Tema 6: Espacio Afín Euclídeo.

Índice

1. Espacio afín. Vectores y puntos. **1**

2. Subespacios afines. **3**

3. Ecuaciones cartesianas o implícitas de un subespacio afín. **4**

4. Subespacio afín generado por $m+1$ puntos. **5**

5. Dependencia e independencia afín. **6**

6. Intersección y suma de subespacios afines. **6**

7. Paralelismo **7**

8. Sistemas de referencia y ecuaciones cartesianas de un subespacio afín **8**

9. Aplicaciones afines **9**

10. Espacio afín euclídeo **12**

11. Movimientos rígidos **14**

12. Cónicas y cuádricas **19**
12.1. Cónicas 20
12.2. Cuádricas 22

13. Ejercicios. **27**

1. Espacio afín. Vectores y puntos.

Definición 1 Un *espacio afín* es una terna $(V(\mathbb{R}), A, \Phi)$ donde $V(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real, (llamado *espacio de direcciones,* y sus elementos se llaman *vectores o direcciones*), A es un conjunto no vacío (sus elementos se llaman *puntos*) y $\Phi\colon A \times V \to A$ (notación: $\Phi(P, v) = P + v$) cumple

(A1) $\Phi(P, 0) = P$ $(P + 0 = P)$ $\forall P \in A$,

(A2) $\Phi(\Phi(P, v), w) = \Phi(P, v + w)$ $((P + v) + w = P + (v + w))$ $\forall P \in A,\ v, w \in V$,

(A3) $\forall P, Q \in A$, $\exists!\, v \in V$ tal que $\Phi(P, v) = Q$ $(P + v = Q)$.

La *dimensión* de A es la dimensión de V.

(A3)' $\forall P \in V$, la aplicación $\Phi_P \colon V \to A$, $\Phi_P(v) = P + v$ es una biyección (podemos identificar A con V fijando un *origen*).
Si $Q = P + v$, entonces $\overrightarrow{PQ} := v = \Phi_P^{-1}(Q) \in V$ (vector libre de origen P y extremo Q).
Por definición,

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

Ejemplos.

1. Todo espacio vectorial es un espacio afín, con $\Phi : A \times V \to A$, $\Phi(P, v) = P + v$ (ahora NO es notación).

2. Podemos dotar de estructura de espacio afín a cualquier plano Π de $\mathbb{R}^3$, aunque no pase por el origen: Llamo $A = \Pi$ y considero el plano vectorial $V = \Pi'$ paralelo a Π que pase por el origen (Π' es un espacio vectorial). Dados $P \in \Pi$, $v \in \Pi'$, definimos $\Phi(P, v)$ como el único punto de Π obtenido "trasladando 0 a P y luego sumando v".

En todo el tema, A denotará un espacio afín.

Proposición 1 *1.* $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

2. $\overrightarrow{PQ} = 0$ *si y sólo si* $P = Q$.

3. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

4. Identidad del paralelogramo: *Si* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, *entonces* $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.

5. $\overrightarrow{P + v, Q + w} = \overrightarrow{PQ} + w - v$.

Demostración. Para 1, basta comprobar: ¿$\Phi_P(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = R$?
$\Phi_P(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \Phi(P, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) \overset{(A2)}{=} \Phi\left(\phi(P, \overrightarrow{PQ}), \overrightarrow{QR}\right) = \Phi(Q, \overrightarrow{QR}) = R$.
Para 2, $\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow \Phi_P^{-1}(Q) = 0 \Leftrightarrow Q = \Phi_P(0) \overset{(A1)}{\Leftrightarrow} Q = P$.
3 se deduce de 1 y 2.
Para 4, $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$. Cancelar $\overrightarrow{PQ}$ con $\overrightarrow{RS}$.
Para 5, $\overrightarrow{P + v, Q + w} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{P + v, P} + \overrightarrow{P, Q + w} \overset{(3)}{=} -\overrightarrow{P, P + v} + \overrightarrow{P, Q + w} = -v + \overrightarrow{P, Q + w} = -v + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q, Q + w} = -v + \overrightarrow{PQ} + w$. $\square$

2. Subespacios afines.

Definición 2 (Subespacio afín) Un *subespacio afín* es un subconjunto $S \subset A$ del tipo $S = \Phi_P(U) = P + U$, donde $P \in A$ y $U \leq V$.

Lema 1 (U es único) *Si* $S = \Phi_P(U) = \Phi_Q(W)$ *con* $P, Q \in A$ *y* $U, W \leq V$*, entonces* $U = W$ *y* $\overrightarrow{PQ} \in U$*.*

Demostración. $Q + W = (P + \overrightarrow{PQ}) + W = P + (\overrightarrow{PQ} + W)$. Como $Q + W = P + U$, $P + (\overrightarrow{PQ} + W) = P + U$ luego $\overrightarrow{PQ} + W = U \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in U$ y así, $U = W$. □

Si $S = \Phi_P(U)$ es una subespacio afín de A, a $\vec{S} = U$ se le llama *variedad de dirección* de S:

$$S = P + \vec{S}, \qquad \dim S := \dim \vec{S}.$$

Como $S = \{Q \mid Q \in S\} = \{P + \overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\} = P + \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\}$, deducimos que

$$\vec{S} = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\}.$$

En el caso de que $\dim S = \dim A - 1$, a S se le llama *hiperplano afín.*

Lema 2 *Sean* $S = P + \vec{S}$, $T = Q + \vec{T}$ *dos subespacios afines de* A*. Entonces:*

$$S \subset T \;\Leftrightarrow\; \vec{S} \subset \vec{T} \text{ y } \overrightarrow{PQ} \in \vec{T}.$$

Demostración. $S \subset T \;\Leftrightarrow\; P + \vec{S} \subset Q + \vec{T} \;\Leftrightarrow\; P + \vec{S} \subset P + \overrightarrow{PQ} + \vec{T} \;\Leftrightarrow\; \vec{S} \subset \overrightarrow{PQ} + \vec{T}$ $(\star)$. Si $(\star)$ se da, como $0 \in \vec{S}$, entonces $0 \in \overrightarrow{PQ} + \vec{T}$ luego $\overrightarrow{PQ} \in \vec{T}$ y $\vec{S} \subset \overrightarrow{PQ} + \vec{T} = \vec{T}$. Recíprocamente, si $\vec{S} \subset \vec{T}$ y $\overrightarrow{PQ} \in \vec{T}$, entonces $(\star)$ es trivial. □

Aplicando el Lema 2 tenemos:

Corolario 1 *Sean* $S = P + \vec{S}$, $T = Q + \vec{T}$ *dos subespacios afines de* A*. Entonces:*

1. $S = T \;\Leftrightarrow\; \vec{S} = \vec{T}$ *y* $\overrightarrow{PQ} \in \vec{S}$.

2. *Si* $S \subset T$ *y* $\dim S = \dim T \;\Rightarrow\; S = T$.

Demostración. Ejercicio. □

3. Ecuaciones cartesianas o implícitas de un subespacio afín.

Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{rl} Mx = b & \leftarrow \text{Sistema de } m \text{ ecs lineales con } n \text{ incógnitas} \\ Mx = 0 & \leftarrow \text{Sistema homogéneo asociado} \\ \mathrm{Sol}(Mx = 0) & \leftarrow \text{Subespacio vectorial de } \mathbb{R}^n \text{ con dimensión } n - m \end{array}$$

Lema 3 $\mathrm{Sol}(Mx = b)$ *es un subespacio afín de* $\mathbb{R}^m$ *con dimensión* $n - m$ *y variedad de dirección* $\mathrm{Sol}(Mx = 0)$.

Demostración. Sea x_0 una solución de $Mx = b$. $\mathrm{Sol}(Mx = b) = x_0 + \mathrm{Sol}(Mx = 0)$. □

El recíproco es cierto:

Proposición 2 *Sea* $S \subset \mathbb{R}^n$ *subespacio afín con* $\dim S = n - m$*. Entonces,* $\exists M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *con rango* m *y* $b \in \mathbb{R}^m$ *tales que* $S = \mathrm{Sol}(Mx = b)$*.*

Demostración. Tomo $x_0 \in S$. Por lo anterior y el Corolario 1, basta ver que $\exists M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con rango m tal que $\vec{S} = \mathrm{Sol}(Mx = 0)$. Tomamos una base B de $V = \vec{A}$ y M dada por las ecuaciones implícitas de $\vec{S}$ respecto a B, por filas. □

Recordemos cómo se calculan las ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial U de V respecto a una base B de V: Llamemos $B = \{x_1, \dots x_n\}$ y sea $B_U = \{y_1, \dots, y_k\}$ una base de U (auxiliar). Primero escribimos por columnas las coordenadas de cada vector de B_U respecto a B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Reordenamos las filas anteriores para que las m primeras filas sean linealmente independientes (teorema del rango). Añadimos una columna de incógnitas $b_1, \dots, b_n$ a la derecha:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & b_m \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & b_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Cada uno de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & b_m \\ a_{h1} & \dots & a_{hm} & b_h \end{vmatrix} = 0, \quad \forall h = m+1, \dots, n$$

es una ecuación implícita de U.

