Curvas y superficies. Grupo A

Resumen continuidad y diferenciabilidad

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ (normalmente usaremos $n = 2, 3$). $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i\}$ es un espacio vectorial real de dimensión n con la suma y el producto por escalares

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Denoteremos la norma en $\mathbb{R}^n$ por

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathbb{R}^n$ es también un espacio topológico, siendo una base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$ las bolas abiertas de cualquier centro y radio:

$$\mathbb{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ r > 0.$$

Por tanto, un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x, r) \subset U$.

Denotaremos $\mathbb{S}^{n-1}(x, r) = \partial \mathbb{B}(x, r)$ a la esfera de centro x y radio r. Cuando $x = \vec{0}$, simplemente escribiremos $\mathbb{S}^{n-1}(r) = \mathbb{S}^{n-1}(\vec{0}, r)$ y $\mathbb{B}(r) = \mathbb{B}(\vec{0}, r)$.

Continuidad.
Sea $I \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Una función $f \colon I \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que si $x \in I$ cumple $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. f es continua en I si es continua en cada punto de I. f es uniformemente continua en I si el δ anterior no depende de $x_0 \in I$ (aunque puede depender de ε).

Teorema 0.0.1 (Bolzano) *Si $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$, entonces $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in U$. Una función $f \colon U \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que $f(U \cap \mathbb{B}(x_0, \delta)) \subset \mathbb{B}(f(x_0), \varepsilon)$. f es continua en U si es continua en cada punto de U. f es uniformemente continua en U si el δ anterior no depende de $x_0 \in U$.

Teorema 0.0.2 (Bolzano-Weierstrass) *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $f \colon U \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f admite un máximo y un mínimo en U.*

Teorema 0.0.3 (Heine-Cantor) *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $f\colon U \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es uniformemente continua.*

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in U$. Una aplicación $f = (f_1, \dots, f_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ es continua en x_0 si y sólo si cada componente $f_j\colon U \to \mathbb{R}$ de f es continua en x_0. f es continua en U si f es continua en cada punto de U.

Algunos ejemplos que usaremos de aplicaciones continuas son:

1. Simetría central. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

2. Inversión. $f\colon \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.

3. Proyección. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ ($i \in \{1, \dots n\}$ fija).

La composición de aplicaciones continuas en continua: si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g\colon V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ son aplicaciones continuas con $f(U) \subset V$, entonces $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^k$ es continua.

Una aplicación $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo si f es continua, biyectiva, y su inversa $f^{-1}\colon V \to U$ es continua. Por ejemplo, la afinidad $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (ax, by, cz)$ donde $a, b, c > 0$, es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo, y la restricción $f = F|_{\mathbb{S}^2(1)}\colon \mathbb{S}^2(1) \to S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ es un homemorfismo de la esfera unidad en el elipsoide de semiejes a, b, c.

Una curva es una aplicación continua $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. A la variable $t \in I$ de α se le llama parámetro.

Diferenciabilidad.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f\colon I \to \mathbb{R}$. f es derivable en $x_0 \in I$ si existe el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] \in \mathbb{R}.$$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta afín tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. f es derivable en I si lo es en cadapunto de I. Toda función derivable es continua.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función. f es diferenciable en $p_0 \in U$ si para cada $v \in \mathbb{R}^2$, existe el límite (derivada direccional)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(p_0 + hv) - f(x_0)] \in \mathbb{R}.$$

Cuando $v = (1, 0)$, al límite anterior se le denota por $f_x(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$. Análogamente, $f_y(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$ se obtiene cuando $v = (0, 1)$.

f es diferenciable en U si lo es en cada punto de U. Esto permite definir las derivadas parciales $f_x, f_y\colon U \to \mathbb{R}$. Si a su vez estas parciales son diferenciables, entonces existen $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, las parciales segundas de f. Si reiteramos el proceso podremos definir las derivadas parciales de cualquier orden de f, cuando existan. Una función se dice de clase C^k ($k \in \mathbb{N}$) cuando existen todas sus derivadas parcuiales hasta el orden k, y son continuas, y se dice de clase C^∞ (a veces diremos simplemente diferenciable) si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$. Todo este desarrollo se extiende análogamente a funciones $f\colon U \to \mathbb{R}$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación. f se dice diferenciable (o de clase C^k) si lo son todas sus componentes.

Teorema 0.0.4 (Regla de la cadena) *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones diferenciables con $f(U) \subset V$. Entonces, $g \circ f$ es diferenciable y sus parciales vienen dadas por*

$$\begin{aligned}(g \circ f)_u(u,v) &= g_x(f(u,v)) \cdot x_u(u,v) + g_y(f(u,v)) \cdot y_u(u,v) + g_z(f(u,v)) \cdot z_u(u,v),\\ (g \circ f)_v(u,v) &= g_x(f(u,v)) \cdot x_v(u,v) + g_y(f(u,v)) \cdot y_v(u,v) + g_z(f(u,v)) \cdot z_v(u,v),\end{aligned}$$

donde $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Este teorema sigue siendo cierto si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$.

Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable (U es abierto de $\mathbb{R}^n$) y $p \in U$, entonces la diferencial de f en p es la aplicación lineal

$$df_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0),$$

donde $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Escribamos $\alpha(t) = (x_1, \ldots, x_n)(t)$ y $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces,

$$(f \circ \alpha)'(0) = \big((f_1 \circ \alpha)'(0), \ldots, (f_m \circ \alpha)'(0)\big)$$

y dado $j = 1, \ldots, m$, la regla de la cadena implica

$$(f_j \circ \alpha)'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \cdot x_i'(0),$$

donde $v = \alpha'(0) = (x_1'(0), \ldots, x_n'(0)) = \sum_{i=1}^n x_i'(0) e_1^{\mathbb{R}^n}$ (aquí $B_u^{\mathbb{R}^n} = \{e_1^{\mathbb{R}^n}, \ldots, e_n^{\mathbb{R}^n}\}$ es la base usual de $\mathbb{R}^n$). Por tanto,

$$df_p(v) = \sum_{j=1}^{m} (f_j \circ \alpha)'(0) e_j^{\mathbb{R}^m} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \cdot x_i'(0) \right) e_j^{\mathbb{R}^m}.$$

Lo anterior es válido $\forall v \in \mathbb{R}^n$. Si tomamos $v = e_1^{\mathbb{R}^n}$ obtenemos

$$df_p(e_1^{\mathbb{R}^n}) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \cdot \delta_{i1} \right) e_j^{\mathbb{R}^m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(p) e_j^{\mathbb{R}^m},$$

y análogamente para los otros vectores de $B_u^{\mathbb{R}^n}$. Esto nos dice que la matriz de df_p respecto a las bases usuales $B_u^{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$ y $B_u^{\mathbb{R}^m}$ de $\mathbb{R}^m$ es

$$M(df_p, B_u^{\mathbb{R}^n}, B_u^{\mathbb{R}^m}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix},$$

que se llama la matriz jacobiana de f en p. Con el lenguaje de matrices jacobianas, la regla de la cadena es fácil de recordar:

Teorema 0.0.5 (Regla de la cadena) *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos aplicaciones diferenciables con $f(U) \subset V$. Entonces, $g \circ f$ es diferenciable y dado $p \in U$, se tiene*

$$M(d(g \circ f)_p, B_u^{\mathbb{R}^n}, B_u^{\mathbb{R}^k}) = M(dg_{f(p)}, B_u^{\mathbb{R}^m}, B_u^{\mathbb{R}^k}) \cdot M(df_p, B_u^{\mathbb{R}^n}, B_u^{\mathbb{R}^m}),$$

y por tanto, $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.

Un difeomorfismo $f : U \to V$ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable, biyectiva y con inversa difeenciable.

Teorema 0.0.6 (Teorema de la función inversa) *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable y $p \in U$ tal que df_p es un automorfismo de $\mathbb{R}^n$. entonces, existen $U_1 \subset U$ abierto conteniendo a p y $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto conteniendo a $f(p)$ tales que $f(U_1) = V$ y $f|_{U_1} : U_1 \to V$ es un difeomorfismo.*

El teorema de la función inversa es válido si f es de clase C^1.

Un difeomorfismo local $f : U \to V$ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable cuya diferencial en cada punto es un automorfismo.

Un difeomorfismo local no tiene porqué ser un difeomorfismo: por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ cumple que dado $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(df_p, B_u^{\mathbb{R}^2}, B_u^{\mathbb{R}^2}) = e^{x_0} \begin{pmatrix} \cos y_0 & -\sin y_0 \\ \sin y_0 & \cos y_0 \end{pmatrix}$$

es una matriz regular, luego df_p es un automorfismo de $\mathbb{R}^2$ $\forall p \in \mathbb{R}^2$, luego f es un difeomorfismo local de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Sin embargo, f no es inyectiva, luego no puede ser un difeomorfismo.

Análisis vectorial en $\mathbb{R}^n$.

El producto escalar usual $\langle , \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$, es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, $\langle , \rangle$ es una métrica euclídea en $\mathbb{R}^n$. Toda forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi(u) = \langle u, v \rangle,$$

para cierto $v \in \mathbb{R}^n$ fijo.

Si $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^n$ son curvas diferenciables definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, entonces $\langle \alpha, \beta \rangle \colon I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, y su derivada viene dada por

$$\langle \alpha, \beta \rangle' = \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle.$$

La norma asociada $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ cumple las siguientes propiedades:

- (Desigualdad de Schwarz) $\quad \langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2, \quad '' = '' \iff u, v$ son linealmente dependientes.
- (Desigualdad de Minkowski o triangular) $\quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad '' = '' \iff \exists \lambda \geq 0$ tal que $v = \lambda u$ (o viceversa).
- $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \sphericalangle(u, v), \quad u, v \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

El determinante es la aplicación multilineal antisimétrica $\det \colon \mathbb{R}^n \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \det\left((v_{i,j})_{i,j}\right),$$

donde $v_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,n})$ $\forall i = 1, \ldots, n$. El determinante cumple las propiedades:

- $\det(v_1, \ldots, v_n) = 0$ si y sólo si $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes.
- Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces $\det(v_1, \ldots, v_n) = \pm 1$ ($+$ si la base es positiva, es decir, si la matriz de cambio de base entre B y la base usual tiene determinante positivo, y $-$ si es negativa).

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \colon I \to \mathbb{R}^n$ son curvas diferenciables definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, entonces $\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \colon I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, y su derivada viene dada por

$$[\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]' = \sum_{i=1}^n \det(\alpha_1 \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n).$$

El producto vectorial de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ es el único vector $u \times v \in \mathbb{R}^3$ que cumple

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w), \quad \forall w \in \mathbb{R}^3.$$

Esto permite definir la aplicación producto vectorial: $(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to u \times v \in \mathbb{R}^3$, que es bilineal y antisimétrica. Además, el producto vectorial cumple las propiedades:

- $u \times v = 0$ si y sólo si u, v son linealmente dependientes.
- $u \times v$ es ortogonal a u y v.
- Si u, v son ortogonales y unitarios, entonces $\{u, v, u \times v\}$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$.
- $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.
- $u \times v = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$, siendo $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Si $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ son curvas diferenciables definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, entonces $\alpha \times \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable, y su derivada viene dada por

$$(\alpha \times \beta)' = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'.$$