

Tema 3. Aplicaciones lineales

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2012/13

Profesor: Rafael López Camino

1. (a) Si $f \in L(V, V')$, B es base de V y $f(B)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, ¿ f es inyectiva?
 - (b) Si $f \in \text{End}(V)$ con $M(f, B, B') = I$, ¿es cierto que $f = \text{Id}$?
 - (c) Si $f \in L(V, V')$, probar que $\text{Ker}(f) = \text{an}(\text{Im}(f^t))$.
 - (d) Si $f : V \rightarrow V'$ es un isomorfismo y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ¿ λf es un isomorfismo?
 - (e) ¿Es cierto siempre que si $f : V \rightarrow V'$ es una aplicación lineal inyectiva y B es base de V , entonces $f(B)$ es base de V' ?
 - (f) Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal con $\dim(V) = \dim(V')$. Probar que f es inyectiva $\Leftrightarrow f$ es biyectiva.
 - (g) Hallar $\omega \in \mathbb{R}^{3*}$ tal que $\text{Ker}(\omega) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z = 0\}$.
 - (h) Existen endomorfismos en los que el núcleo y la imagen coinciden.
 - (i) Existen epimorfismos de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^4$ cuyo núcleo es $A_2(\mathbb{R})$.
2. Decidir cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:
- (a) $f(x, y, z) = x - 2z$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$,
 - (b) $f(x, y, z) = xy + yz$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$,
 - (c) $f(x, y) = (y - x, x - y, y - x)$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$,
 - (d) $f(x, y) = (x + y, x + 2, x - y)$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.
3. Sea considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x, 0, z)$. Probar que f es lineal y calcular una base su núcleo y de su imagen.
4. Sea V un espacio vectorial y sea $g \in \text{End}(V)$ tal que $g \circ g = g$. Demostrar que $V = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g)$. En $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, hallar endomorfismos no triviales satisfaciendo la anterior propiedad.
5. Sea $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = 1_V$. Demostrar que f es un automorfismo, y que $V = U \oplus W$, siendo

$$U = \{x \in V ; f(x) = x\}, \quad \text{y} \quad W = \{x \in V ; f(x) = -x\}.$$

Particularizar al caso $V = \mathbb{R}^2$ y $f(a, b) = (a, -b)$.

6. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V . Denotemos por

$$\text{Inv}(f) = \{x \in V ; f(x) = x\},$$

llamado el conjunto de los elementos invariantes por f . Demostrar que $\text{Inv}(f)$ es un subespacio vectorial de V .

7. Sea V un espacio vectorial que admite un endomorfismo f tal que $f \circ f = -1_V$. Probar que si $v \neq 0$, entonces $\{v, f(v)\}$ es linealmente independiente. Como conclusión, demostrar que la dimensión de V es par.
8. Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de manera que $f(U) = U'$, siendo U y U' los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$U = \{(x, y, 0) ; x, y \in \mathbb{R}\}, U' = \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}.$$

¿Es posible encontrar más de uno en estas condiciones?

9. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z, t) = (x+z-t, y+t, x+y+z)$. Hallar la expresión matricial de f respecto de las bases

$$B = \{(-1, 0, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 1, -1, 0), (1, 1, 1, -1)\}, B' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}.$$

Encontrar, si es posible, una base $\tilde{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y otra $\tilde{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ de forma que

$$M(f, \tilde{B}, \tilde{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular el rango de f . ¿Es f un epimorfismo?

10. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal de rango m . Probar que existen bases B y B' de V y V' respectivamente, tal que

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, 2x + y)$, probar que f es un isomorfismo y calcular su inversa.
12. Probar que si f es un endomorfismo de un espacio vectorial V , entonces $f \circ f = 0$ si y sólo si $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$. Hallar un endomorfismo no trivial de $\mathbb{R}^2$ con la anterior propiedad.

13. Sea la expresión matricial respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$ de un endomorfismo f dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Según el parámetro a , estudiar la nulidad y el rango de f .

14. Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Sea $H = \{v_1, \dots, v_r\}$, $r \leq n$, un subconjunto de V . Probar que H es linealmente independiente si y sólo si existe un automorfismo f de V tal que $f(e_i) = v_i$, $\forall i = 1, \dots, r$.
15. Sea f es un endomorfismo de V con $\dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Im}(f)$, probar que la dimensión de V es par. ¿Puede ser f un automorfismo? En $\mathbb{R}^2$ hallar un endomorfismo con la propiedad anterior. Del mismo modo, hallar un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
16. Hallar el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (2a, b + c, 2d).$$

Consideramos $\psi(x, y, z) = x - y - 2z$. Si $B'_u{}^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$, hallar las coordenadas de $f^t(\psi)$ respecto de $B'_u{}^*$.

17. Hallar un epimorfismo de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z - t = 0\}$.
18. Hallar un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que su núcleo e imagen sean, respectivamente, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0, x - y = 0\}$.
19. Hallar una aplicación lineal de $P_2[x]$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cuya imagen sea a) $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$; b) $A_2(\mathbb{R})$ y c) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \text{traza}(A) = 0\}$.
20. Sea $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(A) = (\text{traza}(A), \text{traza}(AU)).$$

Hallar una base del núcleo y de la imagen.

21. Dado $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ por $f(x, y, z, t) = (x - y, y + z, x - z, x + y + t)$, hallar su expresión matricial respecto de $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, -1, -1), (1, 1, 1, 0)\}$. Hallar una base del núcleo y de la imagen.

22. Probar que las matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

forma una base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ y respecto de ella, hallar la expresión matricial del endomorfismo

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & a-c \\ a-c & c \end{pmatrix}$$

23. Sea $f : P_n[X] \rightarrow P_n[X]$ la aplicación lineal $f(p(X)) = p'(X)$. Hallar una base del núcleo y de la imagen.
24. Hallar la expresión de una aplicación lineal $f : P_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(1+x+x^2) = (2, 0, 1)$, $f(1+2x^2) = (3, 1, 0)$ y $f(x+x^2) = (1, -2, 3)$.
25. Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales con bases $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B_2 = \{e'_1, e'_2\}$ respectivamente. Se consideran las aplicaciones lineales f y g definidas por

$$\begin{array}{lll} f : V_1 & \rightarrow & V_2 \\ e_1 & \mapsto & e'_1 - e'_2 \\ e_2 & \mapsto & e'_2 \\ e_3 & \mapsto & e'_1 + 2e'_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lll} g : V_2 & \rightarrow & V_1 \\ e'_1 & \mapsto & e_1 - e_2 \\ e'_2 & \mapsto & e_1 - e_3 \end{array}$$

Hallar las siguientes matrices:

- (a) $M(f, B_1, B_2), M(g, B_2, B_1),$
 (b) $M(g \circ f, B_1), M(f \circ g, B_2).$

26. Con la misma notación para espacios vectoriales y bases que en el ejercicio anterior, se considera la aplicación lineal dada por

$$f(e_1) = e'_1 - e'_2, \quad f(e_2) = e'_1, \quad f(e_3) = 2e'_1 - e'_2.$$

Hallar $M(f, B_1, B_2)$ y bases del núcleo e imagen de f .

27. Con la notación del ejercicio anterior, sea

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz de f respecto de las bases $B'_1 = \{e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2\}$, $B'_2 = \{\frac{1}{2}(e'_1 + e'_2), \frac{1}{2}(e'_1 - e'_2)\}$.

28. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios dados por $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + z = 0, x - 2y - z = 0\}$ y $W = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$. Encontrar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f^{-1}(W) = U$ y $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.
29. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$ de un endomorfismo f definido por las siguientes condiciones:
- (a) La aplicación f , restringida al plano de ecuación $x + y + z = 0$, es la identidad.
 - (b) $f(0, 0, -1) = (-1, -2, -1)$.

30. Probar que la aplicación $f : P_2[X] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

es lineal y probar que $\text{Im}(f) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Deducir la nulidad y el rango de f .