4. Subespacio afín generado por $m+1$ puntos.

Dados $P, Q \in A$, la *recta afín generada por P y Q* es

$$< P, Q >= P + L(\{\overrightarrow{PQ}\}).$$

- $< P, Q >$ es un subespacio afín de dimensión 1 (salvo que $P = Q$), y es el único subespacio afín de dimensión 1 que contiene a P y a Q.
- $< P, Q >=< Q, P >$.
- Si Si $R \in < P, Q >$ es distinto de P y de Q $\Rightarrow < P, R >=< P, Q >$.
- Si $A, B, C \in < P, Q > \Rightarrow$ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes.

Dados $P_0, \dots, P_m \in A$, el *subespacio afín generado por $P_0, \dots, P_m$* es

$$< P_0, \dots, P_m >= P_0 + L(\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_m}\}).$$

- $< P_0, \dots, P_m >$ es un subespacio afín de dimensión

  $$\dim < P_0, \dots, P_m >= \text{rango}\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$$

  y es la intersección de todos los subespacios afines de A que contienen a $P_0, \dots, P_m$ (en particular, podemos cambiar P_0 por cualquiera de los otros puntos y el resultado no cambia).

Proposición 3 *Si S es un subespacio afín de A con $\dim S = m$, entonces $\exists P_0, \dots, P_m \in S$ tales que $S =< P_0, \dots, P_m >$, y el número de puntos no puede ser menor.*

Demostración. Sea $P_0 \in S$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de $\vec{S}$. Llamemos $P_i = P_0 + v_i \in S$. Entonces, $< P_0, \dots, P_m >\subset S$ y contando dimensiones se da la igualdad. Finalmente, Si $S =< Q_0, \dots, Q_k >$ entonces $\vec{S} = L(\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \dots, \overrightarrow{Q_0Q_k}\})$ luego $m = \dim \vec{S} \leq k$. □

5. Dependencia e independencia afín.

Definición 3 $m+1$ puntos $P_0, \ldots, P_m \in A$ se dicen *afínmente independientes* si $\dim < P_0, \ldots, P_m >= m$ (en caso contrario, los puntos se dicen *afínmente dependientes*).

- Todo subconjunto de un conjunto afínmente independiente es afínmente independiente.
- A un conjunto afínmente independiente se le pueden añadir puntos hasta conseguir $n+1$ puntos afínmente independientes ($n = \dim A$).
- Si $\dim A = n \Rightarrow$ todo subconjunto con más de $n+1$ puntos es afínmente dependiente.

6. Intersección y suma de subespacios afines.

Proposición 4 *Si S, T son subespacios afines de A y $S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow S \cap T$ es un subespacio afín de A, con $\overrightarrow{S \cap T} = \vec{S} \cap \vec{T}$.*

Demostración. Sea $P \in S \cap T \Rightarrow S \cap T = (P + \vec{S}) \cap (P + \vec{T}) = P + (\vec{S} \cap \vec{T})$. □

Luego la intersección de dos subespacios afines, o es vacía (imposible para subespacios vectoriales), o es un subespacio afín. ¿Cuándo es $S \cap T \neq \emptyset$?

Lema 4 *Si S, T son subespacios afines de A, entonces*

$$S \cap T \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall P \in S, Q \in T, \overrightarrow{PQ} \in \vec{S} + \vec{T}.$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Tomemos $R \in S \cap T$. Entonces, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} \in \vec{S} + \vec{T} \; \forall P \in S, Q \in T$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $P \in S$, $Q \in T$. Así, $\overrightarrow{PQ} = u + v$ con $u \in \vec{S}$ y $v \in \vec{T}$. Definimos $R = P + u \in S$. Como $R = R + (\overrightarrow{PQ} - v) = Q - v$, entonces $R \in T$. □

Definición 4 Sean S, T subespacios afines de A. Se define la *suma* de S y T como

$$S + T := \bigcap_{L(\star)} L,$$

donde la intersección se hace en $(\star)$ todos los subespacios afines de A conteniendo a $S \cup T$. $S + T$ es el menor subespacio afín de A que contiene a S y a T.

Lema 5 *Si S, T son subespacios afines de A, entonces $S + T$ es un subespacio afín de A, con variedad de dirección: $\overrightarrow{S + T} = \vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})$, donde $P \in S$ y $Q \in T$.*

Demostración. Para que $S+T$ sea un subespacio afín basta escribirlo como un punto suyo más una variedad de dirección. Sea $P \in S$ y $Q \in T$. El lema estará probado si vemos que

$$S+T = P + (\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}). \tag{1}$$

Claramente, $P \in S \subset S+T$, y $\vec{S}+\vec{T}+L(\{\overrightarrow{PQ}\}$ es subespacio vectorial de $V = \vec{A}$, así que basta comprobar (1) por doble inclusión.

$\boxed{\subseteq}$ $P + (\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})$ es un subespacio afín de A, que contiene a S (porque $S = P + \vec{S} \subset P + (\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}))$ y a T (porque $T = Q + \vec{T} = P + \vec{T} + \overrightarrow{PQ} \subset P + (\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}))$. Por tanto, $P + (\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})$ contiene a $S+T$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea L un subespacio afín de A que contiene a $S \cup T$. Queda ver que $P + (\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}) \subset L$: Como $P \in S \subset L$, basta comprobar que $\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}) \subset \vec{L}$, lo cual es evidente. □

Corolario 2 *Si S, T son subespacios afines de A, entonces:*

1. *Si* $S \cap T = \emptyset \;\Rightarrow\; \dim(S+T) = \dim(\vec{S}+\vec{T}) + 1$.
2. *Si* $S \cap T \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \dim(S+T) = \dim(\vec{S}+\vec{T}) = \dim S + \dim T + \dim(S \cap T)$.

Demostración. Para el apartado 1, supongamos que $S \cap T = \emptyset$. Por el Lema 4, existen $P \in S$ y $Q \in T$ tales que $\overrightarrow{PQ} \notin \vec{S} + \vec{T}$. Por tanto,

$$\dim(S+T) = \dim \overrightarrow{S+T} \overset{(\text{Lema } 5)}{=} \dim[\vec{S} + \vec{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})] = \dim(\vec{S}+\vec{T}) + 1.$$

El apartado 2 se prueba de forma análoga. □

7. Paralelismo

Definición 5 Sean S, T dos subespacios afines de A. S se dice *paralelo* a T si $\vec{A} \subset \vec{T}$, y S, T se dicen *paralelos* ($S \| T$) si $\vec{S} = \vec{T}$.

- Si S es paralelo a T, entonces o bien $S \subset T$ o bien $S \cap T = \emptyset$ (para ver esto, tomemos $P \in S$ y $Q \in T$; como $\vec{S} \subset \vec{T}$ tenemos dos opciones: que $\overrightarrow{PQ} \in \vec{T}$ o que $\overrightarrow{PQ} \notin \vec{T}$. En el primer caso el Lema 2 nos dice que $S \subset T$. En el segunto caso, como $\vec{T} = \vec{S} + \vec{T}$, el lema 4 asegura que $S \cap T = \emptyset$).
- Si S, T son paralelos, entonces o bien $S = T$ o bien $S \cap T = \emptyset$ (aplicar el punto anterior dos veces).

- Si S es un subespacio afín, entonces por cada punto P de A pasa un único subespacio afín T de A tal que S, T son paralelos ($T = P + \vec{S}$). Este es el famoso "quinto postulado de Euclides".

Definición 6 Diremos que dos subespacios afines S, T de A *se cruzan* si son disjuntos y no paralelos.

8. Sistemas de referencia y ecuaciones cartesianas de un subespacio afín

Definición 7 Un *sistema de referencia* es un par $(O; B)$ donde $=\in A$ (llamado *origen*) y B es una base de V (sus vectores determinan los *ejes* del sistema de referencia). Dado $P \in A$, las *coordenadas afines* de P respecto a $(O; B)$ son los números reales $a_1, \ldots, a_n$ tales que $P = O + \sum_{i=1}^n a_i v_i$, donde $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

- Si $P_0, P_1, \ldots p_n \in A$ ($n = \dim A$) y $v_i = \overrightarrow{P_0 P_i}$, $i = 1, \ldots, n$, entonces $(P_0; \{v_1, \ldots, v_n\})$ es un sistema de referencia de A si y sólo si los puntos $P_0, \ldots, P_n$ son afínmente independientes.

