Geometría II
Grado en Matemáticas

Soluciones del examen de la convoctoria ordinaria de junio (5/06/2019)

1. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión 4, g una métrica euclídea sobre V y $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal. Consideramos el endomorfismo f de V dado por*

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_4, \quad f(e_4) = e_1.$$

Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) *¿Es f un endomorfismo autoadjunto?*
La matriz de f respecto a la base B es

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $M(f, B)$ no es simétrica y B es ortonormal, f no puede ser autoadjunto.

b) *¿Es f un endomorfismo diagonalizable?*
El polinomio característico de la matriz anterior es

$$p_f(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1).$$

Como $t^2 + 1$ no tiene raíces reales, f no puede tener 4 valores propios reales contando multiplicidades. Por tanto, f no es diagonalizable.

c) *¿Es f una isometría?*
Como $\det f = p_f(0) = -1 \neq 0$, f es un automorfismo de V. Así que f será una isometría de (V, g) en sí mismo si y sólo si lleva bases ortonormales en bases ortonormales. Como $f(B)$ es una reordenación de la misma B, que es una base ortonormal, concluimos que f es una isometría.

d) *Demuestra que $f \circ f$ es la simetría repecto de cierto subespacio y calcula ese subespacio.*
$f \circ f$ cumple claramente

$$(f \circ f)(e_1) = e_3, \quad (f \circ f)(e_2) = e_4, \quad (f \circ f)(e_3) = e_1, \quad (f \circ f)(e_4) = e_2,$$

luego la matriz de $f \circ f$ respecto a B es

$$M(f \circ f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es simétrica. Como B es base ortonormal, deducimos que $f \circ f$ es un endomorfismo autoadjunto, luego $f \circ f$ es ortogonalmente diagonalizable. Además, $f \circ f$ es una isometría de (V, g) en sí mismo, por ser composición de isometrías. Así que $f \circ f$ es una isometría diagonalizable, luego sus valores propios sólo pueden ser ± 1. En cuanto a las multiplicidades de estos valores propios, 1 no puede ser valor propio cuádruple porque $f \circ f$ no es la identidad. -1 tampoco puede ser valor propio cuádruple, porque $f \circ f \neq -1_V$. Los casos de que -1 sea valor simple (y 1 triple) o bien 1 sea valor propio simple (y -1 triple) también están descartados, porque llevarían a $\det(f \circ f) = -1$ pero $\det(f \circ f) = (\det f)^2 = 1$. Así que 1 y -1 son valores propios dobles, y por tanto $f \circ f$ es la simetría respecto del subespacio propio V_1 asociado al valor propio 1, que ha de tener dimensión 2. Calculamos este subespacio: en coordenadas respecto a B, un vector (a, b, c, d) está en V_1 si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así que $V_1 = L(\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\})$ (en coordenadas respecto a B).

2. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ordenada. Para cada par de números reales a, b, definimos la métrica cuya matriz en la base B viene dada por*

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula la signatura y clasifica la métrica en función de los valores de a y b.

El determinante de $M_B(g)$ es $-(a-1)^2$, que se anula si y sólo si $a = 1$. Dividimos el plano de valores de los parámetros en tres subconjuntos disjuntos:

$$S^- = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < 1\}, \quad L = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 1\}, \quad S^+ = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 1\},$$

Para $(a, b) \in S^+ \cup S^-$, g no puede ser definida positiva porque $\det M_B(g) = -(a-1)^2 < 0$. Tampoco puede tener signatura $(+, -, -)$ por la misma razón. Tampoco puede ser definida negativa, porque $g(e_1, e_1) > 0$. Así que g sólo puede tener signatura $(+, +, -)$ (luego es una métrica no degenerada e indefinida) para parámetros $(a, b) \in S^+ \cup S^-$.

Queda estudiar la signatura de g cuando $(a, b) \in L$. En ese caso, $\det M_B(g) = 0$ y por tanto el polinomio característico $p_A(t)$ de $A = M_B(g)$ ha de tener a cero como raíz. Calculamos este polinomio:

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & b-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = -t\left(t^2 - (2+b)t + 2(b-1)\right).$$

Las raíces de $p_A(t)$ son $t = 0$ y

$$t_{\pm}(b) = \frac{1}{2}\left[(2+b) \pm \sqrt{(2+b)^2 + 8(1-b)}\right].$$

La ecuación $(2+b)^2 + 8(1-b) = b^2 - 4b + 12 = 0$ no tiene raíces reales (sus discriminante es $16 - 48 < 0$) y tiene coeficiente líder positivo, luego el radicando de $t_{\pm}(b)$ es siempre positivo.