31. Hallar bases del núcleo e imagen de la aplicación $f : P_3[X] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 - a_0 \\ a_1 - a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar su expresión matricial respecto de las bases usuales.

32. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se definen los subespacios vectoriales $U = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$. Encontrar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea U y cuya imagen sea W y hallar su matriz de f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$.
33. Demostrar que dos matrices semejantes tienen la misma traza, pero que el recíproco es falso; más aún, que si dos matrices tienen el mismo rango y la misma traza no tienen porqué ser semejantes. A partir de esto, definir la traza de un endomorfismo. Calcular la traza del endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
34. Sea P una matriz regular de orden n . Probar que la aplicación de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en sí mismo dada por $A \mapsto P^{-1}AP$ es un automorfismo de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
35. Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 y $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = 0$. Demostrar que o bien $f = 0$, o si $f \neq 0$, es posible encontrar una base B de V tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Indicación: Probar que si $f(x) \neq 0$, entonces $\{f(x), x\}$ es linealmente independiente). A partir de esto, encontrar todas las matrices cuadradas reales A de orden 2, tales que $A^2 = 0$.

36. En $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ se consideran las bases $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 2)\}$ y $B' = \{(1, 2), (0, 2)\}$ respectivamente, así como las bases usuales B_u y B'_u . Hallar $M(f, B, B_u)$, $M(f, B_u, B')$, $M(f, B_u, B'_u)$ y $M(f, B, B')$ donde f es la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x + 2y, z)$.
37. En $\mathbb{R}^2$, hallar la base dual de $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$. Hallar las coordenadas respecto de B^* de $\alpha(x, y) = x + y$.
38. En $P_3[X]$ hallar la base dual de $\{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$.
39. En $P_2[X]$ se consideran las aplicaciones $B = \{\alpha, \beta, \psi\}$ definidas por $\alpha(p(X)) = p''(1)$, $\beta(p(X)) = p(1)$ y $\psi(p(X)) = p'(0)$. Probar que $B \subset P_2[X]^*$ y es una base de dicho espacio.
40. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las formas lineales

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y, z) &= 2x - y + 3z, \\ \psi_2(x, y, z) &= 3x - 3y + z, \\ \psi_3(x, y, z) &= 4x + 7y + z.\end{aligned}$$

Probar que $B' = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ forman base de $\mathbb{R}^{3*}$ y calcular las coordenadas respecto de B' de $\varphi(x, y, z) = x + y + z$. Encontrar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$.

41. En $P_2[x]$ se consideran las siguientes bases $B = \{1, x, x^2\}$ y $B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Encontrar las ecuaciones de cambio de base entre B^* y B'^* . Si $\varphi \in P_2[x]^*$ viene dada por $\varphi(p(x)) = p(-1)$, encontrar las coordenadas de φ en la base B'^* .
42. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y la forma lineal $\varphi(A) = \text{traza}(A)$. Encontrar una base B' de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ en la que esté φ . Encontrar también la base B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $B^* = B'$. Hallar una base de $\text{an}(\langle \varphi \rangle)$.
43. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran las formas lineales

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d, \quad \varphi_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b - c.$$

- (a) Probar que φ_1 y φ_2 son linealmente independientes.
- (b) Ampliar $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ calcular las coordenadas de $\varphi(A) = a + b + c + d$.
- (c) Calcular una base del subespacio anulador de $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

44. En $\mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ se considera la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Obtener la correspondiente base dual.

45. Sea V un espacio vectorial, $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $B_1^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Dados $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, se definen los conjuntos $B_2 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, $B_2' = \{\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n\}$, donde

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= e_1, & \bar{e}_i &= e_i - \lambda_i e_1, & \forall i &= 2, \dots, n, \\ \bar{\varphi}_1 &= \varphi_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j \varphi_j, & \bar{\varphi}_i &= \varphi_i, & \forall i &= 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Probar que B_2 es base de V , B_2' de V^* y que $B_2' = B_2^*$.