Teorema 1 (Ecuaciones cartesianas de un subespacio afín) *Sea S un subespacio afín de A y $(O; B = \{v_1, \ldots, v_n\})$ un sistema de referencia. Entonces, existe $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con rango $m = n - \dim S$ y $\exists b \in \mathbb{R}^m$ tales que*

$$S = \{O + \sum_{i=1}^n x_i v_i \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Sol}(Mx = b)\}.$$

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matriz cuyas filas son las ecuaciones implícitas de $\vec{S}$ respecto a B, y que tiene rango $m = n - \dim S$. Así, dado $P \in S$ tenemos $S = P + \mathrm{Sol}(Mx = 0)$. Escribimos P como $P = O + \sum_{i=1}^n a_i v_i$ (coordenadas afines). Por tanto,

$$S = \left(O + \sum_{i=1}^n a_i v_i\right) + \mathrm{Sol}(Mx = 0) = \{O + \sum_{i=1}^n (a_i + c_i) v_i \mid (c_1, \ldots, c_n) \in \mathrm{Sol}(Mx = 0)\}$$

$$\overset{(x_i = a_i + c_i)}{=} \{O + \sum_{i=1}^n x_i v_i \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Sol}(Mx = Ma)\},$$

donde $a = (a_1, \ldots, a_n)^t$. Ahora sólo queda definir $b = Ma$. □

- Los conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales $Mx = b$ y $Mx = b'$ son subespacios afines paralelos. Recíprocamente, si S, T son subespacios afines paralelos, entonces existe una matriz M (de rango $n - \dim S$) tal que $S = \mathrm{Sol}(Mx = b)$ y $T = \mathrm{Sol}(Mx = b')$.

9. Aplicaciones afines

Lema 6 *Sean A, A' dos espacios afines, con espacios vectoriales asociados V, V'. Sea $f\colon A \to A'$ una aplicación. Fijado $P \in A$, definimos $f_P\colon V \to V'$ mediante*

$$\overrightarrow{f_P}(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}, \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

Si $\overrightarrow{f_P}$ es lineal entonces $\overrightarrow{f_P} = \overrightarrow{f_Q}$, $\forall Q \in A$.

Demostración. Primero notemos que de (2) se deducen

$$f(P+v) = f(P) + \overrightarrow{f_P}(v), \quad \forall v \in V. \tag{3}$$

$$\overrightarrow{f_P}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}, \quad \forall P, Q \in A. \tag{4}$$

Ahora podemos probar el lema. Sea $v \in V$.

$$\left(f(P) + \overrightarrow{f(P)f(Q)}\right) + \overrightarrow{f_Q}(v) = f(Q) + \overrightarrow{f_Q}(v) \overset{(3)}{=} f(Q+v) = f(P + \overrightarrow{PQ} + v)$$

$$\overset{(3)}{=} f(P) + \overrightarrow{f_P}(\overrightarrow{PQ} + v) \overset{(\star)}{=} f(P) + \left(\overrightarrow{f_P}(\overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{f_P}(v)\right) \overset{(4)}{=} f(P) + \left(\overrightarrow{f(P)f(Q)} + \overrightarrow{f_P}(v)\right)$$

$$= \left(f(P) + \overrightarrow{f(P)f(Q)}\right) + \overrightarrow{f_P}(v).$$

donde en $(\star)$ hemos usado que $\overrightarrow{f_P}$ es lineal. □

Definición 8 Sean A, A' dos espacios afines, con espacios vectoriales asociados V, V'. Una aplicación $f\colon A \to A'$ se dice *afín* si existe $P \in A$ tal que $\overrightarrow{f_P}\colon V \to V'$ es lineal. Por el lema anterior, podemos denotar $\overrightarrow{f_P} = \vec{f}$. A $\vec{f}$ se le llama la *aplicación lineal* asociada a f, y se cumplen

$$\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}, \quad \forall v \in V. \tag{5}$$

$$f(P+v) = f(P) + \vec{f}(v), \quad \forall v \in V. \tag{6}$$

$$\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}, \quad \forall P, Q \in A. \tag{7}$$

Lema 7 *Dada una aplicación lineal $F\colon V \to V'$ y dos puntos $P \in A$, $P' \in A'$, existe una única aplicación afín $f\colon A \to A'$ tal que $f(P) = P'$ y $\vec{f} = F$.*

Demostración. $f(Q) = f(P + \overrightarrow{PQ}) = P' + F(\overrightarrow{PQ})$. □

Algunos ejemplos de aplicaciones afines:

1. Si A es un espacio afín que también es espacio vectorial, entonces

   - Toda aplicación lineal es afín.
   - Una aplicación afín de A en A es lineal si y sólo si lleva 0 en 0.

2. Las *constantes* son aplicaciones afines (con $\vec{f} = 0$).

3. Las *traslaciones* $T_v \colon A \to A$, $T_v(P) = P + v$ son aplicaciones afines ($\overrightarrow{T_v} = 1_V$) biyectivas, con $(T_v)^{-1} = T_{-v}$, forman un grupo con la composición, no tienen puntos fijos (salvo cuando $v = 0$, que es $T_v = 1_A$), y toda traslación está determinada por la imagen de un sólo punto.

4. Las *homotecias* $H_{P,\lambda} \colon A \to A$, $H_{P,\lambda}(P) = P + \lambda\overrightarrow{PQ}$ son aplicaciones afines ($\overrightarrow{H_{P,\lambda}} = \lambda 1_V$). A $P \in A$ se le llama el *centro* y a $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ la *razón* de la homotecia. Son biyectivas, con $(H_{P,\lambda})^{-1} = H_{P,1/\lambda}$. Las homotecias con el mismo centro, junto con la identidad, forman un grupo con la composición. El único punto fijo de una homotecia (que no sea 1_A) es su centro. Toda homotecia está determinada por la imagen de dos puntos (si $P_1, P_2 \in A$ tienen imágenes prescritas $Q_1, Q_2 \in A$ y buscamos una homotecia $H_{P,\lambda}$ que lleve P_i en Q_i, $i = 1, 2$, entonces $\vec{f}$ viene determinada por $\lambda\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{f}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{f(P_1)f(P_2)} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ (en particular, P_1, P_2 deben generar una recta paralela a la generada por Q_1, Q_2). Ahora, f está determinada por $\vec{f}$ y por el Lema 7.

5. Todas las aplicaciones afines $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son de la forma $f(x) = Mx + b$, donde $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

6. *Proyecciones.* Decimos que A es *suma directa* de dos subespacios afines $S, T \subset A$ (denotado $A = S \oplus T$) si $V = \vec{A} \oplus \vec{T}$. Equivalentemente, $A = S + T$ y $S \cap T$ es un punto. Si $A = S \oplus T$, se define la *proyección de A sobre S paralela a $\vec{T}$* mediante

$$\Pi_S \colon A \to A, \quad \Pi_S(Q) = S \cap (Q + \vec{T})$$

   (esta intersección se reduce aun punto porque $S \oplus (Q + \vec{T}) = A$). ¿Cuál es la aplicación lineal asociada a Π_S? Fijado $P \in S$, descomponemos $\overrightarrow{PQ} = \Pi_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ}) + \Pi_{\vec{T}}(\overrightarrow{PQ})$ (aquí $\Pi_{\vec{S}}$, $\Pi_{\vec{T}}$ son las correspondientes proyecciones lineales). Entonces,

$$P + \Pi_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P + \left(\overrightarrow{PQ} - \Pi_{\vec{T}}(\overrightarrow{PQ})\right) = \left(P + \overrightarrow{PQ}\right) - \Pi_{\vec{T}}(\overrightarrow{PQ}) = Q - \Pi_{\vec{T}}(\overrightarrow{PQ}).$$

   Como $P + \Pi_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ}) \in P + \vec{S} = S$ y $Q - \Pi_{\vec{T}}(\overrightarrow{PQ}) \in Q + \vec{T}$, conclúimos que $\Pi_S(Q) = P + \Pi_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ})$. O sea, la aplicación lineal asociada a Π_S es $\Pi_{\vec{S}}$.

7. *Simetrías respecto a subespacios.* Si $A = S \oplus T$ (descomposición en subespacios afines), se define la *simetría de A respecto de S paralela a $\vec{T}$* mediante

$$\sigma_S \colon A \to A, \quad \Pi_S(Q) = Q + 2\overrightarrow{Q, \Pi_S(Q)}.$$

Dado $P \in S$,

$$\sigma_S(Q) = Q + 2\overrightarrow{Q, \Pi_S(Q)} = \left(P + \overrightarrow{PQ}\right) + 2\overrightarrow{Q, P + \Pi_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ})}$$

$$= P + \overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{QP} + 2\Pi_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P - \overrightarrow{PQ} + 2\Pi_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P + \left(-1_V + 2\Pi_{\vec{S}}\right)(\overrightarrow{PQ})$$

$$= P + \left(\Pi_{\vec{S}} - \Pi_{\vec{T}}\right)(\overrightarrow{PQ}) = P + \sigma_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ}),$$

de donde tenemos que la aplicación lineal asociada a σ_S es la simetría lineal $\sigma_{\vec{S}}$ de V respecto a $\vec{S}$ paralela a $\vec{T}$.