- Si $b < 1$, entonces $8(1-b) > 0$ luego $(2+b) - \sqrt{(2+b)^2 + 8(1-b)} < 0$ (es decir, $t_-(b) < 0$) y $(2+b) + \sqrt{(2+b)^2 + 8(1-b)} > 0$ (es decir, $t_+(b) > 0$) . Así que la signatura de g para $a = 1$, $b < 1$ es $(0, +, -)$ y por tanto, g es degenerada pero no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa.
- Si $b > 1$, entonces $8(1-b) < 0$ luego $(2+b) - \sqrt{(2+b)^2 + 8(1-b)} > 0$ (es decir, $t_-(b) > 0$) y $(2+b) + \sqrt{(2+b)^2 + 8(1-b)} > 0$ (es decir, $t_+(b) > 0$) . Así que la signatura de g para $a = 1$, $b < 1$ es $(0, +, +)$ y por tanto, g es degenerada y semidefinida positiva.
- Si $b = 1$, entonces $p_A(t) = t(t^2 - 3t) = t^2(t-3)$, que tiene raíces 0 (doble) y 3 (simple). Así que la signatura de g para $a = 1$, $b = 1$ es $(0, 0, +)$ y por tanto, g es degenerada y semidefinida positiva.

3. *En $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual se consideran dos giros f y h. Prueba que existe un vector $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tal que $f(v) = h(v)$.*

   Como f, h son isometrías de $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ en sí mismo, tenemos que $h^{-1} \circ f$ es una isometría de $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ en sí mismo. Además, $\det(h) = 1 = \det(f)$ por ser f, h giros, luego $\det(h^{-1} \circ f) = \det(h^{-1}) \det f = (\det h)^{-1} \det f = 1$. Esto nos dice que $h^{-1} \circ f$ es una rotación. Por el teorema de clasificación de las isometrías en un espacio vectorial métrico euclídeo tridimensional, $h^{-1} \circ f$ es el giro de cierto ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ alrededor de un cierto eje $L = L(\{v\})$, $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$. Así, $(h^{-1} \circ f)(v) = v$ de donde $f(v) = h(v)$.

4. *Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita, g, g' dos métricas en V y f un endomorfismo de V que verifica*

$$g'(f(u), f(v)) = g(u, v), \quad \forall u, v \in V. \tag{1}$$

   Demuestra que:

   a) $\text{índice}(g') \geqslant \text{índice}(g)$.

   Tomemos una base ordenada $B = (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}, x_{r+s+1}, \ldots, x_n)$ de V donde la matriz $M_B(g)$ adopte la forma del Teorema de Sylvester. Es decir,

$$g(x_i, x_j) = 0 \text{ si } i \neq j, \qquad g(x_i, x_i) = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 1 & \text{si } r+1 \leqslant i \leqslant r+s, \\ 0 & \text{si } r+s+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

La igualdad (1) implica que g' es definida negativa en $L(\{f(x_1), \ldots, f(x_r)\})$. Si vemos que $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ son linealmente independientes, entonces tendremos que índice$(g') \geqslant \dim L(\{f(x_1), \ldots, f(x_r)\}) = r =$ índice(g) y habremos terminado. Veamos entonces que $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ son linealmente independientes:

Sean $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^r a_i f(x_i) = 0$. Entonces, $f(x) = 0$, donde $x = \sum_{i=1}^r a_i x_i$. Esto implica que

$$0 = g'(0,0) = g'(f(x), f(x)) \overset{(1)}{=} g(x,x).$$

Como $x \in L(\{x_1, \ldots, x_r\})$ y la restricción de g a $L(\{x_1, \ldots, x_r\})$ es definida negativa, concluimos que $x = 0$. Como $x_1, \ldots, x_r$ son linealmente independientes (forman parte de la base B), deducimos que $a_1 = \ldots = a_r = 0$, luego $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ son linealmente independientes.

b) rango$(g') \geqslant$ rango(g).

Repitiendo el argumento del apartado anterior para $f(x_{r+1}), \ldots, f(x_{r+s})$, tenemos que g' es definida positiva en $L(\{f(x_{r+1}), \ldots, f(x_{r+s})\})$ y que $f(x_{r+1}), \ldots, f(x_{r+s})$ son linealmente independientes (ahora se usará que la restricción de g a $L(\{x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}\})$ es definida positiva). Es decir, g' es definida positiva en un subespacio vectorial de dimensión s. Así, el número de unos en una matriz donde g' adopte el Teorema de Sylvester es al menos s. Uniendo a esto lo obtenido en el apartado anterior tenemos que rango$(g') \geqslant r+s =$ rango(g).

c) *Si existe un endomorfismo h de V tal que $g(h(u), h(v)) = g'(u,v)$ $\forall u, v \in V$, entonces (V, g), (V', g') son isométricos.*

Aplicando los apartados a), b) a h (en el papel que antes jugaba f), y tenemos que índice$(g) \geqslant$ índice(g') y rango$(g) \geqslant$ rango(g'). Por tanto, índice$(g) =$ índice(g') y rango$(g) =$ rango(g'). Estas dos igualdades implican que (V, g), (V', g') son isométricos por un resultado probado en clase.