46. Calcular una base y ecuaciones cartesianas del anulador del subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z = 0\}.$$

47. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definimos una aplicación $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\varphi_A(X) = \text{traza}(AX)$. Demostrar que $\varphi_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$. Recíprocamente, probar que para cada forma lineal φ sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_A = \varphi$.

48. Se definen las aplicaciones $\varphi(x, y, z) = 2x + y - z$ y $\psi(x, y, z) = x + y + z$. Demostrar que φ y ψ son formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$ y que son linealmente independientes. Encontrar una tercera forma lineal $\alpha \in \mathbb{R}^{3*}$ de modo que $\{\varphi, \psi, \alpha\}$ sea una base de $\mathbb{R}^{3*}$. Encontrar también una base de $\mathbb{R}^3$ cuya base dual sea $\{\varphi, \psi, \alpha\}$.

49. Sea V un espacio vectorial y sean $y \in V$, $\varphi \in V^*$. Definimos un endomorfismo f de V mediante $f(x) = \varphi(x)y$, $x \in V$. Demostrar que la traza de f es $\varphi(y)$.

50. Se considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ mediante $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$. Calcular una base de $\text{an}(\text{Ker}(f))$. Calcular la matriz de la aplicación traspuesta de f respecto de las bases usuales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

51. En $P_2[X]$ y $P_2[X]^*$ sean las bases $B = \{1, x, x^2\}$ y $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Se definen las siguientes aplicaciones de V en $\mathbb{R}$:

$$(a) \quad \psi_1(p(x)) = \int_0^1 p(x) dx, \quad \psi_2(p(x)) = p'(1), \quad \psi_3(p(x)) = p(0),$$

$$(b) \quad \alpha_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, \quad \alpha_2(p(x)) = \int_0^1 xp(x)dx, \\ \alpha_3(p(x)) = \int_0^1 x^2p(x)dx.$$

Demostrar que tanto $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ como $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ son bases de V^* . Calcular las coordenadas de los elementos de tales bases en B^* y hallar las bases de V de las cuales son bases duales.

52. Sean V y V' dos espacios vectoriales, $f \in L(V, V')$ y $\varphi \in V^*$. Probar que existe $\varphi' \in V'^*$ tal que $\varphi' \circ f = \varphi$ si y sólo si $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(\varphi)$.
53. Se considera el espacio vectorial $V = P_n[X]$. Probar que para cada forma lineal $\varphi \in V^*$, existe un único polinomio $q(x) \in V$ tal que

$$\varphi(p(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \forall p(x) \in V.$$

54. Sea $f \in \text{End}(V)$ con $f \circ f = f$. Probar que f^t satisface $f^t \circ f^t = f^t$ y que

$$V^* = \text{an}(\text{Ker}(f)) \oplus \text{an}(\text{Im}(f)).$$

55. Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $f(x, y) = (x, y, x + y)$. Hallar $M(f^t, B'^*, B^*)$ donde $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ y $B' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.
56. Hallar un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ cuyo anulador es $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ con $\psi_1(x, y, z, t) = x - y$ y $\psi_2(x, y, z, t) = z - t$.
57. Si $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de un espacio vectorial V , calcular las coordenadas respecto de B^* de la forma lineal α dada por

$$\alpha(e_1 - e_2) = 1, \quad \alpha(e_1 + e_2) = 0, \quad \alpha(e_1 + e_2 + e_3) = 2.$$

58. Hallar una base y ecuaciones cartesianas del anulador del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$.
59. Hallar una base y ecuaciones cartesianas del anulador del subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z = 0, x + y - t = 0\}$.
60. Hallar un endomorfismo g de $(\mathbb{R}^4)^*$ tal que $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g) = \text{an}(U)$, donde $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = 0, z - t = 0\}$. Hallar $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ tal que $f^t = g$.

61. Se considera $\alpha(x, y, z) = x - y + z$. Hallar el subespacio $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\text{an}(U) = \langle \alpha \rangle$.
62. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran las formas lineales $\alpha(A) = \text{traza}(A)$ y $\beta(A) = a_{11} + a_{12}$. Hallar una base de $\text{an}(\langle \alpha, \beta \rangle)$.