8. *Simetrías centrales.* Un caso particular del punto anterior es cuando tomamos $S = \{P\}$ y $T = A$, en cuyo caso $\sigma_S(Q) = P + \sigma_{\vec{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P - \overrightarrow{PQ}$, llamada la *simetría central respecto a P.*

Proposición 5 (Propiedades de las aplicaciones afines)

(A) *La composición de aplicaciones afines es una aplicación afín, y la aplicación lineal asociada a la composición es la composición de las aplicaciones lineales asociadas.*

(B) *Si $f, h \colon A \to A'$ son dos aplicaciones afines y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $af + bh \colon A \to A'$ es una aplicación afín, y $\overrightarrow{af + bh} = a\vec{f} + b\vec{h}$.*

(C) *Si $f \colon A \to A'$ es una aplicación afín y $S \subset A$ es un subespacio afín, entonces $f(S)$ es un subespacio afín de A', con $\overrightarrow{f(S)} = \vec{f}(\vec{S})$.*

(D) *Si $f \colon A \to A'$ es una aplicación afín y $S' \subset A'$ es un subespacio afín, entonces $f^{-1}(S')$ es un subespacio afín de A, con $\overrightarrow{f^{-1}(S')} = (\vec{f})^{-1}(\vec{S'})$.*

(E) *Si $f \colon A \to A'$ es una aplicación afín y $S, T \subset A$ son subespacios afines con S paralelo a T, entonces $f(S)$ es paralelo a $f(T)$.*

(F) *Si $f \colon A \to A'$ es una aplicación afín y $P_0, \ldots, P_k \in A$, entonces el subespacio afín generado por $f(P_0), \ldots, f(P_k)$ coincide con la imagen por f del subespacio afín generado por $P_0, \ldots, P_k$.*

(G) *Si $f \colon A \to A'$ es una aplicación afín y $P, Q, R \in A$ son tres puntos alineados, entonces $f(P), f(Q), f(R)$ están alineados.*

(H) *Una aplicación afín es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) si y sólo si su aplicación lineal asociada es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).*

(I) *Una aplicación afín es una traslación o una homotecia si y sólo si $\forall S \subset A$ subespacio afín, S y $f(S)$ son paralelos.*

Definición 9 Sea $f\colon A \to A$ una aplicación afín de A en sí mismo. Un punto $P \in A$ se dice *fijo* por f si $f(P) = P$. Al conjunto de los puntos fijos de f se le denota por P_f (podría ser vacío).

Proposición 6 *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ una aplicación afín. Entonces, son equivalentes:*

1. *$P_f \neq \emptyset$.*
2. *$\text{rango}(A - I_n) = \text{rango}(A - I_n | -b)$.*

Y si cualquiera de las condiciones anteriores se da, entonces P_f es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ con variedad de dirección $V_1(\vec{f}) = \{v \in V \mid \vec{f}(v) = v\}$.

Demostración. $x \in P_f$ si y sólo si $Ax + b = x$, es decir, $(A - I_n)x = b$. El resto es consecuencia del teorema de Rouché-Frobenius. □

Definición 10 Sea $f\colon A \to A$ una aplicación afín de A en sí mismo. Un subespacio afín $S \subset A$ se dice *invariante* por f si $f(S) \subset S$.

Definición 11 Una *afinidad* es una aplicación afín biyectiva $f\colon A \to A$ (equivale a que $\vec{f}$ sea un automorfismo de V).

1. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$, es una afinidad si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
2. Las traslaciones y las homotecias son afinidades.
3. Las simetrías respecto a subespacios son afinidades, pero las proyecciones no.

10. Espacio afín euclídeo

Definición 12 Sea A un espacio afín con espacio vectorial asociado V. Supongamos que en V tenemos una métrica euclídea g. Diremos entonces que (A, V, g) es un *espacio afín euclídeo.* A veces diremos simplemente que A es un espacio afín euclídeo, si se sobreentiende la métrica sobre V.

En un espacio afín euclídeo (A, V, g), se definen:

1. La *distancia* en A es la aplicación $d\colon A \times A \to [0, \infty)$ dada por $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.
2. Dados $P \in A$ y S subespacio afín de A, la *distancia* de P a S es $d(P, S) = \inf\{d(P, Q) \mid Q \in S\}$.
3. Dados $S, T \subset A$ subespacios afines de A, la *distancia* de S a T es $d(P, S) = \inf\{d(P, Q) \mid P \in S, Q \in T\}$.
4. El *ángulo* (no orientado) que forman dos rectas afines $L, R \subset A$ es el ángulo que forman un vector director de L y un vector director de R. Si dos rectas forman un ángulo recto, se dice que son ortogonales o perpendiculares.
5. Dos subespacios afines S, T de A se dicen *ortogonales* si lo son sus variedades de dirección, es decir $\vec{S} \subset (\vec{T})^{\perp}$.
6. Dado un subespacio afín S de A, la *proyección ortogonal* de A sobre S es la proyección Π_S paralela al subespacio $(\vec{S})^{\perp}$, y la *simetría ortogonal* de A respecto a S como la simetría σ_S paralela al subespacio $(\vec{S})^{\perp}$.
7. El *segmento* de extremos $P, Q \in A$ es $\overline{PQ} = \{P + \lambda\overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in [0, 1]\}$. El *punto medio* de $\overline{PQ}$ es $M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.
8. Tres puntos $P_1, P_2, P_3 \in A$ afínmente independientes forman un *triángulo* en A, con lados $\overline{P_iP_{i+1}}$, $i = 1, 2, 3$. Los elementos notables de un triángulo son:
   - *Mediatrices:* son las rectas perpendiculares a los lados que dividen a éstos en partes iguales. El *circuncentro* es el punto en el que se encuentran las tres mediatrices.
   - *Bisectrices:* son las rectas que dividen a los ángulos en partes iguales. Las bisectrices se encuentran en el *incentro.*
   - *Circunferencia circunscrita:* es la circunferencia que contiene a los tres vértices. Su centro es el *circuncentro* del triángulo.
   - *Circunferencia inscrita:* es la circunferencia tangente a los tres lados. Su centro es el *incentro* del triángulo.
   - *Bases:* son los segmentos que unen los puntos medios de los lados del triángulo.
   - *Medianas:* son los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos. Las medianas se encuentran en el *baricentro.*
   - *Alturas:* son los segmentos perpendiculares a los lados (o a la prolongación de éstos) que tienen su otro extremo en el vértice opuesto. Las alturas se cortan en el *ortocentro.*

9. Cuatro puntos $P_1, P_2, P_3, P_4 \in A$ afínmente independientes forman un *cuadrilátero* en A. Un caso particular es el *paralelogramo,* cuando dos a dos los lados son paralelos. En cualquier paralelogramo, las longitudes de lados opuestos coinciden. Un *rectángulo* es un paralelogramo cuyos lados contiguos son perpendiculares. Un *cuadrado* es un rectángulo cuyos lados tienen todos la misma longitud.

Lema 8 *Si $P \in A$ y $S \subset A$ es un subespacio afín, entonces $d(P, S) = d(P, \Pi_S(P))$.*

Demostración. $\Pi_S(P) = S \cap \left(P + (\vec{S})^\perp\right)$, luego $d(P, S) \leq d(P, \Pi_S(P))$.

Sea $Q \in S$. Como $\overrightarrow{P, \Pi_S(P)} \in (\vec{S})^\perp$ y $\overrightarrow{\Pi_S(P), Q} \in \vec{S}$, tenemos $d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{P, \Pi_S(P)} + \overrightarrow{\Pi_S(P), Q}\|^2 = \|\overrightarrow{P, \Pi_S(P)}\|^2 + \|\overrightarrow{\Pi_S(P), Q}\|^2 = d(P, \Pi_S(P))^2 + \|\overrightarrow{\Pi_S(P), Q}\|^2 \geq d(P, \Pi_S(P))^2$, de donde $d(P, Q) \geq d(P, \Pi_S(P))^2$. tomando ínfimos en $Q \in S$ se tiene $d(P, S) \geq d(P, \Pi_S(P))$. □

11. Movimientos rígidos

Definición 13 Un *movimiento rígido* (o simplemente movimiento) de un espacio afín euclídeo (A, V, g) es una aplicación afín $f : A \to A$ cuya aplicación lineal asociada $\vec{f}$ es una isometría de (V, g) en sí mismo. El movimiento se dice *directo* si $\vec{f}$ conserva la orientación, es decir, $\det(\vec{f}) = 1$. En otro caso, f se dice *inverso* ($\det(\vec{f}) = -1$).

1. Todo movimiento es una afinidad.

2. La composición de dos movimientos es otro movimiento, y la inversa también. Por tanto, los movimientos forman un grupo. Lo mismo ocurre con los movimientos directos, pero no con los inversos.

3. Una aplicación afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$, es un movimiento si y sólo si $A \in O(n)$.

4. Las traslaciones son movimientos directos. Las simetrías ortogonales son movimientos, y son directos si y sólo si la codimensión de subespacio de puntos fijos es par.

Teorema 2 (Movimientos del plano afín euclídeo)
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento.

