

Convocatoria ordinaria de junio-Geometría II
1º Grado en Matemáticas
18 de junio 2018

Apellidos y nombre: _____ Grupo _____

- 1) Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de \mathbb{R}^3 cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2 + 2axz - 4ayz .$$

- a) (1 PUNTO) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a .
- b) (1 PUNTO) ¿Son (\mathbb{R}^3, g_0) y (\mathbb{R}^3, g_2) isométricos? ¿Son (\mathbb{R}^3, g_{-1}) y (\mathbb{R}^3, g_2) isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.
- 2) (2 PUNTOS) Sea (V, g) un espacio métrico no degenerado con $\dim(V) \geq 2$ y U un subespacio de V , $U \neq \{0\}$, $U \neq V$. Se dice que una base B de V es una base de Sylvester de (V, g) si $M(g, B)$ es una matriz de Sylvester. Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:
- a) Toda base de Sylvester de (U, g_U) puede extenderse a una base de Sylvester de (V, g) .
- b) $V = U \oplus U^\perp$.
- 3) En un plano vectorial euclídeo (V, g) y respecto de una base $B = \{v_1, v_2\}$ se sabe que

$$\|v_1\| = \sqrt{3}, \quad \|v_2\| = 2, \quad \sphericalangle(v_1, v_2) = \frac{\pi}{6} .$$

Se pide:

- a) (1 PUNTO) Calcula la matriz en la base B de la simetría ortogonal respecto de la recta $L(v_1 + v_2)$.
- b) (1 PUNTO) Demuestra que el endomorfismo h de V dado por

$$h(v_1) = -6v_1 + 3v_2, \quad h(v_2) = -4v_1 + 2v_2$$

es autoadjunto y calcula una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de h .

- c) (1 PUNTO) Comprueba que el endomorfismo f de V dado por

$$f(v_1) = -v_1 + \frac{3}{2}v_2, \quad f(v_2) = -2v_1 + 2v_2$$

es una isometría y clasifícala.

4) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo de V que verifica

$$g(f(u), v) = -g(u, f(v)) , \forall u, v \in V .$$

Se pide:

- a) (1 PUNTO) Demuestra que $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ son subespacios ortogonales de V .
- b) (1 PUNTO) Demuestra que $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- c) (1 PUNTO) Demuestra que si B es una base ortonormal de (V, g) entonces $M(g, B)$ es antisimétrica.