Geometría II
Grado en Matemáticas, Grupo B
Prueba Tema Diagonalización (27/03/2019)

1. (a) *Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con valores propios 0 (simple) y 1 (doble). Expresar A^5 como combinación lineal de A y A^2.*

El polinomio característico de A tiene raíces 0 (simple) y 1 (doble). Como el orden de A es impar, tenemos

$$p_A(t) = -t(t-1)^2 = -t^3 + 2t^2 - t.$$

Por el Teorema de Hamilton-Cayley, $0 = p_A(A) = -A^3 + 2A^2 - A$, luego $A^3 = 2A^2 - A$. Por tanto,

$$A^4 = A \cdot A^3 = A(2A^2 - A) = 2A^3 - A^2 = 3(2A^2 - A) - A^2 = 3A^2 - 2A,$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = A(3A^2 - 2A) = 3A^3 - 2A^2 = 3(2A^2 - A) - 2A^2 = 4A^2 - 3A.$$

(b) *Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ y $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K} - \{0\}$ valores propios distintos de f tales que*

$$\sum_{i=1}^{k} \dim V_{a_i} = \mathrm{rango}(f).$$

Probar que f es diagonalizable.

Supongamos primero que f es sobreyectiva, es decir $\mathrm{rango}(f) = n$. En este caso,

$$\sum_{i=1}^{k} \dim V_{a_i} = \dim V$$

luego $V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_k} = V$ (la suma es directa porque los valores propios $a_1, \ldots, a_k$ de f son distintos). Esto nos dice que f no tiene más valores propios que $a_1, \ldots, a_k$ y que f es diagonalizable.

Supongamos ahora que f no es sobreyectiva. Como f en un endomorfismo, tampoco puede ser inyectiva, es decir, $\ker(f) \neq \{0\}$. Como $\ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0x\} \neq \{0\}$, concluimos que 0 es un valor propio de f (distinto de los $a_1, \ldots, a_k$ porque éstos se suponen no nulos) y que $V_0 = \ker(f)$. Como $0, a_1, \ldots, a_k$ son valores propios distintos de f, tenemos $V_0 + V_{a_1} + \ldots + V_{a_k} = V_0 \oplus V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_k}$ y

$$\dim(V_0 \oplus V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_k}) = \dim V_0 + \sum_{i=1}^{k} \dim V_{a_i} = \dim \ker(f) + \mathrm{rango}(f) \overset{(\star)}{=} n = \dim V,$$

donde en $(\star)$ hemos usado la fórmula de la nulidad y el rango para f. Por tanto, $V_0 \oplus V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_k} = V$, luego los valores propios de f son $0, a_1, \ldots, a_k$ y f es diagonalizable.

2. *Se considera la matriz* $A(a) = \begin{pmatrix} -a & -2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 1 & 1+a-a^2 & 1 \end{pmatrix}$*, donde a es un parámetro real.*

   (a) *Discutir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz $A(a)$ es diagonalizable.*
   Calculamos el polinomio característico de $A = A(a)$:

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -a-t & -2a & 0 \\ 0 & a^2-t & 0 \\ 1 & 1+a-a^2 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} -a-t & -2a \\ 0 & a^2-t \end{vmatrix} = (1-t)(t+a)(t-a^2),$$

   cuyas raíces son $1, -a, a^2$. Veamos cuándo estas raíces pueden confundirse: $a^2 = 1$ equivale a $a \in \{1, -1\}$, y $-a = a^2$ equivale a $a \in \{0, -1\}$. Así que las únicas posibilidades de que $p_A(t)$ tenga raíces múltiples son que $a \in \{-1, 0, 1\}$. Discutimos casos:

   - Si $a \notin \{-1, 0, 1\}$, entonces las tres raíces de $p_A(t)$ son simples y por tanto $A(a)$ es diagonalizable.
   - Si $a = -1$, entonces 1 es raíz triple de $p_A(t)$. En este caso, $A = A(-1)$ no puede ser diagonalizable porque caso de serlo, su forma diagonal sería I_3, es decir, $A(-1)$ sería semejante a I_3. Como la única matriz semejante a I_3 es I_3, llegaríamos a que $A(-1) = I_3$, lo cual es falso.
   - Si $a = 0$, entonces 1 es raíz simple de $p_A(t)$ y 0 es raíz doble, luego $A(0)$ tiene tres valores propios en $\mathbb{R}$ contando multiplicidades. Como

$$1 \leq \text{multiplicidad geométrica}(1) \leq \text{multiplicidad algebraica}(1) = 1,$$

     concluimos que $A(0)$ será diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica de 0 es 2, es decir, si y sólo si el rango de $A(0) - 0I_3 = A(0)$ es 1. Como $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, deducimos que $A(0)$ es diagonalizable.
   - Si $a = 1$, entonces -1 es raíz simple de $p_A(t)$ y 1 es raíz doble. Por tanto, $A(1)$ tiene tres valores propios en $\mathbb{R}$ contando multiplicidades. Como

$$1 \leq \text{multiplicidad geométrica}(-1) \leq \text{multiplicidad algebraica}(-1) = 1,$$

     concluimos que $A(1)$ será diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica de 1 es 2, es decir, si y sólo si el rango de $A(1) - I_3$ es 1. Como $A(1) - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, concluimos que $A(1)$ es diagonalizable.

   (b) *Calcular explícitamente una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A(1)$.*
   Calculamos los subespacios propios de $A(1)$:

$$(\mathbb{R}^3)_{-1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x + 2z = 0\right\} = L(\{(-2,0,1)\}),$$

$$(\mathbb{R}^3)_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\right\} = L(\{(1,-1,0),(0,0,1)\}).$$

Luego $\{(-2,0,1),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.