(A) *Si $P_f \neq \emptyset$, entonces se da una de las posibilidades:*

(A.1) $f = 1_{\mathbb{R}^2}$ *(directo).*

(A.2) f *es una simetría respecto a una recta (inverso).*

(A.3) *f es un giro de ángulo no nulo alrededor de un punto (directo).*

(B) *Si $P_f = \emptyset$, entonces se da una de las posibilidades:*

(B.1) *f es una traslación (directo).*

(B.2) *f es una simetría deslizante (inverso).*

Demostración. Supongamos que f tiene algún punto fijo. Por la Proposición 6, P_f es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$ con variedad de dirección $V_1(\vec{f})$. Discutimos casos según su dimensión:

1. Si $\dim V_1(\vec{f}) = 2$, entonces $V_1(\vec{f}) = \mathbb{R}^2$, y $\vec{f} = 1_{\mathbb{R}^2}$. Como $P_f \neq \emptyset$, concluimos que $f = 1_{\mathbb{R}^2}$.

2. Si $\dim V_1(\vec{f}) = 1$, entonces $\vec{f}$ es una simetría respecto a una recta vectorial $\vec{L}$. Como $\exists P \in P_f$, tenemos que f es una simetría respecto a la recta afín $L = P + \vec{L}$.

3. Si $\dim V_1(\vec{f}) = 0$, entonces 1 no es valor propio de $\vec{f}$, luego $\vec{f}$ es un giro de ángulo no nulo (incluyendo el giro de ángulo π dado por $\vec{f} = -1_{\mathbb{R}^2}$). Como f tiene un punto fijo P. f es el giro del mismo ángulo respecto a P (en el caso de $\vec{f} = -1_{\mathbb{R}^2}$, f es la simetría central respecto a P).

Supongamos ahora que f no tiene puntos fijos. Llamando $f(x) = Ax + b$, la Proposición 6 nos dice que $\text{rango}(A - I_2) < \text{rango}(A - I_2 | -b)$, luego tenemos 2 opciones:

1. $\text{rango}(A - I_2) = 0$ y $\text{rango}(A - I_2 | -b) = 1$. Así, $A = I_2$ y como f no tiene puntos fijos, f es una traslación.

2. $\text{rango}(A - I_2) = 1$ y $\text{rango}(A - I_2 | -b) = 2$. Así, 1 es valor propio de $\vec{f}$ pero $\vec{f} \neq 1_{\mathbb{R}^2}$. Por tanto, $\vec{f}$ es una simetría respecto a una recta vectorial $\vec{L}$, y existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (el primer vector de la base está en $\vec{L}$ y el segundo en $(\vec{L})^{\perp}$).

   Veamos que existe $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\vec{f})$ (lo que sigue es válido en cualquier dimensión, y lo usaremos en la demostración del Teorema 3): Como $f(x) = Ax + b$, entonces $\overrightarrow{P, f(P)} = AP + b - P$ luego $\vec{f}(\overrightarrow{P, f(P)}) = A(AP + b - P) = A^2P - AP + Ab$. Así, $\vec{f}(\overrightarrow{P, f(P)}) = \overrightarrow{P, f(P)}$ si y sólo si $A^2P - AP + Ab = AP + b - P$, lo que equivale a $(A - I_n)^2 P = -(A - I_n)b$. En resumen:

$$(\star) \quad \exists P \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\vec{f}) \;\Leftrightarrow\; (A - I_n)^2 P = -(A - I_n)b.$$

Volvemos a dimensión 2. Tenemos $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $(A - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $((A - I_2)^2| - (A - I_2)b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2b_2 \end{pmatrix}$, luego se da la igualdad de rangos entre las dos últimas matrices. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, existe $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $(A - I_2)^2 P = -(A - I_2)b$, luego por $(\star)$, $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\vec{f})$. Esto nos dice que si llamamos L a la recta generada por $\{P, f(P)\}$ (notemos que estos puntos son distintos porque f no tiene puntos fijos, y que la variedad de dirección de L es $V_1(\vec{f})$), entonces f se restringe a L como una traslación de vector $\overrightarrow{P, f(P)}$, y f es la composición de la traslación de vector $\overrightarrow{P, f(P)}$ con la simetría ortogonal respecto a L. Esto es lo que se llama una *simetría deslizante.* $\square$

Teorema 3 (Movimientos del espacio afín euclídeo)
Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento.

(A) *Si $P_f \neq \emptyset$, entonces se da una de las posibilidades:*

- **(A.1)** $f = 1_{\mathbb{R}^3}$ *(directo).*
- **(A.2)** f *es una simetría respecto a un plano afín (inverso).*
- **(A.3)** f *es un giro de ángulo no nulo alrededor de una recta afín (directo).*
- **(A.4)** f *es una simetría central respecto a un punto (inverso).*
- **(A.5)** f *es la composición de un giro de ángulo no nulo alrededor de una recta afín con una simetría ortogonal a dicho plano (inverso).*

(B) *Si $P_f = \emptyset$, entonces se da una de las posibilidades:*

- **(B.1)** f *es una traslación (directo).*
- **(B.2)** f *es una simetría deslizante (inverso).*
- **(B.3)** f *es un movimiento helicoidal (directo).*

Demostración. Supongamos que f tiene algún punto fijo. Por la Proposición 6, P_f es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$ con variedad de dirección $V_1(\vec{f})$. Discutimos casos según su dimensión:

1. Si $\dim V_1(\vec{f}) = 3$, entonces $V_1(\vec{f}) = \mathbb{R}^3$, y $\vec{f} = 1_{\mathbb{R}^3}$. Como $P_f \neq \emptyset$, concluimos que $f = 1_{\mathbb{R}^3}$.
2. Si $\dim V_1(\vec{f}) = 2$, entonces $\vec{f}$ es una simetría respecto a un plano vectorial $\vec{S}$. Como f tiene un punto fijo P, f será la simetría respecto al plano afín $P + \vec{S}$.

3. Si $\dim V_1(\vec{f}) = 1$, entonces $\vec{f}$ es un giro de ángulo no nulo alrededor de una recta vectorial $\vec{L}$. Como $\exists P \in P_f$, tenemos que f es un giro del mismo ángulo alrededor de la recta afín $P + \vec{L}$.

4. Si $\dim V_1(\vec{f}) = 0$, entonces 1 no es valor propio de $\vec{f}$, luego -1 es valor propio de $\vec{f}$. Esto implica que f conserva los subespacios $V_{-1}(\vec{f})$ y su suplemento ortogonal (porque $\vec{f}$ es isometría).

   - Si $\dim V_{-1}(\vec{f}) = 3$, entonces $\vec{f} = -1_{\mathbb{R}^3}$ y como f tiene un tiene un punto fijo P, entonces f es una simetría central respecto a P.
   - Si $\dim V_{-1}(\vec{f}) = 2$, entonces $[V_{-1}(\vec{f})]^\perp$ es un subespacio invariante por $\vec{f}$ y de dimensión 1, luego es un subespacio propio de $\vec{f}$. El valor propio asociado a $[V_{-1}(\vec{f})]^\perp$ no puede ser otro que 1, contradicción con que $\dim V_1(\vec{f}) = 0$.
   - Si $\dim V_{-1}(\vec{f}) = 1$, entonces $\vec{f}|_{[V_{-1}(\vec{f})]^\perp}$ es una isometría de un plano euclídeo sin valores propios, luego $\vec{f}|_{[V_{-1}(\vec{f})]^\perp}$ es un giro alrededor del origen con ángulo $\theta \neq 0, \pi$. Por tanto, $\vec{f}$ es la composición del giro de ángulo θ respecto de la recta vectorial $V_{-1}(\vec{f})$, con la simetría respecto al plano vectorial $[V_{-1}(\vec{f})]^\perp$. Como f tiene un punto fijo, f será la composición del giro de ángulo θ alrededor de la recta afín $L = P + V_{-1}(\vec{f})$ con la simetría respecto al plano afín $P + [V_{-1}(\vec{f})]^\perp$. Esto termina el caso de que f tenga algún punto fijo.

Supongamos ahora que f no tiene puntos fijos. Llamando $f(x) = Ax + b$, la Proposición 6 nos dice que $\text{rango}(A - I_3) < \text{rango}(A - I_3| - b)$, luego tenemos 3 opciones:

1. $\text{rango}(A - I_3) = 0$ y $\text{rango}(A - I_3| - b) = 1$. Así, $A = I_3$ y como f no tiene puntos fijos, f es una traslación.

2. $\text{rango}(A - I_3) = 1$ y $\text{rango}(A - I_3| - b) = 2$. Así, 1 es un valor propio de $\vec{f}$ con multiplicidad 2, luego $\vec{f}$ es una simetría respecto al plano vectorial $V_1(\vec{f})$ (en particular, -1 es valor propio simple de $\vec{f}$). Tomemos una base ortonormal $\{x_1, x_2\}$ de $V_1(\vec{f})$ y un vector unitario x_3 de $[V_1(\vec{f})]^\perp$. Así, $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y la matriz de $\vec{f}$ respecto a B es $M(\vec{f}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cambiando a un sistema de referencia (O, B) con $O \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, podemos suponer $f(x) = Ax + b$ con $A = M(f, B)$, para algún $b \in \mathbb{R}^3$ (esto es un abuso de notación: en realidad x debería denotarse de forma distinta porque representa coordenadas respecto al sistema de referencia $(O; B)$ que no tiene porqué ser el usual, y tanto A como b no han de coincidir con las A, b anteriores, pero siguen verificando $\text{rango}(A - I_3) = 1$ y $\text{rango}(A - I_3| - b) = 2$, así que no cambiaremos la notación). Veamos que existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\vec{f})$: según vimos en $(\star)$ de la demostración del

último teorema, esto equivale a que $(A - I_3)^2 P = -(A - I_3)b$. En nuestro caso, $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $((A - I_3)^2 | - (A - I_3)b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2b_3 \end{pmatrix}$, luego se da la igualdad de rangos entre las dos últimas matrices. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - I_3)^2 P = -(A - I_3)b$, luego por lo anterior, $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\vec{f})$. Esto implica que f es una simetría respecto a un plano afín con variedad de dirección $V_1(\vec{f})$ seguida de una traslación de cierto vector no nulo en ese mismo plano vectorial $V_1(\vec{f})$ (simetría deslizante).

