Supongamos que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se escribe por cajas

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \tag{1}$$

siendo $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{K})$ y $0 \in \mathcal{M}_{(n-m)\times m}(\mathbb{K})$. Veamos que $\det M = \det A \det C$.

Si A tiene orden 1, el resultado es trivial y se deduce de desarrollar el determinante de M por la primera columna. A partir de ahora supondremos que A tiene al menos orden 2.

Desarrollamos $\det M$ por la primera columna:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} m_{i1} \det \Delta_{i1}^M,$$

donde para cada i, j, m_{ij} es el (i, j)-esimo elemento de M y Δ_{ij}^M es la submatriz de orden $n-1$ de M que se obtiene en M tachando la fila i y la columna j. Observemos que

- Para $i \in \{m+1, \ldots, n\}$, $m_{i1} = 0$. Así que

  $$\det M = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} m_{i1} \det \Delta_{i1}^M,$$

- Para $i \in \{1, \ldots, m\}$, $m_{i1} = a_{i1}$. Así que

  $$\det M = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \Delta_{i1}^M, \tag{2}$$

- Para $i \in \{1, \ldots, m\}$, la submatriz Δ_{i1}^M se escribe

  $$\Delta_{i1}^M = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_{i1}^A & B' \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

  donde B' se obtiene a partir de B tachando sólo la fila i. Esta última matriz tiene la misma estructura que la matriz M original, pero con un orden menos (porque A tiene orden al menos dos). Esto sugiere que probemos el resultado por inducción sobre n.

Si $n = 2$ (para $n = 1$ el problema no tiene sentido), el resultado es trivial (M es una matriz de orden 2 con un cero en la posición m_{12}). Supongamos que el resultado es cierto para matrices M de orden $n-1$ y con la estructura dada por (1). Por hipótesis de inducción,

$$\det \Delta_{i1}^M = \det \Delta_{i1}^A \det C$$

así que sustituyendo en (2) queda

$$\det M = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \Delta_{i1}^A \det C = \left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \Delta_{i1}^A \right) \det C = \det A \det C,$$

donde en la última igualdad hemos usado el desarrollo de $\det A$ por la primera columna de A.