. Küster y O. Wohlrab: *Minimal Surfaces II*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 296. Springer-Verlag, 1992. MR1215268, Zbl 0777.53013.
- [18] Euler, L.: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1969. *Opera omnia(1)*, **24**, Fussli, Turici, 1952. A source book in mathematics, partially translated by D. J. Struik, see pages 399–406.
- [19] Hauswirth, L. y F. Pacard: *Higher genus Riemann minimal surfaces*. Inventiones Mathematicae, 169(3):569–620, 2007. MR2336041, Zbl 1129.53009.
- [20] Hildebrandt, S.: *The calculus of variations today*. Mathematical Intelligencer, 11(4):50–60, 1989. MR1016107, Zbl 0689.49003.
- [21] Hoffman, D.: *The Computer-Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces*. Mathematical Intelligencer, 9(3):8–21, 1987. MR0895770, Zbl 0616.53007.



- [22] Hoffman, D. y H. Karcher: *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. En Osserman, R. (editor): *Encyclopedia of Mathematics, Vol. 90, Geometry V*, páginas 5–93. Springer-Verlag, 1997. MR1490038, Zbl 0890.53001.
- [23] Hoffman, D., H. Karcher y F. Wei: *The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery*. En *Global Analysis and Modern Mathematics*. Publish or Perish Press, 1993. K. Uhlenbeck, editor, p. 119–170. MR1278754, Zbl 990.54130.
- [24] Hoffman, D. y W. H. Meeks III: *Embedded minimal surfaces of finite topology*. *Ann. of Math.*, 131:1–34, 1990. MR1038356, Zbl 0695.53004.
- [25] Hoffman, D. y W. H. Meeks III: *Minimal Surfaces Based on the Catenoid*. *Amer. Math. Monthly, Special Geometry Issue*, 97(8):702–730, 1990. MR1072813, Zbl 0737.53006.
- [26] Hoffman, D., M. Traizet y B. White: *Helicoidal minimal surfaces of prescribed genus I*. Preprint at <http://arXiv.org/abs/1304.5861>.
- [27] Hoffman, D., M. Traizet y B. White: *Helicoidal minimal surfaces of prescribed genus II*. Preprint at <http://arXiv.org/abs/1304.6180>.
- [28] Hoffman, D., M. Weber y M. Wolf: *An embedded genus-one helicoid*. *Ann. of Math.*, 169(2):347–448, 2009. MR2480608, Zbl 1213.49049.
- [29] Karcher, H.: *Embedded minimal surfaces derived from Scherk’s examples*. *Manuscripta Math.*, 62:83–114, 1988. MR0958255, Zbl 658.53006.
- [30] Lawson, Jr., H. B.: *Lectures on Minimal Submanifolds*. Publish or Perish Press, Berkeley, 1980. MR0576752, Zbl 0434.53006.
- [31] Lazard-Holly, H. y W. H. Meeks III: *The Classification of embedded doubly-periodic minimal surfaces of genus zero*. *Invent. Math.*, 143:1–27, 2001. MR1802791, Zbl 992.18190.
- [32] López, F. J. y A. Ros: *On Embedded Complete Minimal Surfaces of Genus Zero*. *J. Differential Geom.*, 33(1):293–300, 1991. MR1085145, Zbl 719.53004.
- [33] Meeks III, W. H.: *A Survey of the Geometric Results in the Classical Theory of Minimal Surfaces*. *Bol. Soc. Brasil Mat.*, 12:29–86, 1981. MR0671473, Zbl 0577.53007.
- [34] Meeks III, W. H.: *Global problems in classical minimal surface theory*. En *Global theory of minimal surfaces*, páginas 453–470. American Mathematical Society, Providence, RI, for the Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, edited by D. Hoffman, 2005. MR2167253, Zbl 1078.53002.
- [35] Meeks III, W. H. y J. Pérez: *Conformal properties in classical minimal surface theory*. En *Surveys of Differential Geometry IX - Eigenvalues of Laplacian and other geometric operators*, páginas 275–336. International Press, edited by Alexander Grigor’yan and Shing Tung Yau, 2004. MR2195411, Zbl 1086.53007.