3. rango$(A - I_3) = 2$ y rango$(A - I_3 | - b) = 3$. En este caso, 1 es un valor propio simple de $\vec{f}$, y $[V_1(\vec{f})]^\perp$ es un plano vectorial. La isometría $\vec{f}|_{[V_1(\vec{f})]^\perp}$ no tiene a 1 como valor propio, luego es un giro de ángulo $\theta \neq 0$ (podría ser $\theta = \pi$) respecto al origen. Por tanto, $\vec{f}$ es el giro de ángulo γ respecto al eje $V_1(\vec{f})$. Tomemos un vector unitario x_1 de $V_1(\vec{f})$ y una base ortonormal $\{x_2, x_3\}$ de $[V_1(\vec{f})]^\perp$. Así, $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y la matriz de $\vec{f}$ respecto a B es $M(\vec{f}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Cambiando a un sistema de referencia (O, B) con $O \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, podemos suponer $f(x) = Ax + b$ con $A = M(f, B)$, para algún $b \in \mathbb{R}^3$ (con el mismo abuso de notación que en el caso anterior). Veamos que existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - I_3)^2 P = -(A - I_3)b$ y de $(\star)$ deduciremos de nuevo que $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\vec{f})$.
$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}$, $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, donde

$$\alpha = 1 - 2\cos\theta + \cos(2\theta), \quad \beta = 2(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

y $((A - I_3)^2 | - (A - I_3)b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & b_2(1 - \cos\theta) + b_3 \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\beta & \alpha & b_3(1 - \cos\theta) - b_2 \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$.

En particular, se da la igualdad de rangos entre las dos últimas matrices. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - I_3)^2 P = -(A - I_3)b$, luego $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\vec{f})$. Esto implica que f es un giro de ángulo θ alrededor de la recta afín $V_1(\vec{f})$ seguida de una traslación de cierto vector no nulo a lo largo de la misma recta afín (movimiento helicoidal). $\square$

12. Cónicas y cuádricas

Definición 14 Sea (A, V, g) un espacio afín euclídeo n-dimensional y $(O; B)$ un sistema de referencia ortonormal (es decir, B es una base ortonormal de V). Una *hipercuádrica* de A es el conjunto $F^{-1}\{0\} = \{x \in A \mid F(x) = 0\}$, donde $F : A \to \mathbb{R}$ es un polinomio de segundo grado respecto de las coordenadas afines en $(O; B)$ de los puntos de A.

- Por ejemplo, en $\mathbb{R}^4$, el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$ es una hipercuádrica.
- Si $\dim A = 2$, se habla de *cónicas* y si $\dim A = 3$, se habla de *cuádricas*.

En general, el polinomio F que determina una hipercuádrica viene dado de la siguiente manera. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ son coordenadas cartesianas respecto a $(O; B)$, los términos en grado 2 del polinomio cuadrático F son del tipo $a_{ij}x_ix_j$ para ciertos coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i \leq j)$. Escribiendo para cada $i \leq j$

$$a_{ij}x_ix_j = \frac{a_{ij}}{2}x_ix_j + \frac{a_{ij}}{2}x_jx_i = m_{ij}x_ix_j + m_{ji}x_ix_j,$$

definimos una matriz simétrica $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (con elementos $m_{ij} = a_{ij}/2$ si $i \leq j$) y la suma de los términos en grado 2 de $F(x)$ es $x^t \cdot M \cdot x$. Notemos que M no puede ser la matriz nula porque F es de grado dos. Análogamente, podemos escribir la suma de términos de grado 1 de $F(x)$ como $2b^tx$, para cierto $b \in \mathbb{R}^n$, y el término independiente de $F(x)$ como $c \in \mathbb{R}$, con lo que

$$F(x) = x^tMx + 2b^tx + c = (x^t\ 1)\widetilde{M}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & b \\ \hline b^t & c \end{array}\right). \tag{8}$$

A veces es útil un cambio de referencia ortonormal para simplificar la expresión de la hipercuádrica. Si cambiamos de sistema de referencia ortonormal de $(O; B)$ a $(O_1; B_1)$ mediante un movimiento rígido $x = f(y) = Qy + v$ con $Q \in O(n)$ y $v \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$F(x) = F(Qy + v) = (Qy + v)^tM(Qy + v) + 2b^t(Qy + v) + c$$
$$= y^t \cdot Q^tMQ \cdot y + y^t \cdot Q^tMv + v^tMQ \cdot y + v^tMv + 2b^tQ \cdot y + 2b^tv + c$$

Escribiendo el segundo sumando como $y^t \cdot Q^tMv = (Q^tMv)^t \cdot y = v^tMQ \cdot y$, nos queda

$$F(x) = y^t \cdot Q^tMQ \cdot y + 2\left(v^tM + b^t\right)Q \cdot y + \left(v^tMv + 2b^tv + c\right). \tag{9}$$

Definición 15 En la situación anterior, un punto $v \in \mathbb{R}^n$ se dice un *centro* de la hipercuádrica $F^{-1}(0)$ si es solución de la ecuación $v^tM + b^t = 0$, o equivalentemente, de $Mv = -b$.

Notemos que bajo el cambio de sistema de referencia anterior, el origen O $(x = 0)$ cambia al origen O' $(y = 0)$, que tiene coordenadas $x = v$ respecto a $(O; B)$.

12.1. Cónicas

Sea $F^{-1}(0)$ una cónica en $\mathbb{R}^2$ dada por (8) con $n = 2$. Como M es simétrica, entonces es ortogonalmente diagonalizable: existe $Q \in O(2)$ tal que $Q^t M Q = D$, siendo $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ los valores propios de M (no necesariamente distintos). Recordemos que M no es nula, luego su rango es 1 ó 2.

Caso rango(M) = 2: Siempre hay un único centro $v \in \mathbb{R}^2$ de la cónica, pues la ecuación $Mv = -b$ tiene solución única. Por tanto,

$$F(x) \stackrel{(9)}{=} y^t D y + (-v^t b + 2b^t v + c) = y^t D y + (b^t v + c) := F_1(y),$$

donde F_1 es el polinomio cuadrático que expresa la misma cónica respecto al sistema de referencia ortonormal $(O_1; B_1)$. Notemos que

$$F_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + c_1, \tag{10}$$

donde $c_1 = b^t v + c \in \mathbb{R}$.

1. Si $\det M > 0$, entonces λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo. Cambiando el signo en (10) podemos suponer $\lambda_1, \lambda_1 > 0$ y obtenemos los tres siguientes casos:

   a) Si $c_1 = 0$ la cónica se reduce al punto O_1.

   b) Si $c_1 > 0$, la cónica es el vacío.

   c) Si $c_1 < 0$ la cónica es una *elipse* de semiejes $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$.

2. Si $\det M < 0$ entonces λ_1 y λ_2 tienen signos distintos y se dan sólo dos casos:

   a) Si $c_1 = 0$, tenemos un *par de rectas secantes*. Este caso se da exactamente cuando rango$(\widetilde{M}) = 2$ (esto se deduce de las ecuaciones $Mv = -b$ y $c_1 = b^t v + c$, viendo en ambos casos $-v$ como los coeficientes de una combinación lineal de las dos primeras columnas de $\widetilde{M}$ para producir la tercera columna de $\widetilde{M}$).

   b) Si $c_1 \neq 0$, entonces la cónica es una *hipérbola.* Se da cuando rango$(\widetilde{M}) = 3$.

