Geometría II
Grado en Matemáticas, Grupo B

Prueba Tema Espacios Vectoriales Métricos (22/05/2019)

1. (a) *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y f una isometría de (V, g) en sí mismo. Probar que $\|f(u) - v\|^2 = \|f(v) - u\|^2$ para cada $u, v \in V$ si y sólo si f es g-autoadjunto.*

   Dados $u, v \in V$, $\|f(u) - v\|^2 = \|f(u)\|^2 + \|v\|^2 - 2g(f(u), v)$. Como f es una isometría de (V, g) en sí mismo, $\|f(u)\| = \|u\|$ luego $\|f(u) - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2g(f(u), v)$. Cambiando los papeles de u, v, tenemos $\|f(v) - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2g(f(v), u))$. Por tanto, $\|f(u) - v\|^2 = \|f(v) - u\|^2$ si y sólo si $g(f(u), v) = g(f(v), u) = g(u, f(v))$. Que esto se cumpla $\forall u, v \in V$ equivale por definición a que f sea g-autoadjunto.

   (b) *Sean A, B dos matrices reales y simétricas de orden $n \in \mathbb{N}$. Probar que A, B son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura, es decir, tienen la misma cantidad de valores propios positivos, negativos y cero.*

   Primera forma.

   Como A es simétrica, un corolario del teorema de Sylvester visto en clase nos dice que existen $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que sólo dependen de A (con $r + s = \text{rango}(A)$) y existe $P \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ tales que

$$P^t \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) := D.$$

   En particular, A, D son congruentes. Como "ser congruente a" es una relación de equivalencia, tenemos que A es congruente a B si y sólo si D es congruente a B, es decir, los valores $r', s' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ asociados a B dados por el corolario anterior aplicado a B, son los mismos de los dados por D, lo que equivale a que las signaturas de B y de A sean iguales.

   Segunda forma.

   Sean g_A, g_B las métricas sobre $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$M_{B_u}(g_A) = A, \qquad M_{B_u}(g_B) = B, \tag{1}$$
eq:1

   donde B_u es la base usual de $\mathbb{R}^n$ (aquí estamos usando que A, B son simétricas para que definan métricas sobre $\mathbb{R}^n$).

   $\boxed{\Rightarrow}$ Si A, B son congruentes, por definición existe $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $B = P^T A P$. Entonces,

$$M_{B_u}(g_B) = B = P^T A P = P^T M_{B_u}(g_A) P = M_{B'}(g_A), \tag{2}$$
eq:2

   donde B' es la única base de $\mathbb{R}^n$ dada por $M(1_{\mathbb{R}^n}, B'.B_u) = P$. Por otro lado, aplicando el Teorema de Sylvester a g_A deducimos que $M_{B'}(g_A)$ es congruente a una matriz diagonal D con valores propios $1, -1$ y 0. Por eq:2 (2), $M_{B_u}(g_B)$ es congruente a la misma matriz D. Por la unicidad del Teorema de Sylvester, las signaturas de g_A y la de g_B han de ser iguales. Pero estas signaturas son las de A y B, respectivamente.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que A, B tienen la misma signatura. Entonces, las signaturas de (R^n, g_A) y $(\mathbb{R}^n, g_B)$ son iguales, luego existe una isometría $f\colon (R^n, g_A) \to (\mathbb{R}^n, g_B)$. En particular, $f(B_u)$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $M_{B_u}(g_A) = M_{f(B_u)}(g_B)$. Finalmente,

$$A \overset{(1)}{=} M_{B_u}(g_A) = M_{f(B_u)}(g_B) \overset{\text{(congruentes)}}{\sim} M_{B_u}(g_B) \overset{(1)}{=} B,$$

es decir, A, B son congruentes.