- [36] Meeks III, W. H. y J. Pérez: *The classical theory of minimal surfaces*. Bulletin of the AMS, 48:325–407, 2011. MR2801776, Zbl 1232.53003.
- [37] Meeks III, W. H. y J. Pérez: *A survey on classical minimal surface theory*, volumen 60 de *University Lecture Series*. AMS, 2012. ISBN: 978-0-8218-6912-3; MR3012474, Zbl 1262.53002.
- [38] Meeks III, W. H. y J. Pérez: *The Riemann minimal examples*. En hundred, The legacy of Bernhard Riemann after one y fifty years (editores): *Lizhen Ji, Frans Oort and Shing-Tung Yau*, volumen 150 de *Advanced Lectures in Mathematics*, páginas 417–457. Higher Education Press, International Press, 2016. ISBN: 978-7-04-031875-3.
- [39] Meeks III, W. H., J. Pérez y A. Ros: *Bounds on the topology and index of classical minimal surfaces*. Preprint available at <https://arxiv.org/abs/1605.02501>.
- [40] Meeks III, W. H., J. Pérez y A. Ros: *Uniqueness of the Riemann minimal examples*. Invent. Math., 133:107–132, 1998. MR1626477, Zbl 916.53004.
- [41] Meeks III, W. H., J. Pérez y A. Ros: *Properly embedded minimal planar domains*. Ann. of Math., 181(2):473–546, 2015. MR3275845, Zbl 06399442.
- [42] Meeks III, W. H., J. Pérez y A. Ros: *Local removable singularity theorems for minimal laminations*. J. Differential Geometry, 103(2):319–362, 2016. MR3504952, Zbl 06603546.
- [43] Meeks III, W. H. y H. Rosenberg: *The uniqueness of the helicoid*. Ann. of Math., 161:723–754, 2005. MR2153399, Zbl 1102.53005.
- [44] Meusnier, J. B.: *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris, prés. par div. Savans, 10:477–510, 1785. Presented in 1776.
- [45] Nitsche, J. C. C.: *On new results in the theory of minimal surfaces*. Bull. Amer. Math. Soc., 71:195–270, 1965. MR0173993, Zbl 0135.21701.
- [46] Osserman, R.: *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Publications, New York, 2nd edición, 1986. MR0852409, Zbl 0209.52901.
- [47] Pérez, J., M. Rodríguez y M. Traizet: *The classification of doubly periodic minimal tori with parallel ends*. J. Differential Geom., 69(3):523–577, 2005. MR2170278, Zbl pre05004289.
- [48] Pérez, J. y A. Ros: *The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature*. Indiana Univ. Math. J., 45(1):177–204, 1996. MR1406689, Zbl 864.53008.
- [49] Pérez, J. y M. Traizet: *The classification of singly periodic minimal surfaces with genus zero and Scherk type ends*. Transactions of the AMS, 359(3):965–990, 2007. MR2262839, Zbl 1110.53008.

- [50] Riemann, B.: *Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*. Abh. Königl. d. Wiss. Göttingen, Mathem. Cl., 13:3–52, 1867. K. Hattendorf, editor. JFM 01.0218.01.
- [51] Riemann, B.: *Oeuvres Mathématiques de Riemann*. Gauthiers-Villars, Paris, 1898.
- [52] Schoen, R.: *Uniqueness, Symmetry, and Embeddedness of Minimal Surfaces*. J. Differential Geom., 18:791–809, 1983. MR0730928, Zbl 0575.53037.
- [53] Traizet, M.: *A minimal surface with one limit end and unbounded curvature*. Indiana Univ. Math. J., 61(3):1325–1350, 2012. MR3071701, Zbl 1272.53005.