Caso rango(M) = 1: Uno de los valores propios de M ha de ser cero, digamos $\lambda_2 = 0$. Teníamos

$$F_1(y) \stackrel{(9)}{=} y^t D y + 2\left(v^t M + b^t\right) Q \cdot y + \left(v^t M v + 2b^t v + c\right) = \lambda_1 y_1^2 + 2(b')^t y + c_1, \tag{11}$$

donde $b' = Q^t(Mv + b)$ y $c_1 = v^t M v + 2b^t v + c$. En este caso no podemos asegurar que exista un centro de la cónica (existirá si la ecuación $Mv = -b$ tiene solución, es decir, si rango(M) = rango$(M|b)$). Así que del sistema de referencia ortonormal $(O; B)$ sólo cambiamos la base ortonormal, a $(O; B_1)$. Desarrollando un poco más (11) obtenemos el polinomio cuadrático

$$F_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + 2d_1 y_1 + 2d_2 y_2 + c_1,$$

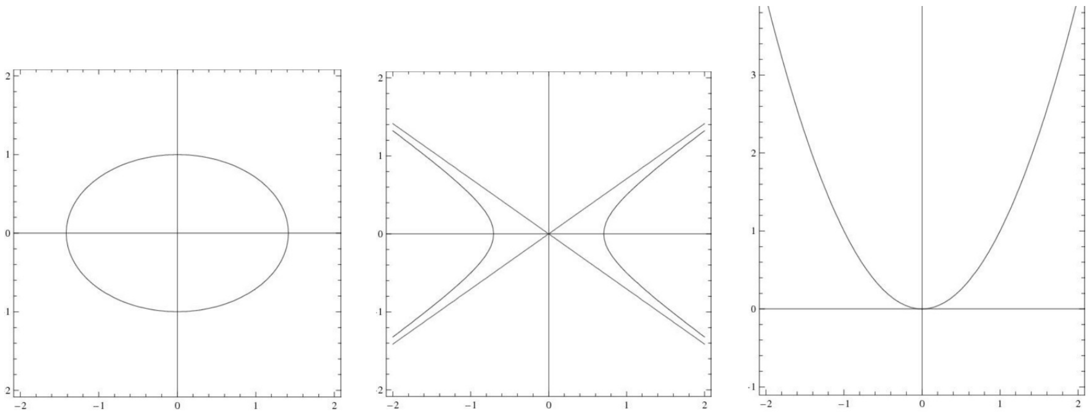
para ciertos $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

1. Si $d_2 \neq 0$, entonces la cónica es una *parábola* (porque y_2 es función cuadrática de y_1).
2. Si $d_2 = 0$, tenemos $F_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + 2d_1 y_1 + c_1$ $(\diamond)$, luego
   a) Si $(\diamond)$ no tiene soluciones, la cónica es el vacío.
   b) Si $(\diamond)$ tiene una solución doble $y_1 = cte$, la cónica es una *recta doble.*
   c) Si $(\diamond)$ tiene dos soluciones distintas $y_1 = cte$, $y_1 = cte'$, la cónica es un *par de rectas paralelas.*

Deducimos entonces la clasificación de las cónicas en $\mathbb{R}^2$:

Teorema 4 *Una cónica $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ en $\mathbb{R}^2$ sólo puede ser de uno de los siguientes tipos:*

1. *Un punto.*
2. *Una elipse (o una circunferencia, cuando los semiejes coincidan).*
3. *Un par de rectas secantes.*
4. *Una hipérbola.*
5. *Una parábola.*
6. *Una recta doble.*
7. *Un par de rectas paralelas.*



Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ Parábola $y = ax^2$

12.2. Cuádricas

Sea $F^{-1}(0)$ una cuádrica en $\mathbb{R}^3$ dada por (8) con $n = 3$. Como M es simétrica, entonces es ortogonalmente diagonalizable: existe $Q \in O(3)$ tal que $Q^t M Q = D$, siendo D la matriz diagonal de orden 3 con entradas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ en la diagonal. Como M no es nula, su rango es 1, 2 ó 3.

Caso rango(M) = 3: Podemos resolver de forma única $Mv = -b$, luego la cuádrica tiene un único centro $v \in \mathbb{R}^3$. Por tanto, al igual que ocurría en el caso de las cónicas

$$F(x) \stackrel{(9)}{=} y^t D y + (-v^t b + 2b^t v + c) = y^t D y + (b^t v + c) := F_1(y),$$

donde F_1 es el polinomio cuadrático que expresa la misma cuádrica respecto al sistema de referencia ortonormal $(O_1; B_1)$. Ahora,

$$F_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + c_1, \tag{12}$$

donde $c_1 = b^t v + c \in \mathbb{R}$.

1. Si los tres valores propios de M tienen el mismo signo (podemos suponer $\lambda_i > 0 \ \forall i$), entonces la cuádrica es el vacío (si $c_1 > 0$), un punto (si $c_1 = 0$) o un *elipsoide* (si $c_1 < 0$) de semiejes $1/\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$. Los elipsoides cuyos valores propios son todos iguales reciben el nombre de *esferas.*

2. Si hay valores propios de M con distinto signo, caben dos casos:

   a) Si $c_1 = 0$, la cuádrica es un *cono.* Este cono es *circular* cuando los dos valores propios de M del mismo signo sean iguales; en otro caso, el corte de cada plano $\{y_3 = cte\}$ con el cono es una elipse; aquí estamos suponiendo $\lambda_1 \lambda_2 > 0$).

b) Si $c_1 \neq 0$, la cuádrica se llama *hiperboloide.* Hay hiperboloides de dos tipos:

- *Hiperboloide elíptico o de dos hojas,* cuando la cuádrica no corta al plano afín $\{y_3 = 0\}$ (de nuevo estamos suponiendo que λ_3 es de signo distinto a λ_1, λ_2).
- *Hiperboloide hiperbólico o de una hoja.* Siguiendo la normalización anterior, este caso se da cuando la cuádrica corta al plano afín $\{y_3 = 0\}$. Esta cuádrica es reglada: por cada punto pasan dos rectas contenidas en la cuádrica.

En ambos casos, el corte del hiperboloide con planos del tipo $\{y_3 = cte\}$, si es no vacío, puede ser una circunferencia (cuando $\lambda_1 = \lambda_2$) o una elipse.

Caso rango$(M) = 2$**:** Uno de los valores propios de M es cero, pongamos $\lambda_3 = 0$. Teníamos

$$F_1(y) \overset{(9)}{=} y^t D y + 2\left(v^t M + b^t\right) Q \cdot y + \left(v^t M v + 2b^t v + c\right) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2(b')^t y + c_1, \quad (13)$$

donde $b' = Q^t(Mv + b)$ y $c_1 = v^t M v + 2b^t v + c$. No podemos asegurar que exista un centro de la cuádrica (existirá si la ecuación $Mv = -b$ tiene solución, es decir, si $\text{rango}(M) = \text{rango}(M|b)$). Así que del sistema de referencia ortonormal $(O; B)$ sólo cambiamos la base ortonormal, a $(O; B_1)$. Desarrollando (13) obtenemos

$$F_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2d_1 y_1 + 2d_2 y_2 + 2d_3 y_3 + c_1,$$

para ciertos $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$. Cambiando de nuevo el sistema de referencia ortonormal mediante el movimiento rígido $y = \Phi(z) = z + w$ con $w = (w_1, w_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ (o sea, no estamos cambiando la base ortonormal sino sólo trasladando el origen del sistema de referencia), y eligiendo $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ de forma que $\lambda_i w_i + d_i = 0$ $\forall i = 1, 2$, es fácil llegar a

$$F_1(y) = F_1(z + w) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2d_3 z_3 + c_2,$$

para cierto $c_2 \in \mathbb{R}$.

1. Si $d_3 \neq 0$, la cuádrica es un *paraboloide*, que puede ser *elíptico* si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ o *hiperbólico* si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

2. Si $d_3 = 0$, la tercera variable no aparece. Esto quiere decir que la cuádrica es un producto de la recta real en la dirección de z_3 con una cónica en $\mathbb{R}^2$ (es decir, en el plano afín $\{z_3 = 0\}$). Clasificamos esta cónica olvidándonos momentáneamente de la tercera variable z_3. Como $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, esta cónica es de rango máximo (rango 2 en la clasificación de las cónicas), luego o bien la cónica es un punto (y la cuádrica es una *recta doble*) o es una elipse (y la cuádrica es un cilindro sobre dicha elipse, es decir un *cilindro con base elíptica*[1]), o la cónica es un par de rectas secantes (luego

[1]Los cilindros cuya base es una circunferencia se llaman *cilindros circulares*, y corresponden al caso $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

la cuádrica es un *par de planos que se cortan*), o una hipérbola (y la cuádrica es un *cilindro con base hiperbólica*).

Caso rango$(M) = 1$**:** El argumento es muy parecido al caso anterior. Ahora sólo el primer valor propio es distinto de cero (salvo reordenación). Teníamos

$$F_1(y) \overset{(9)}{=} y^t D y + 2\left(v^t M + b^t\right) Q \cdot y + \left(v^t M v + 2b^t v + c\right) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2(b')^t y + c_1, \quad (14)$$

donde $D = Q^t M Q$ es la matriz diagonal con entradas $\lambda_1, 0, 0$, $b' = Q^t(Mv + b)$ y $c_1 = v^t M v + 2b^t v + c$. Desarrollando (14) obtenemos

$$F_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + 2d_1 y_1 + 2d_2 y_2 + 2d_3 y_3 + c_1,$$

para ciertos $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$. Cambiando el sistema de referencia ortonormal mediante el movimiento rígido $y = \Phi(z) = z + w$ con $w = (w_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ con w_1 solución de $\lambda_1 w_1 + d_1 = 0$, se llega a

$$F_1(y) = F_1(z + w) = \lambda_1 z_1^2 + 2d_2 z_2 + 2d_3 z_3 + c_2,$$

para cierto $c_2 \in \mathbb{R}$.