2. *Se considera la forma cuadrática sobre* $\mathbb{R}^4$

$$F_a(x, y, z, t) = 2xy + 2xt + 2ayz + 2zt,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ *es un parámetro real.*

(a) *Calcular la signatura de la métrica* $g_a \in S_2(\mathbb{R}^4)$ *asociada a* F_a, $\forall a \in \mathbb{R}$.
La matriz de la métrica $g_a \in S_2(\mathbb{R}^4)$ asociada a F_a respecto de la base usual B_u es

$$A = M_{B_u}(g_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico de A:

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -t & a & 0 \\ 0 & a & -t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} -t & a & 0 \\ a & -t & 1 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -t & a \\ 0 & a & -t \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -t(-t^3 + a^2t + t) - (t^2 + a - 1) - (a + t^2 - a^2) = t^4 - (a^2 + 3)t^2 + (a - 1)^2.$$

Notemos que la ecuación característica es una bicuadrada, luego puede resolverse vía el cambio de variable $s = t^2$ y la ecuación de segundo grado $s^2 - (a^2 + 3)s + (a - 1)^2 = 0$, cuyas soluciones son

$$s_\pm = \frac{1}{2}\left[(a^2 + 3) \pm \sqrt{(a^2 + 3)^2 - 4(a - 1)^2}\right].$$

Notemos que se dan las siguientes propiedades:

- El discriminante $(a^2 + 3)^2 - 4(a - 1)^2$ es no negativo (porque A es simétrica, luego diagonalizable, lo que hace que $p_A(t) = 0$ tenga cuatro soluciones en t contando multiplicidades, luego $s^2 - (a^2 + 3)s + (a - 1)^2 = 0$ ha de tener dos soluciones en s contando multiplicidades).
- s_+ es estrictamente positivo (porque la raíz es ≥ 0 y $a^2 + 3 > 0$), mientras que $s_- \geq 0$ (porque $(a^2 + 3)^2 - 4(a - 1)^2 \leq (a^2 + 3)^2$).

Como las soluciones de $p_A(t) = 0$ son $\pm\sqrt{s_\pm}$, tenemos dos posibilidades:

- Si $s_- = 0$, entonces $t = \pm\sqrt{s_-} = \pm\sqrt{0} = 0$ produce a cero como valor propio doble, y hay exactamente un valor propio positivo de A (que es $\sqrt{s_+}$) y un valor propio negativo de A, que es $-\sqrt{s_+}$. Por tanto, la signatura de g_a es $(0, 0, +, -)$. Este caso se produce exactamente cuando el término independiente de $p_A(t)$ se anula, es decir, cuando $a = 1$.
- Si $s_- > 0$, entonces hay dos valores propios positivos de A contando multiplicidades (que son $\sqrt{s_+}$, $\sqrt{s_-}$) y dos valores propios negativos de A contando multiplicidades (que son $-\sqrt{s_+}$, $-\sqrt{s_-}$). Por tanto, la signatura de g_a es $(+, +, -, -)$. Este caso se produce cuando $a \neq 1$.

(b) *Para $a = 1$, calcular explícitamente una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$ tal que $M_B(g_1)$ sea diagonal ($\langle, \rangle$ es el producto escalar usual).*

Según hemos visto en el apartado anterior, en el caso $a = 1$ tenemos polinomio característico $p_A(t) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4) = t^2(t-2)(t+2)$, luego los valores propios de A son 0 (doble), 2 (simple) y -2 (simple). Calculamos los subespacios propios:

$$(\mathbb{R}^4)_0 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(0,1,0,-1), (1,0,-1,0)\}),$$

$$(\mathbb{R}^4)_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} x - 2y + z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \\ x + z - 2t = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1,1,1,1)\}),$$

$$(\mathbb{R}^4)_{-2} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ x + z + 2t = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1,-1,1,-1)\}).$$

Calculamos las normas de los generadores de cada subespacio respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$:

$$\|(0,1,0,-1)\| = \sqrt{2} = \|(1,0,-1,0)\|, \qquad \|(1,1,1,1)\| = 2 = \|(1,-1,1,-1)\|.$$

Llamemos

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0), \quad x_3 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad x_4 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1).$$

Entonces, $B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$ (por comprobación directa) y

$$M_B(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$