1. Si $(d_2, d_3) \neq (0, 0)$, podemos girar el sistema de referencia (sin mover el origen) en en plano $\{z_1 = 0\}$ para anular uno de los coeficientes d_2 ó d_3, con lo que el otro de estos dos coeficientes será no nulo. Es decir, tras ese giro $(u_2, u_3) \mapsto (z_2, z_3)$ en el plano afín $\{z_1 = 0\}$ llegamos a

   $$F_2(u) = \lambda_1 u_1^2 + du_2 + c_2 = 0$$

   para cierto $d \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como la variable u_3 no aparece en la última expresión, la cuádrica es un producto de la recta real en la dirección de u_3 con una cónica en $\mathbb{R}^2$ (es decir, en el plano afín $\{u_3 = 0\}$). Esta cónica es una parábola, con lo que la cuádrica es un *cilindro parabólico.*

2. Si $(d_2, d_3) = (0, 0)$, la ecuación es $\lambda_1 z_1^2 + c_2 = 0$. Resolviendo la ecuación en z_1 tendremos dos soluciones, una o ninguna, que se corresponden con que la cuádrica consista en *dos planos paralelos* $\{z_i = \pm cte\}$, un *plano doble* $\{z_1 = 0\}$ o el vacío.

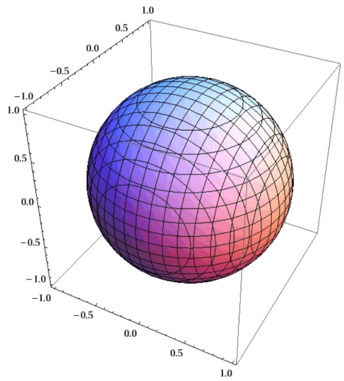
Terminamos con la clasificación de las cuádricas en $\mathbb{R}^3$:

Teorema 5 *Una cuádrica $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ en $\mathbb{R}^3$ sólo puede ser de uno de los siguientes tipos:*

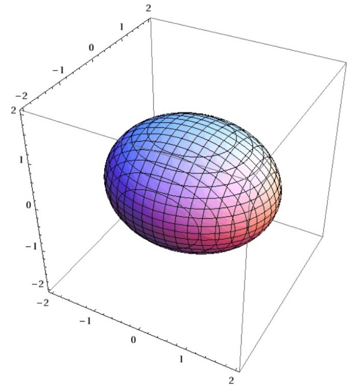
1. *Un punto.*

2. *Una elipsoide (o una esfera, cuando los tres semiejes coincidan).*

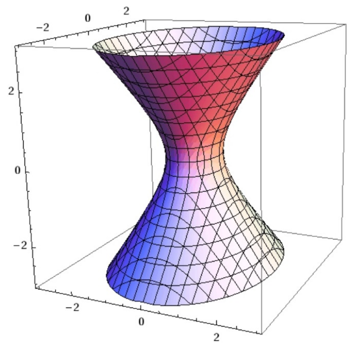
3. *Un cono (sobre una elipse o circular).*
4. *Un hiperboloide elíptico de dos hojas (sobre una elipse o circular).*
5. *Un hiperboloide hiperbólico de una hoja (sobre una elipse o circular).*
6. *Un paraboloide elíptico.*
7. *Un paraboloide hiperbólico.*
8. *Una recta doble.*
9. *Un cilindro sobre una elipse (o sobre una circunferencia).*
10. *Un par de planos secantes.*
11. *Un cilindro sobre una hipérbola.*
12. *Un cilindro sobre una parábola.*
13. *Dos planos paralelos.*
14. *Un plano doble.*



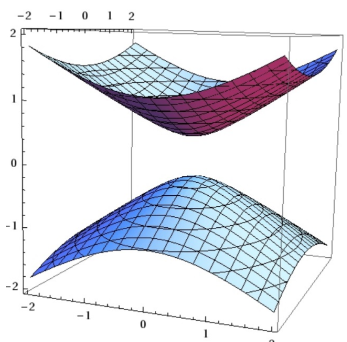
Esfera
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



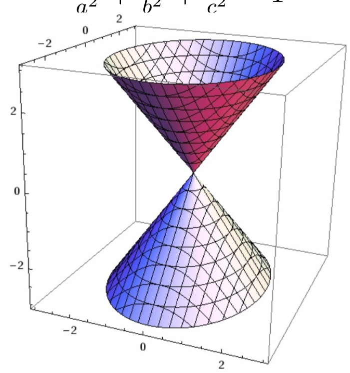
Elipsoide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



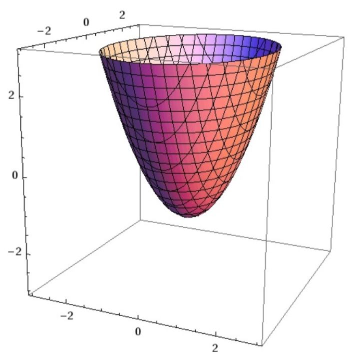
Hiperboloide de 1 hoja
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



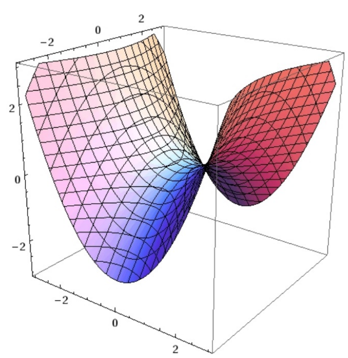
Hiperboloide de 2 hojas
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



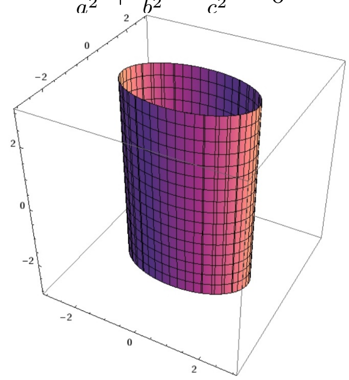
Cono
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



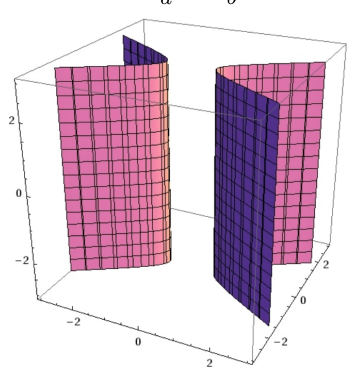
Paraboloide elíptico
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



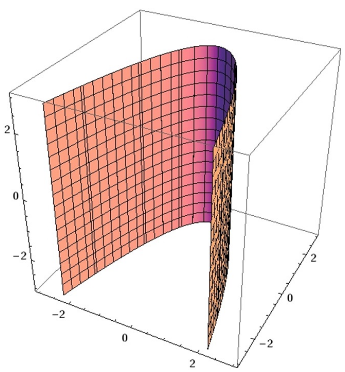
Paraboloide hiperbólico
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



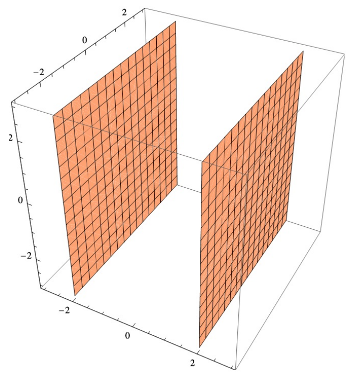
Cilindro elíptico
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



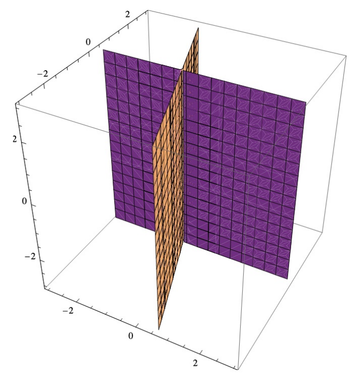
Cilindro hiperbólico
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Cilindro parabólico
$y = ax^2$



Par de planos paralelos
$ax^2 + b = 0$



Par de planos secantes
$(3x + y + 1)(2y - 1) = 0$

13. Ejercicios.

1. Prueba el Corolario 1.

2. Determina en $\mathbb{R}^3$ el subespacio afín generado por los puntos $p_1 = (1,1,1)$, $p_2 = (2,1,0)$, $p_3 = (1,-1,0)$ y $p_4 = (2,1,1)$. Calcula su dimensión.

3. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios afines $A =< (1,2,2),(0,1,1) >$, $B = (1,0,1) + L(\{(1,1,1),(0,1,1)\})$. Calcular $A \cap B$.

4. Determina el menor subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ que contiene a las rectas $S = (1,1,1) + L(\{(1,1,1)\})$ y $T = (0,1,1) + L(\{(0,0,1)\})$.

5. En $\mathbb{R}^3$ y respecto del sistema de referencia cartesiano usual, determina la ecuación de la recta R paralela a $S = x - y + z = 0, x + y - z = 1$ que pasa por el punto $(1,1,1)$. Calcula también las ecuaciones de $R + S$.

6. Demuestra la Proposición 5.